

**ROGÉRIO FRANCISCO KÜSTER PUPPI**

**IMPLEMENTAÇÃO DE MODELO CONSTITUTIVO HIPERPLÁSTICO COM  
DANO ACOPLADO APLICADO A SOLOS RESIDUAIS**

**Tese apresentado ao Programa de Pós-  
Graduação em Métodos Numéricos em  
Engenharia da Universidade Federal do  
Paraná.**

**Professora orientadora: Mildred Ballin  
Hecke**

**Professor co-orientador: Celso Romanel**

**CURITIBA  
AGOSTO, 2008**

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	i
<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES</b> .....	ii
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	xiv
<b>AGRADECIMENTOS</b> .....	xv
<b>RESUMO</b> .....	xvi
<b>ABSTRACT</b> .....	xvii
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1 OBJETIVOS .....	2
1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO .....	3
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	4
2.1. PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS SOLOS .....	9
2.2 EQUAÇÕES DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS .....	10
2.2.1 Equações de equilíbrio (ou de Movimento) .....	10
2.2.2 Condições de Compatibilidade Geométrica .....	11
2.2.3 Relações Constitutivas .....	13
2.3 COMPORTAMENTO MECÂNICO DOS SOLOS .....	14
2.3.1 Dilatância .....	18
2.3.2 As Deformações Localizadas nos Solos OC .....	20
2.4 SOLOS PARCIALMENTE SATURADOS .....	22
2.4.1 Influência do Grau de Saturação no Comportamento do Solo .....	23
2.5 SOLOS COLAPSÍVEIS .....	25
2.6 SOLOS RESIDUAIS .....	27
2.7. FORMULAÇÃO TEÓRICA .....	29
2.8 MODELO CAM CLAY MODIFICADO .....	29
2.9 MODELO CAM CLAY ESTRUTURADO .....	32
2.9.1 Regra de Fluxo .....	36
2.9.2 Relações Tensão-Deformação .....	37
2.10 TEORIA DO ESTADO PERTURBADO .....	41
2.11 MODELO BARCELONA .....	47

2.12	MODELO DE PLASTICIDADE COM DANO ACOPLADO .....	57
2.12.1	Potencial de Dissipação Desacoplado e Campo Discreto de Superfícies de Escoamento .....	62
2.12.2	Potencial de Dissipação Acoplado e Superfície de Escoamento .....	63
2.12.3	Modelos de Variável Interna Única .....	66
2.12.4	Modelos Hiperplásticos com Dano .....	74
<b>3</b>	<b>ALGORITMO .....</b>	<b>94</b>
3.1	FATOR MULTIPLICADOR $\lambda$ .....	97
3.2	MODELO MCC HIPERELÁSTICO COM DANO .....	102
3.2.1	Carregamento Isotrópico .....	104
3.2.2	Carregamento de compressão triaxial convencional .....	105
3.2.3	Carregamento de compressão confinada (ensaio oedométrico) .....	108
3.2.4	Modelo MCC hiperelástico com dano e tensão de escoamento não constante .....	110
3.3	MODELO MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO .....	116
3.3.1	Carregamento Isotrópico .....	117
3.3.2	Carregamento de compressão triaxial convencional .....	118
3.3.3	Carregamento de compressão confinada .....	123
3.3.4	Carregamento de compressão não-drenada ( $\varepsilon_v = 0$ ) .....	125
3.4	MODELO MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO: modelo com endurecimento ou amolecimento .....	130
3.4.1	Carregamento Isotrópico .....	130
3.4.2	Carregamento de compressão triaxial convencional .....	132
3.4.3	Carregamento de compressão confinada .....	138
3.4.4	Carregamento de compressão confinada – caminho direto .....	145
3.4.5	Carregamento de compressão não-drenada ( $\varepsilon_v = 0$ ) .....	149
3.5	MODELO MCC HIPERPLÁSTICO COM DANO ACOPLADO .....	151
<b>4</b>	<b>RESULTADOS .....</b>	<b>160</b>
4.1	SIMULAÇÃO DE ENSAIOS .....	162
4.1.1	Simulação de Ensaio de Compressão Triaxial Convencional (CTC) .....	162
4.1.2	Simulação de Ensaio de Compressão com Tensão Normal Média	

Constante .....	172
4.1.3 Simulação de Ensaio com Redução de Tensão Normal Média – $p$ .....	179
4.1.4 Simulação de Ensaio de Compressão Confinada (Oedométrica) .....	185
4.1.5 Simulação de Ensaio de Compressão Não-Drenada .....	192
4.2 ADAPTAÇÃO DO MODELO HIPERPLÁSTICO COM DANO ACOPLADO	
A SOLOS ESTRUTURADOS .....	198
4.2.1 Simulação de Ensaio de Compressão Triaxial Convencional (CTC) .....	200
4.2.2 Simulação de Ensaio de Compressão com Tensão Normal Média	
Constante .....	210
4.2.3 Simulação de Ensaio com Redução de Tensão Normal Média – $p$ .....	218
4.2.4 Simulação de Ensaio de Compressão Confinada (Oedométrica) .....	224
4.2.5 Simulação de Ensaio de Compressão Não-Drenada .....	227
4.3 EXEMPLOS DE MODELAGEM DE SOLOS RESIDUAIS .....	230
4.3.1 Modelagem de solo residual de biotita gnaisse saturado .....	230
4.3.2 Modelagem de solo residual de arenito não-saturado .....	245
4.3.3 Modelagem de silte eólico não-saturado .....	261
<b>5. ANÁLISE .....</b>	<b>273</b>
<b>6 CONCLUSÕES .....</b>	<b>279</b>
6.1 SUGESTÕES .....	283
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>285</b>
<b>ANEXO 1 - TRANSFORMAÇÃO DE LEGENDRE .....</b>	<b>289</b>
A.1 TRANSFORMADA DE LEGENDRE.....	289
A.1.1 Interpretação Geométrica da Transformada de Legendre .....	289
A.1.2 Transformada de Legendre de Funções Homogêneas .....	290
A.1.3 Transformadas parciais de Legendre e Ciclos Fechados de	
Transformações .....	291
A.1.4 Transformação Singular .....	293
<b>ANEXO 2 – SIMULAÇÃO DE ENSAIOS .....</b>	<b>295</b>

<b>ANEXO 3 – TENSORES, INVARIANTES E TRAJETÓRIAS DE TENSÕES .....</b>	<b>307</b>
<b>ANEXO 4 – FLUXOGRAMAS .....</b>	<b>312</b>

## LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1.	EXEMPLOS DE OPERADORES SOBRE VARIÁVEIS INTERNAS (EINAV ET AL, 2007) .....	65
TABELA 4.1.	VALORES DE MÓDULO CISALHANTE G DOS ENSAIOS CTC .....	236
TABELA 4.2.	VALORES DE PRESSÃO DE ADENSAMENTO ISOTRÓPICA .....	249
TABELA 4.3.	VALORES DE COMPONENTES DE TENSÃO (P, Q) DOS ENSAIOS CTC (KPA) .....	250
TABELA 4.4.	VALORES DE TENSÃO DE DESVIO ÚLTIMO PARA OS ENSAIOS EMS .....	255
TABELA 4.5.	VALORES DE COMPONENTES DE TENSÃO (P, Q) DOS ENSAIOS CTC-EMS, PARA SUCÇÃO DE 80 KPA (KPA) ..	255
TABELA 4.6.	VALORES DE $Q \times \varepsilon_s$ E DO MÓDULO CISALHANTE G DOS ENSAIOS CTC-EMS, PARA SUCÇÃO DE 80 KPA .....	257
TABELA 4.7.	VALORES DOS PARÂMETROS DAS SUPERFÍCIES DE RUPTURA $Q_0$ E $M_R$ , DOS ENSAIOS CTC COM SILTE EÓLICO COMPACTADO (IBÁÑEZ, 2003, APUD CUI E BELAGE, 1996) .....	266
TABELA 4.8.	VALORES DE $Q \times \varepsilon_s$ E DO MÓDULO CISALHANTE G DOS ENSAIOS CTC COM TENSÃO CONFINANTE $\sigma_C = 200$ KPA E TENSÕES DE SUCÇÃO DE 400 E 800 KPA .....	267
TABELA A.1.	SIMULAÇÃO DE CARREGAMENTO NÃO-DRENADO .....	300
TABELA A.2.	SIMULAÇÃO DE CARREGAMENTO NÃO-DRENADO .....	303
TABELA A.3.	SIMULAÇÃO DE CARREGAMENTO DE COMPRESSÃO CONFINADA .....	305
TABELA A.4.	SIMULAÇÃO DE CARREGAMENTO DE COMPRESSÃO CONFINADA .....	307
TABELA A.5.	SIMULAÇÃO DE CARREGAMENTO DE COMPRESSÃO CONFINADA .....	308
TABELA A.6.	SIMULAÇÃO DE CARREGAMENTO DE COMPRESSÃO NÃO-DRENADA .....	310

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 2.1.	FAMÍLIA DE MODELOS DERIVADOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE (IBÁÑEZ, 2003) .....	7
FIGURA 2.2.	FAMÍLIA DE MODELOS CONSTITUTIVOS ELASTO-PLÁSTICOS CLÁSSICOS (IBÁÑEZ, 2003) .....	8
FIGURA 2.3.	FAMÍLIA DE MODELOS CONSTITUTIVOS ELASTO-PLÁSTICOS AVANÇADOS (IBÁÑEZ, 2003) .....	8
FIGURA 2.4.	FAMÍLIA DE MODELOS CONSTITUTIVOS PARA SOLOS NÃO-SATURADOS E ESTRUTURADOS (IBÁÑEZ, 2003) ...	9
FIGURA 2.5.	CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO E DE COMPATIBILIDADE GEOMÉTRICA NA ANÁLISE ESTÁTICA DE UM PROBLEMA DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS (CHEN; BALADY, 1985) .....	11
FIGURA 2.6.	INTER-RELACIONAMENTO ENTRE VARIÁVEIS ENVOLVIDAS NA ANÁLISE ESTÁTICA DE UM PROBLEMA DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS (CHEN; BALADY, 1985) .....	13
FIGURA 2.7.	COMPORTAMENTO TÍPICO DE SOLO SOB CONSOLIDAÇÃO ISOTRÓPICA (CHEN; BALADY, 1985) ....	15
FIGURA 2.8.	CURVAS DE COMPORTAMENTO TÍPICO TENSÃO CISALHANTE X DEFORMAÇÃO CISALHANTE (CHEN; BALADY, 1985) .....	16
FIGURA 2.9.	COMPORTAMENTO TÍPICO DE SOLOS TESTADOS SOB CONDIÇÕES DE TESTE TRIAXIAL DRENADO (CHEN; BALADY, 1985) .....	16
FIGURA 2.10.	COMPORTAMENTO TÍPICO DE SOLOS TESTADOS SOB CONDIÇÕES DE TESTE TRIAXIAL NÃO-DRENADO (CHEN; BALADY, 1985) .....	17
FIGURA 2.11.	EVOLUÇÃO DA RESISTÊNCIA E DA DILATÂNCIA DURANTE UM ENSAIO DE CISALHAMENTO DIRETO, (A) E (B) ESQUEMA PARA ENSAIO DE CISALHAMENTO DIRETO, (C) ESQUEMA DE ENSAIO DE CISALHAMENTO COM CAIXA ARTICULADA (ADAPTADO DE MARANHA DAS NEVES, 2007) .....	19
FIGURA 2.12.	LOCALIZAÇÃO DAS DEFORMAÇÕES NOS SOLOS (ADAPTADO DE MARANHA DAS NEVES, 2007) .....	21
FIGURA 2.13.	COMPORTAMENTO TÍPICO DE SOLOS ISOTRÓPICOS E TRANSVERSO-ISOTRÓPICOS SECOS, OU SOLICITADOS DE FORMA DRENADA, SOB CARREGAMENTO E DESCARREGAMENTO HIDROSTÁTICO (CHEN; BALADY, 1985) .....	22
FIGURA 2.14.	ESTADOS POSSÍVEIS DE SATURAÇÃO DO SOLO (BEAR, 1979, APUD MARINHO E PEREIRA, 1998) .....	24
FIGURA 2.15.	COLAPSO DEVIDO À SATURAÇÃO EM SOLOS INSATURADOS (VARGAS, 1973) .....	26
FIGURA 2.16.	PERFIL DE INTEMPERISMO: (A) ROCHA METAMÓRFICA, (B) ROCHA ÍGNEA INTRUSIVA (ADAPTADO POR IBÁÑEZ, 2003, DE DEERE & PATTON, 1971) .....	28

FIGURA 2.17.	(A) SUPERFÍCIES DE ESCOAMENTO E LINHA DE ESTADO CRÍTICO (LEC) NO PLANO $P - Q$ ; (B) CONSOLIDAÇÃO ISOTRÓPICA (LCI) E DE DESCARREGAMENTO / RECARREGAMENTO (LD) (ADAPTADO DE IBAÑEZ, 2003)	30
FIGURA 2.18.	IDEALIZAÇÃO DE COMPRESSÃO ISOTRÓPICA DE SOLO RECONSTITUÍDO E DE SOLO ESTRUTURADO (ADAPTADO DE LIU E CARTER, 2002)	32
FIGURA 2.19.	SUPERFÍCIE ESTRUTURAL DE ESCOAMENTO E SUPERFÍCIE ÚLTIMA DE ESCOAMENTO (ADAPTADO DE LIU E CARTER, 2002)	33
FIGURA 2.20.	CONTRAÇÃO DA SUPERFÍCIE ESTRUTURAL DE ESCOAMENTO POR AMOLECIMENTO	39
FIGURA 2.21.	INFLUÊNCIA DO TAMANHO INICIAL DA SUPERFÍCIE ESTRUTURAL DE ESCOAMENTO NA SIMULAÇÃO DE COMPORTAMENTO TENSÃO-DEFORMAÇÃO (ADAPTADO DE LIU E CARTER, 2002)	40
FIGURA 2.22.	INFLUÊNCIA DO TAMANHO INICIAL DA SUPERFÍCIE ESTRUTURAL DE ESCOAMENTO NA SIMULAÇÃO DE COMPORTAMENTO DE DEFORMAÇÃO VOLUMÉTRICA VERSUS DEFORMAÇÃO DESVIADORA (ADAPTADO DE LIU E CARTER, 2002)	40
FIGURA 2.23.	CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE ARGILA PRÉ-ADENSADA. CONCEITO DE PERTURBAÇÃO (MODIFICADO DE DESAI, 1974, POR IBAÑEZ, 2003)	42
FIGURA 2.24.	(A) REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA DO DS; (B) ESQUEMA DE COMPORTAMENTO TENSÃO-DEFORMAÇÃO COMO UMA COMPOSIÇÃO DAS RESPOSTAS NAS FASES RI E FA (MODIFICADO DE DESAI, 2000)	43
FIGURA 2.25.	REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL DE PERTURBAÇÃO PROPOSTA POR WEIBUL $D(\xi_D)$ (MODIFICADO POR DESAI, 2000)	44
FIGURA 2.26.	APLICAÇÃO DA TEORIA DSC NO CASO DE SOLOS ESTRUTURADOS (ADAPTADO DE IBAÑEZ, 2003)	46
FIGURA 2.27.	VISTA TRIDIMENSIONAL DAS SUPERFÍCIES DE ESCOAMENTO NO ESPAÇO ( $P, Q, S$ ) (ALONSO ET AL, 1990)	48
FIGURA 2.28.	RELAÇÃO ENTRE PRESSÕES DE CONSOLIDAÇÃO $P_0$ E $P_0^*$ : (A) CURVAS DE COMPRESSÃO PARA SOLO SATURADO E NÃO SATURADO; (B) TRAJETÓRIAS DE TENSÕES E CURVA DE ESCOAMENTO NO ESPAÇO DE TENSÕES ( $P, S$ ) (MODIFICADO DE ALONSO ET AL, 1990)	49
FIGURA 2.29.	SUPERFÍCIES LC NO PLANO ( $P, S$ ) (MODIFICADO DE ALONSO ET AL, 1990)	51
FIGURA 2.30.	DEFINIÇÃO DE SUCCÃO DE ESCOAMENTO $S_0$ (MODIFICADO DE ALONSO ET AL, 1990)	52
FIGURA 2.31.	SUPERFÍCIES DE ESCOAMENTO LC (LOADING-COLLAPSE) E SI (SUCTION INCREASE) (ADAPTADO DE ALONSO ET AL, 1990)	53



FIGURA 2.32.	SUPERFÍCIES DE ESCOAMENTO NO ESPAÇO (P, Q, S): (A) PROJEÇÃO SOBRE PLANO (Q, S) E (B) PLANO (P, S) (ALONSO ET AL, 1990) .....	55
FIGURA 2.33.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE MODELO UNIDIMENSIONAL HIPERELÁSTICO COM DANO (EINAV ET AL, 2007) .....	73
FIGURA 2.34.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE MODELO UNIDIMENSIONAL HIPERPLÁSTICO COM DANO, PARA PLASTICIDADE IDEAL, ENDURECIMENTO E AMOLECIMENTO (EINAV ET AL, 2007) .....	80
FIGURA 2.35.	RELAÇÃO ENTRE DANO E DEFORMAÇÃO PLÁSTICA CISALHANTE ACUMULADA EM MODELO DE VON MISES DE PLASTICIDADE ACOPLADA COM DANO (EINAV ET AL, 2007) .....	84
FIGURA 2.36.	MODELO DE COMPRESSÃO CONVENCIONAL MCC (EINAV ET AL, 2007) .....	86
FIGURA 2.37.	MODELO DE COMPRESSÃO MCC HIPERELÁSTICO COM DANO (EINAV ET AL, 2007) .....	88
FIGURA 2.38.	COMPORTAMENTO TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE COMPRESSÃO DE MODELO MCC HIPERPLÁSTICO COM DANO (MODIFICADO DE EINAV ET AL, 2007) .....	89
FIGURA 2.39.	PREDIÇÕES DO MODELO HIPERPLÁSTICO COM DANO DE RESULTADOS EXPERIMENTAIS DE RESPOSTA VOLUMÉTRICA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE ENSAIOS OEDOMÉTRICOS (HOLTZ ET AL, 1986) (EINAV ET AL, 2007) .....	90
FIGURA 2.40.	EFEITO DE PARÂMETRO DE ACOPLAMENTO DANO-PLASTICIDADE RP EM TESTES DE CISALHAMENTO NÃO-DRENADO: (A) TRAJETÓRIAS DE TENSÃO, (B) RESPOSTA TENSÃO-DEFORMAÇÃO AO CISALHAMENTO E (C) EVOLUÇÃO DA VARIÁVEL DE DANO DE CISALHAMENTO (EINAV ET AL, 2007) .....	91
FIGURA 3.1.	SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO PARA MCC HIPERELÁSTICO COM DANO .....	103
FIGURA 3.2.	MCC HIPERELÁSTICO COM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO CONSTANTE SOB ESTADO DE COMPRESSÃO ISOTRÓPICA .....	105
FIGURA 3.3.	MCC HIPERELÁSTICO COM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO CONSTANTE SOB ESTADO DE COMPRESSÃO TRIAXIAL CONVENCIONAL .....	106
FIGURA 3.4.	MCC HIPERELÁSTICO COM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO CONSTANTE SOB ESTADO DE COMPRESSÃO CONFINADA .....	109
FIGURA 3.5.	MCC HIPERELÁSTICO COM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO NÃO-CONSTANTE SOB ESTADO DE COMPRESSÃO ISOTRÓPICA, (A) COM ENDURECIMENTO, (B) COM AMOLECIMENTO .....	111
FIGURA 3.6.	MCC HIPERELÁSTICO COM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO NÃO-CONSTANTE SOB ESTADO DE	

	COMPRESSÃO PASSIVA, (A) COM ENDURECIMENTO E (B) COM AMOLECIMENTO .....	112
FIGURA 3.7.	MCC HIPERELÁSTICO COM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO NÃO-CONSTANTE SOB ESTADO DE COMPRESSÃO CONFINADA, (A) COM ENDURECIMENTO, (B) COM AMOLECIMENTO .....	114
FIGURA 3.8.	MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO CONSTANTE SOB ESTADO DE COMPRESSÃO ISOTRÓPICA .....	118
FIGURA 3.9.	MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO CONSTANTE SOB ESTADO DE COMPRESSÃO TRIAXIAL CONVENCIONAL .....	119
FIGURA 3.10.	MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO CONSTANTE SOB ESTADO DE COMPRESSÃO TRIAXIAL CONVENCIONAL .....	123
FIGURA 3.11.	MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO CONSTANTE SOB ESTADO DE COMPRESSÃO CONFINADA .....	124
FIGURA 3.12.	MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO CONSTANTE SOB ESTADO DE COMPRESSÃO TRIAXIAL NÃO-DRENADA .....	128
FIGURA 3.13.	SIMULAÇÃO DE CARREGAMENTO NÃO-DRENADO PARA MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO CONSTANTE .....	129
FIGURA 3.14.	MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO NÃO-CONSTANTE SOB ESTADO DE COMPRESSÃO ISOTRÓPICA (A) SUPERFÍCIES MÓVEIS DE ESCOAMENTO, (B) CARREGAMENTO ISOTRÓPICO, (C) FUNÇÃO DE ENDURECIMENTO, E (D) FUNÇÃO DE AMOLECIMENTO .....	131
FIGURA 3.15.	MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO NÃO-CONSTANTE SOB ESTADO DE COMPRESSÃO TRIAXIAL CONVENCIONAL ATINGINDO SUPERFÍCIE LIMITE DE RUPTURA .....	134
FIGURA 3.16.	MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO NÃO-CONSTANTE SOB ESTADO DE COMPRESSÃO TRIAXIAL CONVENCIONAL ATINGINDO SUPERFÍCIE FINAL DE ESCOAMENTO – CASO DE ENDURECIMENTO .....	135
FIGURA 3.17.	MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO NÃO-CONSTANTE SOB ESTADO DE COMPRESSÃO TRIAXIAL CONVENCIONAL ATINGINDO SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO DE AMOLECIMENTO – CASO DE AMOLECIMENTO .....	136
FIGURA 3.18.	MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO NÃO-CONSTANTE SOB ESTADO DE COMPRESSÃO CONFINADA – CASO DE ENDURECIMENTO .....	138
FIGURA 3.19.	MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO NÃO-CONSTANTE SOB ESTADO DE	

	COMPRESSÃO CONFINADA – MUDANÇA DA TRAJETÓRIA DE TENSÃO COM ENDURECIMENTO .....	140
FIGURA 3.20.	MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO NÃO-CONSTANTE. SIMULAÇÃO DE CARREGAMENTO SOB ESTADO DE COMPRESSÃO CONFINADA – CASO DE ENDURECIMENTO, (A) TRAJETÓRIA $P \times Q$ , (B) $Q \times \varepsilon_S$ E (C) $\log P \times \varepsilon_V$ .....	141
FIGURA 3.21.	MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO NÃO-CONSTANTE. SIMULAÇÃO DE CARREGAMENTO SOB ESTADO DE COMPRESSÃO CONFINADA – CASO DE AMOLECIMENTO, (A) TRAJETÓRIA $P \times Q$ , (B) $Q \times \varepsilon_S$ E (C) $\log P \times \varepsilon_V$ .....	143
FIGURA 3.22.	MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO NÃO-CONSTANTE. SIMULAÇÃO DE CARREGAMENTO SOB ESTADO DE COMPRESSÃO CONFINADA – CASO DE ENDURECIMENTO, (A) TRAJETÓRIA $P \times Q$ (B) $\varepsilon_V \times P$ E (C) $\varepsilon_V \times \log P$ .....	147
FIGURA 3.23.	MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO E TENSÃO DE ESCOAMENTO NÃO-CONSTANTE. SIMULAÇÃO DE CARREGAMENTO SOB ESTADO DE COMPRESSÃO NÃO-DRENADA – CASO DE ENDURECIMENTO, (A) TRAJETÓRIA $P \times Q$ , $P_Y \times P$ E $P_{YA} \times P$ , (B) $Q \times \varepsilon_S$ .....	150
FIGURA 3.24.	MCC HIPERPLÁSTICO COM DANO ACOPLADO – CASOS DE INCREMENTO DE TENSÃO .....	151
FIGURA 3.25.	MCC HIPERPLÁSTICO COM DANO ACOPLADO – CASOS DE INCREMENTO DE TENSÃO .....	156
FIGURA 3.26.	MCC HIPERPLÁSTICO COM DANO ACOPLADO – CASO DE AMOLECIMENTO .....	157
FIGURA 4.1.	FUNÇÕES DE ESCOAMENTO PARA MCC HIPERPLÁSTICO COM DANO (A) $\varepsilon_V \times P$ E (B) $\varepsilon_V \times \log_{10} P$ .....	161
FIGURA 4.2.	TRAJETÓRIAS DE TENSÕES PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVA $Q \times P$ ( $RP = 1$ ) .....	163
FIGURA 4.3.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS $Q \times \varepsilon_S$ E (B) CURVAS $Q \times \varepsilon_S$ , PARA $\varepsilon_S$ LIMITADO A 0,1, OU 10% ( $RP = 1$ ) .....	164
FIGURA 4.4.	CURVAS $\varepsilon_V \times \varepsilon_S$ , PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS PARA GRANDES DEFORMAÇÕES E (B) CURVAS PARA $\varepsilon_S$ , LIMITADO A 0,1, OU 10% ( $RP = 1$ ) .....	165
FIGURA 4.5.	TRAJETÓRIAS DE TENSÕES PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVA $Q \times P$ ( $RP = 1,1$ ) .....	166
FIGURA 4.6.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS $Q \times \varepsilon_S$ E (B) CURVAS $Q \times \varepsilon_S$ , PARA $\varepsilon_S$ LIMITADO A 0,1, OU 10% ( $RP = 1,1$ ) .....	167
FIGURA 4.7.	CURVAS $\varepsilon_V \times \varepsilon_S$ , PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS PARA GRANDES DEFORMAÇÕES E (B) CURVAS PARA $\varepsilon_S$ , LIMITADO A 0,1, OU 10% ( $RP = 1,1$ ) .....	168

FIGURA 4.8.	TRAJETÓRIAS DE TENSÕES PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS MÚLTIPLAS (PINI = 100, 200 E 300 KPA) E (B) CURVAS MÚLTIPLAS (PINI = 350 E 400 KPA) (RP = 1,414) .....	169
FIGURA 4.9.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS Q X $\epsilon$ S (PINI = 100, 200 E 300 KPA) E (B) CURVAS Q X $\epsilon$ S (PINI = 350 E 400 KPA) (RP = 1,414) .....	170
FIGURA 4.10.	CURVAS $\epsilon$ V X $\epsilon$ S, PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS PARA PINI = 100, 200 E 300 KPA E (B) CURVAS PARA PINI = 350 E 400 KPA) (RP = 1,414) .....	171
FIGURA 4.11.	TRAJETÓRIAS DE TENSÕES PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA CONSTANTE, GRÁFICO DE CURVAS MÚLTIPLAS (RP = 1) .....	172
FIGURA 4.12.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA CONSTANTE, (A) CURVAS Q X $\epsilon$ S (PINI = 100, 200, 300 E 399,9 KPA) E (B) CURVAS Q X $\epsilon$ S PARA $\epsilon$ S MÁX = 0,1 (RP = 1,0) .....	173
FIGURA 4.13.	CURVAS $\epsilon$ V X $\epsilon$ S, PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL P CONSTANTE, (CURVAS PARA PINI = 100, 200, 300 KPA E 399,9 KPA) (RP = 1,0) .....	174
FIGURA 4.14.	TRAJETÓRIAS DE TENSÕES PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA CONSTANTE, (A) GRÁFICO DE CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVA Q X P (RP = 1,1) .....	175
FIGURA 4.15.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA CONSTANTE, CURVAS Q X $\epsilon$ S (PINI = 100, 200, 300 E 399,9 KPA) (RP = 1,1) .....	176
FIGURA 4.16.	CURVAS $\epsilon$ V X $\epsilon$ S, PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL P CONSTANTE, CURVAS PARA PINI = 100, 200, 300 E 399,9 KPA (RP = 1,1) .....	176
FIGURA 4.17.	TRAJETÓRIAS DE TENSÕES PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA CONSTANTE, (A) GRÁFICO DE CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVA Q X P (RP = RD = 1,414) .....	177
FIGURA 4.18.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA CONSTANTE, CURVAS Q X $\epsilon$ S (PINI = 100, 200, 250 E 300 KPA) (RP = 1,414) .....	178
FIGURA 4.19.	CURVAS $\epsilon$ V X $\epsilon$ S PARA PINI = 100, 200, 300 E 399,9 KPA (RP = 1,414) .....	178
FIGURA 4.20.	TRAJETÓRIAS DE TENSÕES PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA DECRESCENTE, GRÁFICO DE CURVAS MÚLTIPLAS (RP = 1) .....	179
FIGURA 4.21.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA DECRESCENTE, CURVAS Q X $\epsilon$ S (PINI = 100, 200, 300 E 400 KPA) (RP = 1,0) .....	180

FIGURA 4.22.	CURVAS $\varepsilon_V$ X $\varepsilon_S$ , PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA DECRESCENTE, (A) CURVAS PARA $P_{INI} = 100, 200, 300$ E $400$ KPA) E (B) CURVAS COM $\varepsilon_S$ LIMITADO A $0,1$ OU $10\%$ ( $RP = 1,0$ ) .....	180
FIGURA 4.23.	TRAJETÓRIAS DE TENSÕES PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA DECRESCENTE, GRÁFICO DE CURVAS MÚLTIPLAS ( $RP = 1,1$ ) .....	181
FIGURA 4.24.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA DECRESCENTE, (A) CURVAS $Q$ X $\varepsilon_S$ ( $P_{INI} = 100, 200, 300$ E $400$ KPA) E (B) CURVAS PARA $\varepsilon_S$ LIMITADO A $0,1$ OU $10\%$ ( $RP = 1,1$ ) ...	182
FIGURA 4.25.	CURVAS $\varepsilon_V$ X $\varepsilon_S$ , DE SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA DECRESCENTE, PARA $P_{INI} = 100, 200, 300$ E $400$ KPA ( $RP = 1,1$ ) .....	183
FIGURA 4.26.	TRAJETÓRIAS DE TENSÕES PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA DECRESCENTE, (A) GRÁFICO DE CURVAS MÚLTIPLAS E (B) $Q$ X $P$ ( $RP = RD = 1,414$ ) .....	183
FIGURA 4.27.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA DECRESCENTE, (A) CURVAS $Q$ X $\varepsilon_S$ , PARA $P_{INI} = 100, 200, 300$ E $400$ KPA ( $RP = 1,414$ ) .....	184
FIGURA 4.28.	CURVAS $\varepsilon_V$ X $\varepsilon_S$ , PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA DECRESCENTE, (A) CURVAS PARA $P_{INI} = 100, 200, 300$ E $400$ KPA E (B) CURVAS COM $\varepsilon_S$ LIMITADO A $0,1$ OU $10\%$ ( $RP = 1,414$ ) .....	185
FIGURA 4.29.	(A) CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVAS $Q$ X $P$ , PARA COMPRESSÃO CONFINADA ( $P_{INI} = 100, 200, 300$ KPA E $RP = 1,0$ ) .....	186
FIGURA 4.30.	CURVAS $\varepsilon_V$ X $P$ , PARA COMPRESSÃO CONFINADA ( $P_{INI} = 100, 200, 300$ KPA E $RP = 1,0$ ) .....	187
FIGURA 4.31.	CURVAS $\varepsilon_V$ X $\log_{10} P$ , PARA COMPRESSÃO CONFINADA ( $P_{INI} = 100, 200, 300$ KPA E $RP = 1,0$ ) .....	187
FIGURA 4.32.	(A) CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVAS $Q$ X $P$ , PARA COMPRESSÃO CONFINADA ( $P_{INI} = 100, 200, 300$ KPA E $RP = 1,1$ ) .....	188
FIGURA 4.33.	CURVAS $\varepsilon_V$ X $P$ , PARA COMPRESSÃO CONFINADA ( $P_{INI} = 100, 200, 300$ KPA E $RP = 1,1$ ) .....	189
FIGURA 4.34.	CURVAS $\varepsilon_V$ X $\log_{10} P$ , PARA COMPRESSÃO CONFINADA ( $P_{INI} = 100, 200, 300$ KPA E $RP = 1,1$ ) .....	189
FIGURA 4.35.	(A) CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVAS $Q$ X $P$ , PARA COMPRESSÃO CONFINADA ( $P_{INI} = 100, 200, 300$ KPA E $RP = 1,414$ ) .....	190
FIGURA 4.36.	CURVAS $\varepsilon_V$ X $P$ , PARA COMPRESSÃO CONFINADA ( $P_{INI} = 100, 200, 300$ KPA E $RP = 1,414$ ) .....	191
FIGURA 4.37.	CURVAS $\varepsilon_V$ X $\log_{10} P$ , PARA COMPRESSÃO CONFINADA ( $P_{INI} = 100, 200, 300$ KPA E $RP = 1,414$ ) .....	191

FIGURA 4.38.	(A) CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVAS Q X P, PARA COMPRESSÃO CONFINADA (PINI = 100, 200, 300 E 400 KPA, E RP = 1,0) .....	193
FIGURA 4.39.	(A) CURVAS Q X $\epsilon_s$ , CASO DE COMPRESSÃO CONFINADA (PINI = 100, 200, 300 E 400 KPA, E RP = 1,0) .....	194
FIGURA 4.40.	(A) CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVAS Q X P, PARA COMPRESSÃO CONFINADA (PINI = 100, 200, 300 E 400 KPA, E RP = 1,1 E RD = 2,400...) .....	194
FIGURA 4.41.	(A) CURVAS Q X $\epsilon_s$ , CASO DE COMPRESSÃO CONFINADA (PINI = 100, 200, 300 E 400 KPA, E RP = 1,1 E RD = 2,400...) .....	195
FIGURA 4.42.	(A) CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVAS Q X P, PARA COMPRESSÃO CONFINADA (PINI = 100, 200, 300 E 400 KPA, E RP = RD = 1,414...) .....	196
FIGURA 4.43.	(A) CURVAS Q X $\epsilon_s$ , CASO DE COMPRESSÃO CONFINADA (PINI = 100, 200, 300 E 400 KPA, E RP = RD = 1,414...) ....	197
FIGURA 4.44.	COMPORTAMENTO TENSÃO-DEFORMAÇÃO TÍPICO DE SOLOS PRÉ-ADENSADOS E DE SOLOS RESIDUAIS ESTRUTURADOS .....	198
FIGURA 4.45.	SUPERFÍCIES DE RUPTURA E DE ESCOAMENTO PARA MODELO: (A) SEM CONSIDERAÇÃO DE EFEITO DE ESTRUTURA E (B) COM CONSIDERAÇÃO DE EFEITO DE ESTRUTURA .....	199
FIGURA 4.46.	TRAJETÓRIAS DE TENSÕES PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVA Q X P (RP = 1) .....	201
FIGURA 4.47.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS Q X $\epsilon_s$ E (B) CURVAS Q X $\epsilon_s$ , PARA $\epsilon_s$ LIMITADO A 0,1, OU 10% (RP = 1) .....	202
FIGURA 4.48.	CURVAS $\epsilon_v$ X $\epsilon_s$ , PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS PARA GRANDES DEFORMAÇÕES E (B) CURVAS PARA $\epsilon_s$ , LIMITADO A 0,1, OU 10% (RP = 1) .....	203
FIGURA 4.49.	TRAJETÓRIAS DE TENSÕES PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVA Q X P (RP = 1,1) .....	204
FIGURA 4.50.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS Q X $\epsilon_s$ E (B) CURVAS Q X $\epsilon_s$ , PARA $\epsilon_s$ LIMITADO A 0,1, OU 10% (RP = 1,1) .....	205
FIGURA 4.51.	CURVAS $\epsilon_v$ X $\epsilon_s$ , PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS PARA GRANDES DEFORMAÇÕES E (B) CURVAS PARA $\epsilon_s$ , LIMITADO A 0,1, OU 10% (RP = 1,1) .....	206
FIGURA 4.52.	TRAJETÓRIAS DE TENSÕES PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVA Q X P (RP = 1,414) .....	207
FIGURA 4.53.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS Q X $\epsilon_s$ E (B) CURVAS Q X $\epsilon_s$ , PARA $\epsilon_s$ LIMITADO A 0,1, OU 10% (RP = 1,414) .....	208

FIGURA 4.54.	CURVAS $\varepsilon_V$ X $\varepsilon_S$ , PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC, (A) CURVAS PARA GRANDES DEFORMAÇÕES E (B) CURVAS PARA $\varepsilon_S$ LIMITADO A 0,1, OU 10% (RP = 1,414) .....	209
FIGURA 4.55.	TRAJETÓRIAS DE TENSÕES PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA CONSTANTE, (A) GRÁFICO DE CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVAS Q X P (RP = 1,0) .....	210
FIGURA 4.56.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL P CONSTANTE: (A) CURVAS Q X $\varepsilon_S$ E (B) CURVAS Q X $\varepsilon_S$ , PARA $\varepsilon_S$ LIMITADO A 0,1, OU 10% (RP = 1,0) .....	211
FIGURA 4.57.	CURVAS $\varepsilon_V$ X $\varepsilon_S$ , PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL P CONSTANTE, CURVAS PARA GRANDES DEFORMAÇÕES (RP = 1,0) .....	212
FIGURA 4.58.	TRAJETÓRIAS DE TENSÕES PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL P CONSTANTE, (A) GRÁFICO DE CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVAS Q X P (RP = 1,1) .....	213
FIGURA 4.59.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL P CONSTANTE: (A) CURVAS Q X $\varepsilon_S$ E (B) CURVAS Q X $\varepsilon_S$ , PARA $\varepsilon_S$ LIMITADO A 0,1, OU 10% (RP = 1,1) .....	214
FIGURA 4.60.	CURVAS $\varepsilon_V$ X $\varepsilon_S$ , PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL P CONSTANTE, CURVAS PARA GRANDES DEFORMAÇÕES (RP = 1,1) .....	215
FIGURA 4.61.	TRAJETÓRIAS DE TENSÕES PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL P CONSTANTE, (A) GRÁFICO DE CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVAS Q X P (RP = 1,414) .....	215
FIGURA 4.62.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL P CONSTANTE: (A) CURVAS Q X $\varepsilon_S$ E (B) CURVAS Q X $\varepsilon_S$ , PARA $\varepsilon_S$ LIMITADO A 0,05, OU 5% (RP = 1,414) .....	216
FIGURA 4.63.	CURVAS $\varepsilon_V$ X $\varepsilon_S$ , PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL P CONSTANTE, CURVAS PARA GRANDES DEFORMAÇÕES (RP = 1,414) .....	217
FIGURA 4.64.	TRAJETÓRIAS DE TENSÕES PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA DECRESCENTE, GRÁFICO DE CURVAS MÚLTIPLAS (RP = 1,0) .....	218
FIGURA 4.65.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA DECRESCENTE: (A) CURVAS Q X $\varepsilon_S$ E (B) CURVAS Q X $\varepsilon_S$ , PARA $\varepsilon_S$ LIMITADO A 0,1, OU 10% (RP = 1,0) .....	219
FIGURA 4.66.	CURVAS $\varepsilon_V$ X $\varepsilon_S$ , PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA DECRESCENTE: (A) CURVAS PARA GRANDES DEFORMAÇÕES E (B) CURVAS PARA $\varepsilon_S$ LIMITADO A 0,05, OU 5% (RP = 1,0) .....	220
FIGURA 4.67.	TRAJETÓRIAS DE TENSÕES PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA DECRESCENTE, GRÁFICO DE CURVAS MÚLTIPLAS (RP = 1,1) .....	221

FIGURA 4.68.	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA DECRESCENTE: (A) CURVAS $Q \times \varepsilon_S$ E (B) CURVAS $Q \times \varepsilon_S$ , PARA $\varepsilon_S$ LIMITADO A 0,1, OU 10% ( $RP = 1,1$ ) .....	222
FIGURA 4.69.	CURVAS $\varepsilon_V \times \varepsilon_S$ , PARA SIMULAÇÃO DE ENSAIOS SOB TENSÃO NORMAL MÉDIA DECRESCENTE: (A) CURVAS PARA GRANDES DEFORMAÇÕES E (B) CURVAS PARA $\varepsilon_S$ LIMITADO A 0,05, OU 5% ( $RP = 1,1$ ) .....	223
FIGURA 4.70.	(A) CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVAS $Q \times P$ , PARA COMPRESSÃO CONFINADA ( $P_{INI} = 100, 200, 300$ E $400$ KPA, E $RP = 1,0$ ) .....	225
FIGURA 4.71.	(A) CURVAS $Q \times \varepsilon_S$ , CASO DE COMPRESSÃO CONFINADA ( $P_{INI} = 100, 200, 300$ E $400$ KPA, E $RP = 1,0$ ) .....	226
FIGURA 4.72.	(A) CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVAS $Q \times P$ , PARA COMPRESSÃO CONFINADA ( $P_{INI} = 100, 200, 300$ E $400$ KPA, E $RP = 1,1$ ) .....	226
FIGURA 4.73.	(A) CURVAS $Q \times \varepsilon_S$ , CASO DE COMPRESSÃO CONFINADA ( $P_{INI} = 100, 200, 300$ E $400$ KPA, E $RP = 1,1$ ) .....	227
FIGURA 4.74.	(A) CURVAS MÚLTIPLAS E (B) CURVAS $Q \times P$ , PARA COMPRESSÃO CONFINADA ( $P_{INI} = 100, 200, 300$ E $400$ KPA, E $RP = 1,414$ ) .....	228
FIGURA 4.75.	(A) CURVAS $Q \times \varepsilon_S$ , CASO DE COMPRESSÃO CONFINADA ( $P_{INI} = 100, 200, 300$ E $400$ KPA, E $RP = 1,1$ ) .....	229
FIGURA 4.76.	(A) CURVAS $Q \times \varepsilon_A$ , CASO DE COMPRESSÃO CTC ( $P_{INI} = 25, 40, 70$ E $150$ KPA), (B) CURVAS EPS-A $\times$ EPS-V .....	231
FIGURA 4.77.	(A) CURVAS $Q \times \varepsilon_A$ , CASO DE COMPRESSÃO RTE ( $P_{INI} = 25, 40, 70$ E $150$ KPA), E CTE ( $P_{INI} = 20$ KPA), (B) CURVAS EPS-V $\times$ EPS-A .....	232
FIGURA 4.78.	CURVAS DE CONSOLIDAÇÃO ISOTRÓPICA E $X \log_{10} P$ .....	233
FIGURA 4.79.	CURVAS DE CONSOLIDAÇÃO ISOTRÓPICA $\varepsilon_V \times \log_{10} P$ .....	234
FIGURA 4.80.	CURVAS DE CONSOLIDAÇÃO ISOTRÓPICA $\varepsilon_V \times \ln P$ ..	235
FIGURA 4.81.	TRAJETÓRIAS DE TENSÃO DOS ENSAIOS CTC, RTE E CTE .....	237
FIGURA 4.82.	FUNÇÃO DE ENDURECIMENTO/AMOLECIMENTO .....	238
FIGURA 4.83.	ENSAIOS CTC, (A) CURVAS $Q \times EPS-S$ , (B) CURVAS EPS-V $\times$ EPS-S .....	239
FIGURA 4.84.	ENSAIOS RTE E CTE, (A) CURVAS $Q \times EPS-S$ , (B) CURVAS $Q \times EPS-S$ DE MODELAGEM RTE E (C) CURVAS RTE DE ENSAIO E DE MODELAGEM .....	240
FIGURA 4.85.	ENSAIOS RTE: (A) CURVAS EPS-V $\times$ EPS-S DE MODELAGEM E (B) CURVAS EPS-V $\times$ EPS-S DE MODELAGEM E DE ENSAIO .....	242
FIGURA 4.86.	ENSAIOS CTE, (A) CURVAS $Q \times EPS-S$ DE ENSAIO E DE MODELAGEM E (B) CURVAS EPS-V $\times$ EPS-S DE ENSAIO E DE MODELAGEM .....	243
FIGURA 4.87.	ENSAIOS CTC E SIMULAÇÃO POR MODELO DE LADE-KIM (A) CURVAS $\sigma_D \times \varepsilon_1$ E (B) CURVAS $\varepsilon_V \times \varepsilon_1$ (IBÁÑEZ, 2003) .....	245



FIGURA 4.88:	CURVAS $V/V_0 - \log(P')$ DE ENSAIOS HC, PARA AS CONDIÇÕES DE SATURAÇÃO E NÃO SATURAÇÃO. ( $V$ = VOLUME ESPECÍFICO). (MACHADO, 1998) .....	246
FIGURA 4.89:	ENSAIO CTC NA CONDIÇÃO SATURADA PARA TENSÕES DE CONFINAMENTO DE 50, 100 E 200 KPA: A) CURVAS $\sigma_D - \varepsilon_1$ ; B) CURVAS $\varepsilon_V - \varepsilon_1$ .(MACHADO, 1998) .....	246
FIGURA 4.90:	ENSAIOS CTC-EMS PARA $S = 40$ KPA E TENSÕES DE CONFINAMENTO DE 50, 100 E 200 KPA: A) CURVAS $\sigma_D - \varepsilon_1$ ; B) CURVAS $\varepsilon_V - \varepsilon_1$ .(MACHADO, 1998) .....	247
FIGURA 4.91:	ENSAIOS CTC-EMS PARA $S = 80$ KPA E TENSÕES DE CONFINAMENTO DE 50, 100 E 200 KPA: A) CURVAS $\sigma_D - \varepsilon_1$ ; B) CURVAS $\varepsilon_V - \varepsilon_1$ .(MACHADO, 1998) .....	247
FIGURA 4.92:	ENSAIOS CTC-EMS PARA $S = 120$ KPA E TENSÕES DE CONFINAMENTO DE 50, 100 E 200 KPA: A) CURVAS $\sigma_D - \varepsilon_1$ ; B) CURVAS $\varepsilon_V - \varepsilon_1$ .(MACHADO, 1998) .....	248
FIGURA 4.93:	ENSAIOS CTC-EMS PARA $S = 120$ KPA E TENSÕES DE CONFINAMENTO DE 50, 100 E 200 KPA: A) CURVAS $\sigma_D - \varepsilon_1$ ; B) CURVAS $\varepsilon_V - \varepsilon_1$ .(MACHADO, 1998) .....	248
FIGURA 4.94:	TRAJETÓRIAS DE TENSÃO DOS ENSAIOS CTC, PARA ARENITO RESIDUAL SATURADO .....	250
FIGURA 4.95:	ENSAIOS CTC, (A) CURVAS $Q \times EPS-S$ , (B) E (C) CURVAS $EPS-V \times EPS-S$ .....	252
FIGURA 4.96:	ENSAIOS CTC, (A) CURVAS $\sigma_D \times \varepsilon_1$ , (B) TRAJETÓRIAS DE TENSÃO E (C) CURVAS $\varepsilon_V \times \varepsilon_1$ (IBÁÑEZ, 2003) .....	254
FIGURA 4.97:	TRAJETÓRIAS DE TENSÃO DOS ENSAIOS CTC-EMS, PARA ARENITO RESIDUAL NÃO-SATURADO, SOB SUÇÃO $S = 80$ KPA .....	256
FIGURA 4.98:	ADAPTAÇÃO DE MODELO PARA ASSEGURAR CONDIÇÃO DE ESTADO CRÍTICO .....	258
FIGURA 4.99:	ENSAIOS CTC, (A) CURVAS $Q \times EPS-S$ , (B) E (C) CURVAS $EPS-V \times EPS-S$ .....	259
FIGURA 4.100:	ENSAIOS CTC, (A) CURVAS $\sigma_D \times \varepsilon_1$ , (B) E (C) CURVAS $\varepsilon_V \times \varepsilon_1$ , PARA MATERIAL PARCIALMENTE SATURADO E SUÇÃO $S = 80$ KPA (IBÁÑEZ, 2003) .....	261
FIGURA 4.101:	ENSAIOS DE COMPRESSÃO ISOTRÓPICA - CURVAS $(1+E) \times \log P'$ DE CARREGAMENTO (A) INCREMENTAL E (B) CONTÍNUO (CUI E DELAGE, 1996, APUD IBÁÑEZ, 2003) .....	262
FIGURA 4.102:	ENSAIOS CTC PARA $\sigma_3 = 50$ KPA E SUÇÕES DE 200, 400, 800 E 1500 KPA: (A) $\sigma_D \times \varepsilon_1$ E (B) $\varepsilon_V \times \varepsilon_1$ E PARA $\sigma_3 = 100$ KPA E MESMAS SUÇÕES: (C) $\sigma_D \times \varepsilon_1$ E (D) $\varepsilon_V \times \varepsilon_1$ (CUI E DELAGE, 1996, APUD IBÁÑEZ, 2003) .....	262
FIGURA 4.103:	ENSAIOS CTC PARA $\sigma_3 = 200$ KPA E SUÇÕES DE 200, 400, 800 E 1500 KPA: (A) $\sigma_D \times \varepsilon_1$ E (B) $\varepsilon_V \times \varepsilon_1$ , E PARA $\sigma_3 = 400$ KPA E MESMAS SUÇÕES: (C) $\sigma_D \times \varepsilon_1$ E (D) $\varepsilon_V \times \varepsilon_1$ (CUI E DELAGE, 1996, APUD IBÁÑEZ, 2003) .....	263
FIGURA 4.104:	ENSAIOS TRIAXIAIS DE CARREGAMENTO PROPORCIONAL (PL), CONSIDERANDO $Q/P = 0,5$ E SUÇÕES DE 200 E 1500 KPA: (A) $\sigma_D \times \varepsilon_1$ E (B) $\varepsilon_V \times \varepsilon_1$ (CUI E DELAGE, 1996, APUD IBÁÑEZ, 2003) .....	264

FIGURA 4.105.	ENSAIOS DE COMPRESSÃO ISOTRÓPICA - CURVAS $\varepsilon_V$ X LOG P'DE CARREGAMENTO INCREMENTAL ( ADAPTADO DE IBAÑEZ, 2003, APUD CUI E BELAGE, 1996) .....	265
FIGURA 4.106.	TRAJETÓRIAS DE TENSÃO DOS ENSAIOS CTC E SUPERFÍCIES DE RUPTURA, PARA SILTE EÓLICO COMPACTADO (ADAPTADO DE IBAÑEZ, 2003, APUD CUI E BELAGE, 1996) .....	266
FIGURA 4.107.	ENSAIOS CTC, (A) CURVAS Q X EPS-S, E (B) CURVAS EPS-V X EPS-S .....	268
FIGURA 4.108.	SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC COM $\sigma_C = 200$ KPA E SUÇÕES S = 400 E 800 KPA, PELOS MODELOS BBM (CUI E DELAGE, 1996) E HISS-DSC (IBAÑEZ, 2003): (A) CURVAS $\sigma_D$ X $\varepsilon_1$ , (B) CURVAS $\varepsilon_V$ X $\varepsilon_1$ (IBAÑEZ, 2003) .....	269
FIGURA 4.109.	ENSAIOS CTC, (A) CURVAS Q X EPS-S, E (B) CURVAS EPS-V X EPS-S, PARA RP = 1,0; 1,05 E 1,1 .....	270
FIGURA 4.110.	SIMULAÇÃO DE ENSAIOS CTC COM $\sigma_C = 200$ KPA E SUÇÕES S = 400 E 800 KPA, PELOS MODELOS BBM (CUI E DELAGE, 1996), HISS-DSC (IBAÑEZ, 2003) E MCC ESTRUTURADO COM DANO ACOPLADO: (A) CURVAS $\sigma_D$ X $\varepsilon_1$ (OU Q X $\varepsilon_1$ ) E (B) CURVAS $\varepsilon_V$ X $\varepsilon_1$ (ADAPTADO DE IBAÑEZ, 2003) .....	271
FIGURA 5.1.	COMPORTAMENTO TÍPICO DE SOLOS CIMENTADOS EM ENSAIOS CTC DRENADOS (SOUZA PINTO, 2000) .....	274
FIGURA 5.2.	ASSIMETRIA DAS SUPERFÍCIES DE ESCOAMENTO E DE RUPTURA (ADAPTADO DE NEWSON, 2008) .....	275
FIGURA 5.3.	VARIAÇÃO DA TENSÃO DE ESCOAMENTO PELA GEOMETRIA DA SUPERFÍCIE ELÍPTICA E PELA FUNÇÃO DE ESCOAMENTO E TRAJETÓRIA DE TENSÃO CTC: (A) PARA SUÇÃO DE 400 KPA E RP = 1,0 E (B) PARA SUÇÃO DE 800 KPA E RP = 1,0 .....	277
FIGURA 6.1.	RELAÇÃO ENTRE SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO E SUPERFÍCIE DE RUPTURA .....	281
FIGURA 6.2.	CONSIDERAÇÃO DA ASSIMETRIA DA SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO E DA SUPERFÍCIE DE RUPTURA .....	283
FIGURA A.1.	CICLO FECHADO DE QUATRO TRANSFORMAÇÕES DE LEGENDRE .....	295
FIGURA A.2.1.	COMPORTAMENTO TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE COMPRESSÃO DE MODELO MCC HIPERELÁSTICO COM DANO (MODIFICADO DE EINAV ET AL, 2007) .....	299
FIGURA A.2.2.	COMPRESSÃO NÃO-DRENADA – GRÁFICO Q X $\varepsilon_S$ .....	301
FIGURA A.2.3.	COMPRESSÃO NÃO-DRENADA – GRÁFICO Q X P .....	301
FIGURA A.2.4.	COMPRESSÃO NÃO-DRENADA – GRÁFICO Q X P E PY X P .....	302

## LISTA DE SÍMBOLOS

$d$	Função de dissipação
$f$	Energia livre específica de Helmholtz
$g$	Energia livre específica de Gibbs
$G$	Módulo cisalhante
$J_1$	Primeiro invariante do tensor de tensões baseado no traço
$J_2$	Segundo invariante do tensor de tensões baseado no traço
$J_{2D}$	Segundo invariante do tensor desviador de tensões
$k^*$	Coeficiente de recompressão de compressão hidrostática
$M$	Parâmetro de resistência do modelo MCC
$p$	Tensão hidrostática
$p_{y0}$	Tensão de pré-adensamento hidrostática
$q$	Tensão desviadora
$s$	Entropia
$s$	Sucção
$S_{ij}$	Tensor de tensões de desvio
$t$	Tempo
$\Psi$	Função energia livre
$V$	Volume
$W$	Trabalho
$\alpha_{ij}$	Tensor de variáveis internas
$\beta$	Coeficiente relacionado com o ângulo de dilatância do solo
$\delta_{rem}$	Fração da pressão de pré-adensamento remanescente
$\varepsilon_v$	Deformação volumétrica específica
$\varepsilon_s$	Deformação cisalhante específica, ou deformação de desvio do MCC
$\varepsilon_{ij}$	Tensor de deformações
$\varepsilon^e_{ij}$	Tensor de deformações elásticas
$\varepsilon^p_{ij}$	Tensor de deformações plásticas
$\gamma^p$	Segundo invariante do tensor de deformações plásticas de distorção
$\gamma_{ij}$	Tensor de deformações de desvio
$\lambda$	Multiplicador plástico
$\lambda^*$	Coeficiente de compressão virgem de compressão hidrostática
$\sigma_{ij}$	Tensor de tensões verdadeiras
$v^p$	Deformação volumétrica específica plástica
$\tilde{\chi}_i$	Tensor de tensões generalizadas
$\tilde{\tilde{\chi}}_i$	Tensor de tensões generalizadas de dissipação.

## **AGRADECIMENTOS**

A DEUS, por me permitir chegar até aqui.

A todos os professores e funcionários do CESEC, pelo apoio ao longo do curso e por este convívio respeitoso e fraterno.

Aos colegas de curso, por compartilhar as dificuldades e pela ajuda ao longo do caminho.

À UTFPR, e aos colegas do Dep. De Construção Civil, que me permitiram ter o tempo necessário à realização deste curso.

À minha família, fonte sempre renovada de motivação e de apoio.

Um agradecimento especial à professora Mildred Ballin Hecke e ao professor Celso Romanel, pela orientação firme e clara neste trabalho.

E, de modo particular, registro aqui o meu agradecimento ao professor Ney Augusto Nascimento, pelo incentivo e apoio para iniciar este curso e pelo companheirismo ao longo destes anos.

## RESUMO

A presente tese apresenta implementação de modelo constitutivo hiperplástico com dano acoplado, aplicado à modelagem do comportamento tensão-deformação-resistência de solos residuais e solos estruturados. O algoritmo desenvolvido foi elaborado sobre modelo apresentado por Einav et al (2007), que utilizaram-no para representar comportamento não-drenado de argilas. Neste trabalho o modelo foi estendido para simular comportamento de solos residuais e solos estruturados, com inclusão de efeito de saturação parcial. O trabalho apresenta simulação de trajetórias de ensaios habituais de solos, tanto em trajetórias de tensões como de deformações. Além da simulação teórica foi feita aplicação do modelo a casos reais de ensaios apresentados na literatura, com objetivo de comparação com a observação experimental e com o desempenho de outros modelos utilizados para a modelagem de solos estruturados. A incorporação de efeito de dano confere flexibilidade ao modelo para a representação de efeitos de destruição de estrutura do solo e também de perda de rigidez com a deformação e permite variação contínua entre modelos hiperplásticos puros e modelos hiperelásticos puros

Palavras chave: hiperplasticidade, hiperelasticidade, dano, solo estruturado.

## **ABSTRACT**

This thesis presents implementation of a hiperplastic constitutive model coupled with damage, applied to the modeling of residual and structured soil stress-strain-strength behaviour. The algorithm was developed on model presented by Einav et al (2007), who used it to represent behaviour of non-drained clay. In this work the model was extended to simulate behaviour of residual and structured soils, including effect of partial saturation. This text presents simulation of standard soil testing in both stress paths and strain paths. In addition to the theoretical simulation, model application was made to actual testing data found in literature, in order to compare with experimental observation and with other models used for modeling structured soils. Incorporation of damage effect gives flexibility to model to represent soil structure destruction and loss of rigidity with strain and allows continuous variation between hiperplastics pure models pure and hiperelastics pure models.

Key words: hiperplasticity, hiperelasticity, damage, structured soil.

## 1. INTRODUÇÃO

Obras de engenharia geotécnica envolvem sempre dois aspectos: estabilidade e avaliação de deformações. Em parte destas obras a estabilidade pode ser a questão principal envolvida, como é caso dos problemas de capacidade de carga de fundações diretas e profundas. Em outras o problema de avaliação de deformações pode ser o aspecto crucial, como no estudo de deformações de núcleos de barragens zonadas. E ainda encontram-se problemas em que tanto a avaliação da estabilidade como das deformações são importantes na previsão do desempenho da obra. Recaem nesta última categoria os problemas de interação solo-estrutura, aterros sobre solo mole, entre outros.

O ideal no trato de problemas geotécnicos seria utilizar modelo de representação do comportamento do solo, ou rocha, tão aproximado da realidade quanto possível, obtendo-se previsão de campos de tensões e de deformações, realistas e confiáveis. Tal abordagem direta não corresponde à história de evolução da Geotecnia. Várias soluções utilizadas no cotidiano da engenharia geotécnica foram conseguidas com a aplicação de modelos rústicos de comportamento tensão-deformação de solos, evitando maiores complicações de cálculo. Exemplo típico deste procedimento são os métodos de estabilidade de taludes por equilíbrio limite, nos quais o solo é considerado material rígido-plástico. A brilhante solução de Coulomb, para a determinação de empuxos envolve apenas estática, tendo precedido o estabelecimento do conceito de tensão, por um século. Está implícita, entretanto, na solução de Coulomb, comportamento de material rígido-plástico. Em problemas de cálculo de recalques de fundação é comum assumir-se hipótese de material elástico e linear, utilizando-se as soluções da Teoria da Elasticidade para a previsão de deformações. Em problemas de cálculo de recalques por adensamento, o solo é representado como material viscoso, em que o campo de deformações é função do campo de tensões e do tempo.

O acervo de soluções da engenharia foi sendo obtido com a consideração de comportamento tensão-deformação que representasse os aspectos mais importantes para o problema em vista, e permitisse equacionamento suficientemente complicado para considerar de forma objetiva as relações entre variáveis envolvidas no problema, e suficientemente simples para a utilização na prática da engenharia.

A evolução dos computadores e dos métodos de cálculo vem permitindo trabalhar com modelos mais realistas de comportamento de solos. Se, por um lado, a obtenção de um modelo universal de comportamento de solo, capaz de representar todos os aspectos, que

adiante estão relacionados (itens 2.3 a 2.6), é apenas uma aspiração. Por outro lado, o desenvolvimento de modelos constitutivos elasto-plásticos já é capaz de atender uma grande faixa de problemas de engenharia geotécnica. Restam, entretanto, para a aplicação no dia-a-dia da engenharia, a nosso ver, duas questões importantes. A primeira reside no fato de que modelos mais versáteis exigem maior número de parâmetros para calibração o que implica em maior número de ensaios, de laboratório ou de campo. E, a segunda questão reside no fato que a boa aplicação do modelo exige conhecimento do engenheiro que o utiliza.

Neste segundo aspecto é que julgamos de valor a proposta de utilização de modelos com fundamento termodinâmico, por resultarem de processo sistemático de desenvolvimento de modelos constitutivos.

## **1.1. Objetivos**

### **Objetivo geral:**

O presente trabalho apresenta o desenvolvimento de algoritmo computacional para modelo constitutivo hiperplástico com dano acoplado, aplicado à modelagem de comportamento de solos estruturados, em sentido amplo, e de solos residuais, em sentido estrito, com consideração de efeitos de estrutura e de saturação parcial.

### **Objetivos específicos:**

- a) Aplicar a teoria da termodinâmica com variáveis internas à modelagem do comportamento mecânico dos solos;
- b) Apresentar a conceituação de alguns modelos constitutivos para solos, existentes na literatura, para representar efeito de perda de estrutura e de resistência, e de saturação parcial;
- c) Implementar algoritmo adequado à resolução do problema de programação matemática resultante da formulação constitutiva para solo residual;
- d) Realizar simulações com o programa desenvolvido e comparar os resultados obtidos com resultados de ensaios com solos residuais, disponíveis na literatura.
- e) Elaboração de texto, com os aspectos teóricos importantes do modelo constitutivo utilizado, compreensível para graduados em engenharia civil.



## **1.2. Estrutura do Trabalho**

A estrutura do presente trabalho compreende seis capítulos especificados a seguir.

No Capítulo 2 é apresentada uma breve revisão bibliográfica do desenvolvimento da teoria da plasticidade, enfatizando-se aspectos relativos aos trabalhos realizados na área da modelagem constitutiva de solos, e particularmente sobre modelos constitutivos hiperplásticos e aplicações a solos estruturados e parcialmente saturados.

É apresentada descrição sucinta da formulação das condições de equilíbrio, ou movimento, de um meio contínuo, e do papel das relações constitutivas, para o equacionamento do problema.

Na sequência é apresentada descrição das propriedades mecânicas dos solos e a formulação teórica de alguns modelos avançados empregáveis para solos estruturados: modelo Cam Clay Estruturado, Teoria do Estado Perturbado e Modelo Barcelona.

No final do capítulo 2 é apresentado processo de desenvolvimento de modelos elasto-plásticos com fundamento em hiperplasticidade e com possibilidade de incorporação de dano associado. Adaptação de modelo apresentado na literatura a caso de solo residual, estruturado e parcialmente saturado, é também apresentada. Conveniência de uso de modelo Cam-Clay Modificado de hiperplasticidade com dano acoplado é analisada.

No Capítulo 3 é exposto o algoritmo para o modelo constitutivo adotado.

No Capítulo 4, resultados das simulações, sobre dados de ensaios com solos residuais existentes na literatura, são apresentados.

No Capítulo 5 é feita análise do desempenho do modelo, e do algoritmo proposto.

No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e sugestões para novos trabalhos.

Nos apêndices estão apresentados: exposição da transformada de Legendre e fluxogramas do algoritmo desenvolvido neste trabalho.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo tratado à frente tem como objeto o comportamento mecânico de solos residuais, independente do tempo, isto é, com exclusão de efeitos de viscosidade e de velocidade de aplicação de carregamento. Modelos constitutivos capazes de representar tal comportamento estão incluídos entre os modelos elasto-plásticos.

Embora solos sejam materiais que apresentem não-linearidade física e, em geral, apresentem deformações plásticas desde o início do carregamento, para casos em que a aplicação de carga ocorre de forma monotônica, o uso até mesmo de modelos elásticos não-lineares pode conduzir a soluções razoáveis, permitindo resolver até problemas de capacidade de carga. Entre estes modelos elásticos estão os de Cauchy, os modelos hiperelásticos de Green, os hipoeelásticos e os modelos quase-lineares.

Problemas que envolvem: descarregamento, solicitações dinâmicas, materiais que apresentam amolecimento, ou ainda, efeitos de perda de estrutura, estão além das possibilidades de representação dos modelos elásticos.

Uma primeira aplicação importante da Teoria da Plasticidade, a problemas de fundações, foi a formulação de Prandtl, para capacidade de carga de fundações superficiais corridas. Esta solução foi uma extensão da Teoria da Plasticidade aplicada à conformação de metais. Segundo Desai e Siriwardane (1984), Tresca pode ser considerado como o primeiro a realizar um estudo científico de plasticidade de metais. Tresca apresentou a formulação de seu famoso critério de escoamento quando publicou seus resultados sobre puncionamento e extrusão de metais em 1864.

A aplicação da teoria clássica da Plasticidade envolve dois aspectos principais: (a) o critério de escoamento, e (b) o comportamento pós-escoamento (Desai e Siriwardane, 1984, p. 208). Após sofrer escoamento o material pode se comportar como material elasto-plástico perfeito, ou pode sofrer endurecimento, ou pode ainda sofrer amolecimento.

Na década de 1950 importantes avanços foram feitos na teoria da plasticidade aplicada a metais, com o desenvolvimento de: (a) teoremas fundamentais de análise limite de plasticidade perfeita, por Drucker e outros, (b) postulados de Drucker para materiais estáveis ou definição de *work-hardening materials*, e (c) formulação da regra da normalidade ou da regra de fluxo associada. Estes desenvolvimentos conduziram ao estabelecimento de uma base rigorosa para a Teoria da Plasticidade Clássica (Chen e Balady, 1985).

As aplicações iniciais da teoria clássica da Plasticidade foram quase exclusivamente para materiais sólidos perfeitamente plásticos, tais como aço doce e outros metais.

Pode-se dizer que a evolução das formulações aplicadas à Geotecnia, baseadas na Teoria da Plasticidade, ocorreu em dois sentidos. Um primeiro, em relação à melhor adaptação de critérios de escoamento a dados experimentais. Isto gerou formulações baseadas no critério de Tresca, de von Mises, de Drucker-Prager e de Mohr-Coulomb, entre outros. E em outro sentido, em relação ao cálculo dos incrementos de deformação plástica. A constatação de que solos, diferentemente dos metais, apresentam endurecimento (e amolecimento) e deformações volumétricas plásticas, e de que incrementos de deformação plástica não obedecem à regra da normalidade, levou ao desenvolvimento de modelos de plasticidade não-associada e de modelos com *cap*, tais como os modelos Cam-Clay e Cam-Clay Modificado. Exceção, em que se observa atendimento à regra da normalidade, é o caso de argilas normalmente adensadas carregadas sob condições não-drenadas.

Modelos constitutivos, baseados nas superfícies de escoamento de Drucker-Prager ou de Mohr-Coulomb, para definir o limite de elasticidade e o início de deformações plásticas irreversíveis, mostraram previsão excessiva de dilatação, em consequência do uso da regra da normalidade. Este fato conduziu ao desenvolvimento de uma teoria da plasticidade não-associada, na qual as superfícies de escoamento e de potenciais plásticos são distintas. Esta modificação, entretanto, eliminou a validade de uso dos teoremas limites para cargas de colapso e criou dúvidas sobre a unicidade das soluções (Chen e Balady, 1985).

Desai e Siriwardane (1984) apresentam uma ordenação de modelos constitutivos aplicáveis a materiais de engenharia, com ênfase em materiais geológicos. Neste trabalho estão descritos modelos elásticos e modelos elasto-plásticos, que abrangem até os modelos Cam-Clay e Cam-Clay Modificado.

Trabalho de Ibañez (2003) contém levantamento abrangente de modelos constitutivos aplicados a solos, apresentando, além dos modelos descritos por Desai e Siriwardane (1984), modelos elasto-plásticos avançados: de Lade-Kim, Hierárquico (HiSS), de Matsuoka-Nakai, com Superfícies Aninhadas e de Bolha, entre outros. O trabalho Apresenta ainda Teoria do Estado Perturbado e Teoria da Hipoplasticidade. Ibañez descreve também modelos aplicáveis a solos não-saturados: modelo quase saturado, teoria do estado perturbado, modelo Barcelona e modelos aplicáveis a solos estruturados: Cam-Clay Estruturado e Teoria do Estado Perturbado.

A derivação, ou o enquadramento, de modelos constitutivos no contexto da Termodinâmica, confere consistência aos mesmos. Relações constitutivas estabelecidas com base nas leis da Termodinâmica reproduzem comportamentos que podem ter existência real.

Trabalho de Collins e Houlsby (1997) apresenta formulação termodinâmica, em que é demonstrada capacidade de modelagem elasto-plástica rigorosa de materiais com atrito e regra de fluxo não-associada. A formulação se baseia na possibilidade de derivar as relações constitutivas a partir de hipóteses sobre a forma de uma função potencial e de uma função de dissipação de energia. A função potencial de energia utilizada como referência foi a de Helmholtz, e emprego de potencial de energia de Gibbs foi apresentado como alternativa. Neste trabalho é também apresentada decomposição dos incrementos de deformação, em parcelas "reversíveis" e "irreversíveis", para o caso de materiais acoplados.

Houlsby (2002) mostra o uso de técnicas matemáticas, como o uso da Transformada de Legendre e de análise convexa, na formulação de modelos de hiperplasticidade. Segundo Houlsby, "a hiperplasticidade inclui todas as condições suficientes para atender as leis da Termodinâmica, mas algumas condições não são estritamente necessárias".

Trabalho de Einav e outros (2007), abordando modelo de plasticidade com dano acoplado, mostra que modelos, variando entre modelos hiperplásticos e modelos hiperelásticos com dano associado, podem ser derivados a partir de duas funções potenciais, sem a necessidade de nenhuma hipótese adicional. A inclusão do efeito de dano, a um modelo Cam-Clay Modificado, é feita por meio de duas variáveis internas escalares de dano, uma ligada ao comportamento de deformação volumétrica e outra ao comportamento de deformação por cisalhamento.

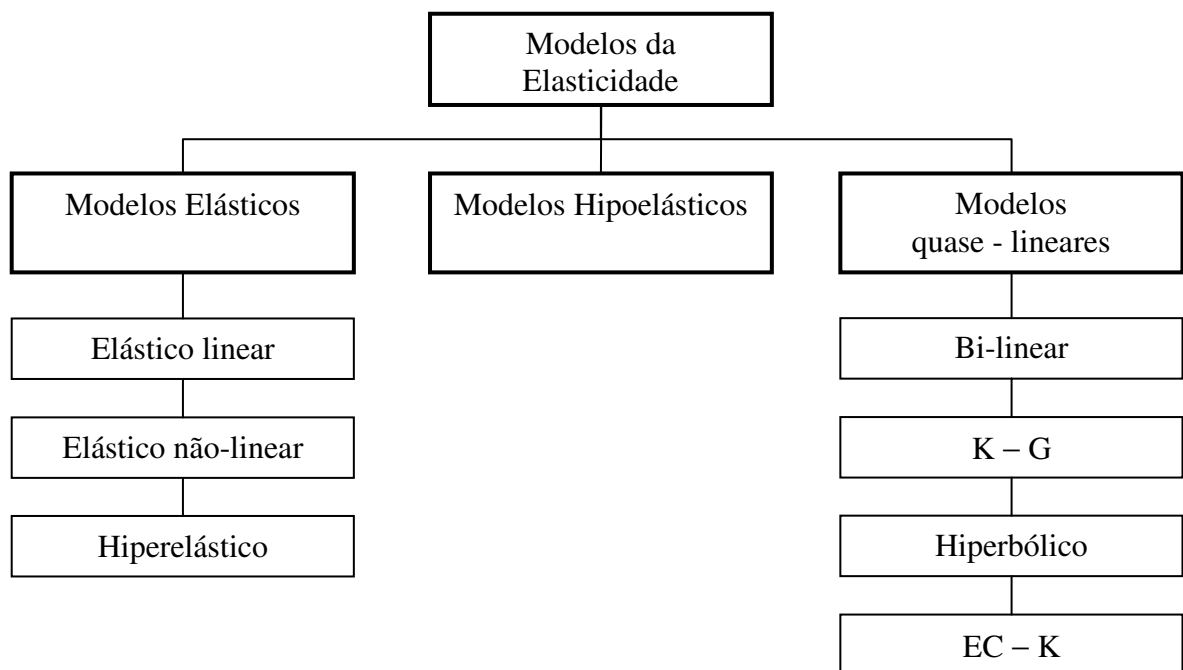
Estudo relativo a solos estruturados é apresentado por Liu e Carter (2002), onde mostram novo modelo designado como Modelo Cam-Clay Estruturado, formulado com a inclusão da influência da estrutura do solo. O modelo tem característica hierárquica, permitindo redução ao modelo Cam-Clay Modificado, se o solo não tem estrutura, ou se esta é removida pelo carregamento.

Neste trabalho aborda-se adaptação de formulação de hiperplasticidade a caso de solos residuais parcialmente saturados. Verifica-se a possibilidade de representação de comportamento tensão-deformação-resistência por meio de modelo estruturado, com efeito de dano acoplado. Adiante estão reproduzidos esquemas apresentados por Ibañez (2003), que permitem fácil visualização das famílias de modelos empregados em Geotecnia e o enquadramento do algoritmo a ser utilizado no presente trabalho.

## ***Modelos elásticos***

A Figura 2.1 ilustra esquema da família de modelos derivados da Teoria da Elasticidade, com diferentes enfoques para representar comportamento tensão-deformação, conservando, entretanto, característica de que estado de tensão e de deformação tem relação bi-unívoca.

**Figura 2.1. Família de modelos derivados da Teoria da Elasticidade (Ibañez, 2003).**

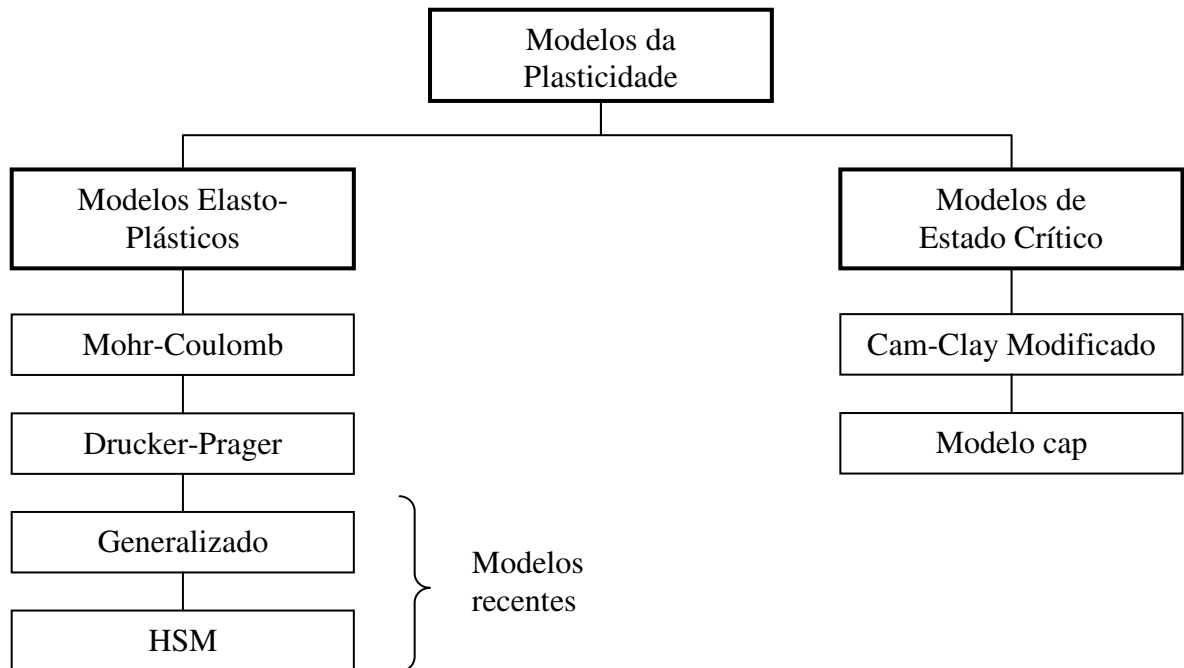


## ***Modelos elasto-plásticos***

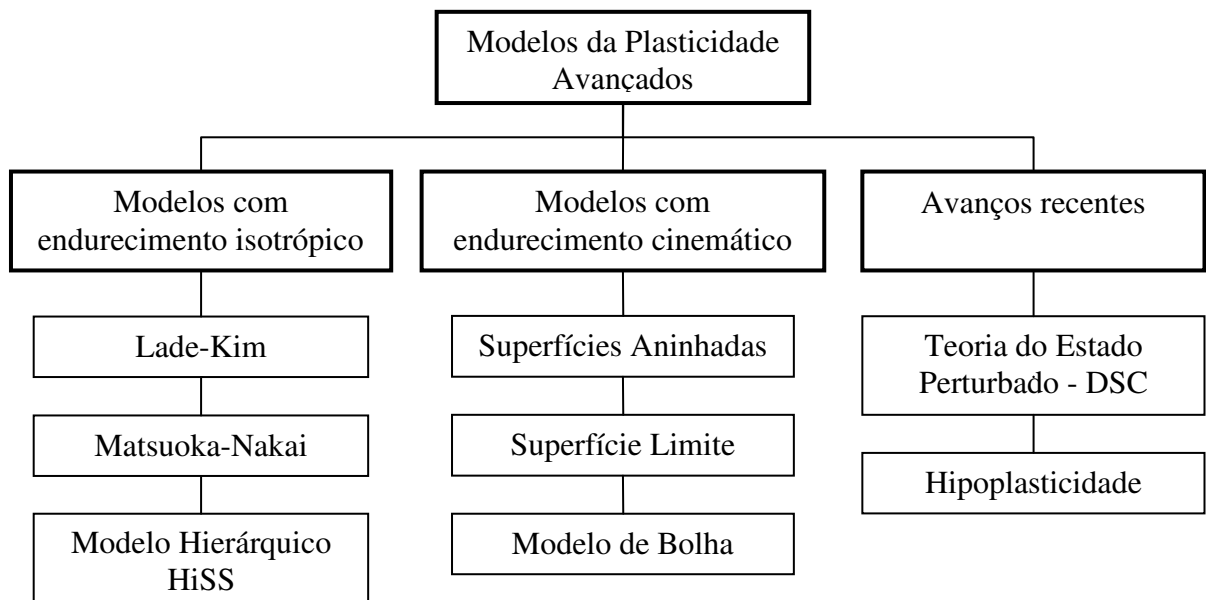
A Figura 2.2 ilustra esquema da família de modelos elasto-plásticos, derivados da Teoria da Plasticidade, englobando modelos clássicos de elasto-plasticidade. Entre estes modelos estão os de Drucker-Prager e os modelos de Estado Crítico.

A Figura 2.3 ilustra esquema da família de modelos elasto-plásticos avançados, que permitem a representação de comportamento com endurecimento isotrópico e endurecimento cinemático. O efeito de perda de estrutura com a deformação é considerado na Teoria do Estado Perturbado pela introdução de conceito de função de perturbação.

**Figura 2.2. Família de modelos constitutivos elasto-plásticos clássicos (Ibañez, 2003).**



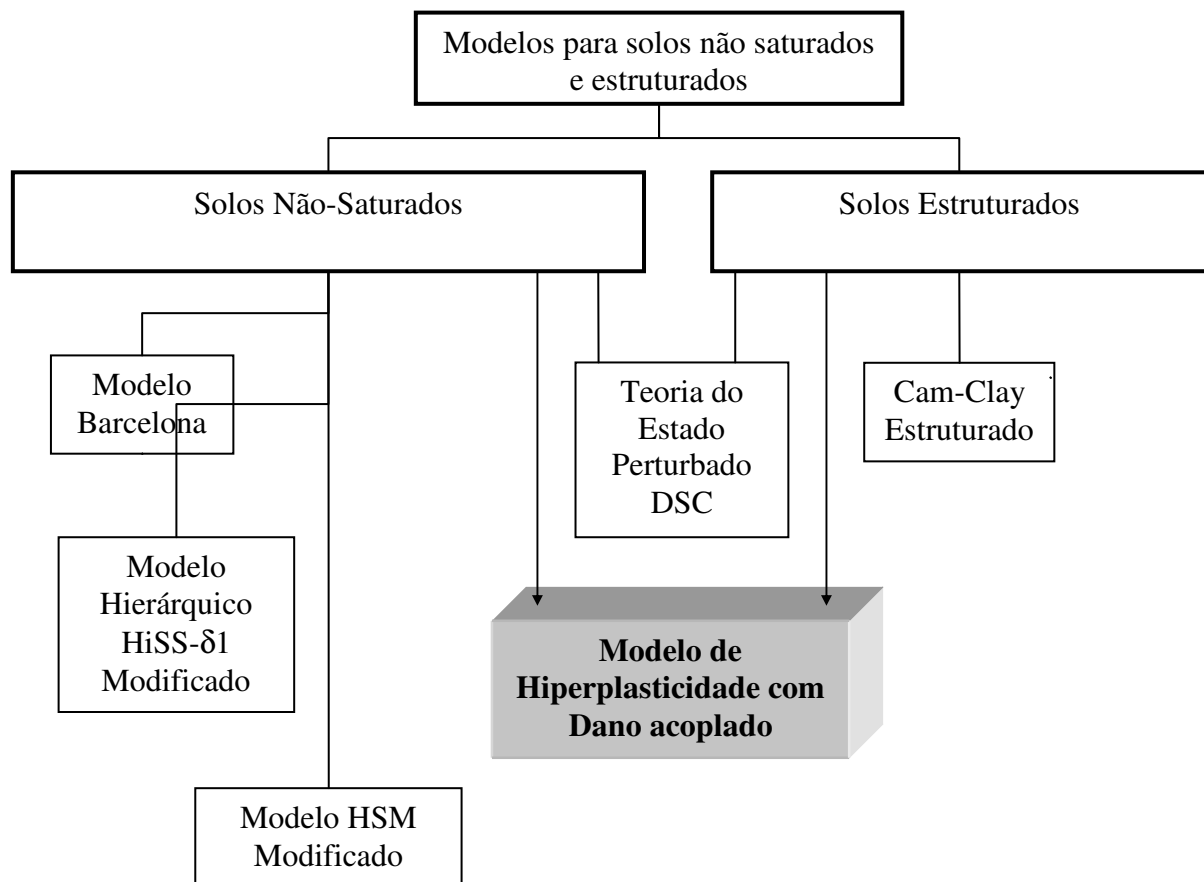
**Figura 2.3. Família de modelos constitutivos elasto-plásticos avançados (Ibañez, 2003).**



A Figura 2.4 mostra família de modelos aplicados a solos não-saturados e a solos estruturados. O modelo em vista neste trabalho, que une características de elasto-plasticidade

e adição de efeito de dano, está destacado na Figura 2.4, mostrando-se o inter-relacionamento dentro do grupo de modelos relacionados.

**Figura 2.4. Família de modelos constitutivos para solos não-saturados e estruturados**  
(adaptado de Ibañez, 2003).



## 2.1. PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS SOLOS

Apresenta-se na seqüência descrição sucinta da formulação de problema de equilíbrio, ou de movimento, no contexto da Mecânica do Contínuo, e o enquadramento das relações constitutivas na solução de um problema específico. Na continuação são apresentadas as propriedades mecânicas que um modelo "universal" para solos deveria ser capaz de representar.

## 2.2. EQUAÇÕES DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS

A solução de um problema de Mecânica dos Sólidos deve satisfazer, em cada instante, três condições (CHEN; BALADY, 1985, p. 15-18):

1) Equações de equilíbrio, ou de movimento, para uma análise estática ou dinâmica, respectivamente.

2) Condições de geometria ou de compatibilidade entre deformações e deslocamentos.

3) Leis constitutivas ou relações tensão-deformação dos materiais.

As condições iniciais e de contorno, em termos de forças ou de deslocamentos, que devem ser satisfeitas em um problema particular, estão englobadas na primeira e na segunda condição antes referidas.

### 2.2.1. Equações de Equilíbrio (ou de Movimento)

A partir da análise estática ou dinâmica pode-se relacionar o campo de componentes de tensões  $\sigma_{ij}$  de um corpo às componentes das forças de corpo  $F_i$  (forças por unidade de volume), e às forças superficiais  $T_i$  (forças por unidade de área) aplicadas na fronteira ou contorno do corpo. Campos de tensões que satisfazem estas condições estáticas (ou dinâmicas) são ditos *estaticamente* (ou *dinamicamente*) *admissíveis*. Por exemplo, na análise estática do corpo mostrado na Figura 2.5, um conjunto de tensões admissíveis  $\sigma_{ij}$ , e de forças superficiais  $T_i$  e de corpo  $F_i$ , devem satisfazer às seguintes equações de equilíbrio:

Nos pontos situados no interior do corpo:

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} \quad (2.2)$$

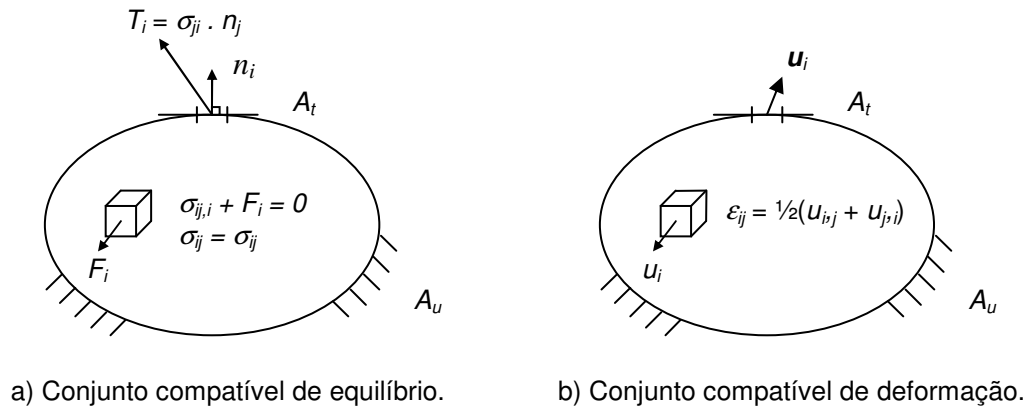
Nos pontos do contorno (com condições de contorno em termos de forças):

$$T_i = \sigma_{ji} \cdot n_j \quad (2.3)$$

onde  $n_j$  é o vetor unitário normal a um elemento de superfície sobre o qual atua a força  $T_i$ , como mostrado na Figura 2.5(a).



**Figura 2.5. Condições de equilíbrio e de compatibilidade geométrica na análise estática de um problema de Mecânica dos Sólidos (Chen; Balady, 1985).**



Nas equações (2.1) têm-se três equações de equilíbrio e seis incógnitas (componentes de tensão  $\sigma_{ij}$ ), em cada ponto do corpo, para forças prescritas de corpo  $F_i$ . Portanto, é fácil concluir que um conjunto de tensões que satisfaça às equações de equilíbrio é meramente um conjunto *compatível* de tensões e de forma nenhuma único. Em geral, pode-se encontrar um número infinito de estados de tensão que satisfazem às condições de contorno (2.3) e às equações de equilíbrio (2.1) e (2.2).

### 2.2.2. Condições de Compatibilidade Geométrica

Condições de compatibilidade geométrica são derivadas de considerações cinemáticas que relacionam as componentes de um campo de deformações,  $\epsilon_{ij}$ , às componentes de um campo de deslocamentos,  $u_i$ . A observância das condições de compatibilidade assegura que as relações deformação-deslocamento são integráveis para um campo prescrito de deformações. Um conjunto de deslocamentos,  $u_i$ , e de deformações,  $\epsilon_{ij}$ , que satisfazem a estas condições geométricas e que, ademais, atendem às condições de contorno de deslocamentos impostos, é dito um *conjunto cinematicamente admissível* ou simplesmente um *conjunto admissível*. Para deformações expressas em termos de tensores, como mostra a Figura 2.5(b), considerações cinemáticas conduzem às seguintes condições:

Relações deformação – deslocamento:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot [u_{i,j} + u_{j,i} + (u_{k,i} \cdot u_{k,j})] \quad (2.4)$$

No caso de análise em termos de pequenas deformações podem ser desprezados os termos de segunda ordem (termos entre parênteses) em (2.4), simplificando-se o tensor de deformações para:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4b)$$

Condições de compatibilidade (integrabilidade):

$$\varepsilon_{ij,kj} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (2.5)$$

Desta forma, um conjunto compatível de deslocamentos,  $u_i$ , e de deformações,  $\varepsilon_{ij}$ , devem satisfazer às equações (2.4) e (2.5) e atender às condições de contorno de deslocamentos impostos. Mais ainda, para um conjunto assumido de deslocamentos,  $u_i$ , (que pode não ser o real campo de deslocamentos induzido pela distribuição de forças de corpo,  $F_i$ , e pelo conjunto de forças de superfície aplicadas no contorno,  $T_i$ ) o campo compatível de componentes de deformação,  $\varepsilon_{ij}$ , pode ser derivado diretamente a partir da equação (2.4). Ressalte-se que este conjunto compatível de deformações e deslocamentos é, entretanto, apenas um entre muitos possíveis conjuntos compatíveis de deformações e deslocamentos.

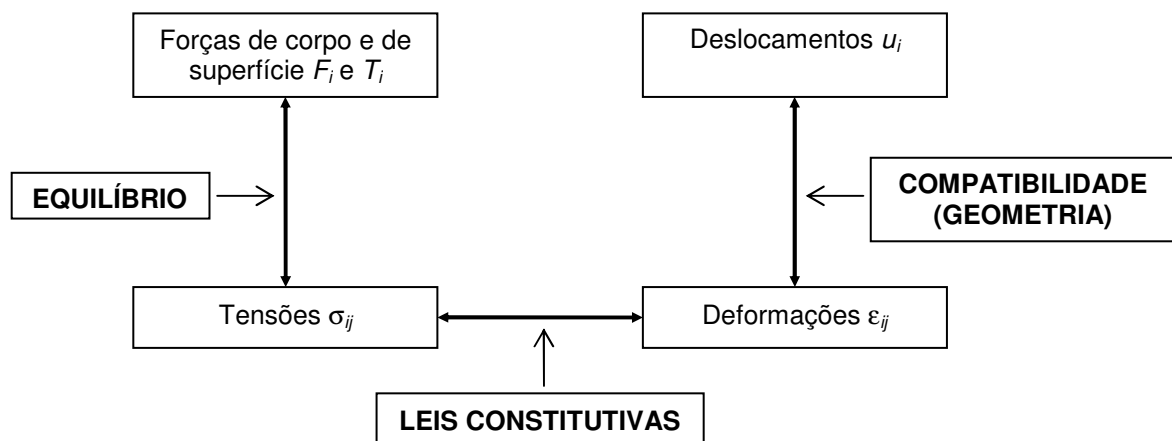
É importante notar que as condições de integrabilidade, expressas por meio das equações (2.5), são necessárias somente quando os deslocamentos,  $u_i$ , não aparecem de forma explícita como incógnitas de um problema. Em tais casos, as equações (2.5) devem ser impostas sobre o campo de deformações de forma a assegurar a existência de um campo contínuo de deslocamentos único. Na maior parte dos problemas práticos, os deslocamentos são introduzidos como incógnitas do problema, como é caso comum de emprego de técnicas numéricas de elementos finitos. Nestes casos as condições de integrabilidade não são necessárias e requer-se apenas o uso das equações (2.4), ou (2.4b), para derivar o campo de deformações a partir do campo de deslocamentos. Neste contexto existem nove incógnitas independentes (ou seja: as seis componentes de tensão,  $\sigma_{ij}$ , e as três componentes de deslocamentos,  $u_i$ ). Por outro lado dispõe-se de apenas três equações de equilíbrio (ou de movimento), de forma que são necessárias seis equações para completar a formulação do problema. Estas equações adicionais são fornecidas pelas relações constitutivas do material.

### 2.2.3. Relações Constitutivas

Como as condições de equilíbrio (ou de movimento) e de compatibilidade cinemática (ou geométrica) são tratadas de forma independente, elas são válidas para qualquer tipo de material. O aspecto particular de comportamento de cada material é introduzido por meio das relações ou leis constitutivas. Estas leis estabelecem as relações entre as componentes de tensão,  $\sigma_{ij}$ , e as componentes de deformação,  $\varepsilon_{ij}$ , em cada ponto de um corpo.

Uma vez determinada a lei constitutiva do material, a formulação geral da solução de um problema de Mecânica dos Sólidos pode ser completada. A Figura 2.6 mostra o inter-relacionamento entre as variáveis ( $F_i$ ,  $T_i$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ , e  $u_i$ ) envolvidas na formulação geral de um problema de análise estática.

**Figura 2.6. Inter-relacionamento entre variáveis envolvidas na análise estática de um problema de Mecânica dos Sólidos (Chen; Balady, 1985).**



As relações constitutivas de um material são determinadas de forma experimental e podem envolver outras quantidades físicas mensuráveis além das tensões e deformações, tais como temperatura e tempo, ou ainda parâmetros internos (variáveis internas) que não podem ser medidos diretamente. A inclusão destes parâmetros internos nas leis constitutivas tensão-deformação permite a representação de efeitos de história de tensões e deformações, e de dano no material.

As relações constitutivas dependem de vários fatores, incluindo a homogeneidade, isotropia e continuidade de um corpo material, a forma de reação à intensidade, taxa de

aplicação e duração de um carregamento. O comportamento de um material pode variar com a temperatura, a pressão confinante e a taxa de deformação, entre outros fatores.

### **2.3. COMPORTAMENTO MECÂNICO DOS SOLOS**

O comportamento mecânico dos solos sujeitos a carregamentos externos apresenta múltiplos aspectos. Diferentemente das propriedades da maioria dos materiais de engenharia, as propriedades tensão-deformação dos solos são grandemente influenciadas por fatores tais como: estrutura do solo, grau de saturação, condições de drenagem durante carregamento, taxa de carregamento, história de carregamento, e estado atual de tensão. Aqui, o termo estrutura é usado para indicar que micro-variáveis tais como: tamanho dos grãos, distribuição granulométrica, arranjo dos grãos e cimentação entre partículas, todas atuam de forma inter-relacionada na complexa resposta mecânica dos solos às solicitações. Para efeitos práticos estas micro-variáveis não são, em geral, caracterizadas de maneira individualizada, e, ao invés disto, para caracterizar, entender e prever a resposta dos solos lança-se mão de propriedades de "engenharia" tais como: índice de vazios e densidade relativa, que são mais simples de medir e mais úteis para análise, e que levam em conta, de certa forma, a associação de efeitos de muitas micro-variáveis (CHEN; BALADY, 1985, p. 101 a 108).

Os principais aspectos do comportamento tensão-deformação dos solos são:

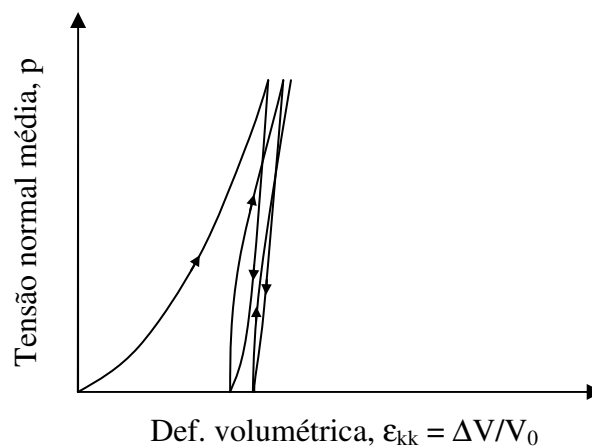
- 1) Solos apresentam comportamento não-linear por compactação sob efeito de estados hidrostáticos de tensão.
- 2) A deformação volumétrica de compressão é limitada.
- 3) Sob carregamento cíclico, solos apresentam deformação volumétrica permanente, que são cumulativas, mas limitadas.
- 4) A resistência ao cisalhamento dos solos é limitada.
- 5) A resistência ao cisalhamento dos solos depende, em geral, da tensão normal média.
- 6) Solos apresentam variação de volume induzida por cisalhamento.
- 7) A declividade da curva tensão cisalhante-deformação cisalhante sempre decresce na medida em que a deformação cisalhante cresce.
- 8) Sob carregamento cisalhante cíclico, solos apresentam deformação permanente e exibem variações de volume irreversíveis cumulativas, mas limitadas.

Ademais, as curvas de descarregamento-recarregamento geram ciclos de histerese que mudam com o número de ciclos.

- 9) O comportamento dos solos depende das condições do carregamento e da trajetória de tensões.
- 10) Em problemas dinâmicos, as propriedades tensão-deformação são geralmente afetadas pela velocidade de aplicação do carregamento.
- 11) Solos dissipam energia mesmo para variações mínimas de estado de tensão.
- 12) Incrementos de tensão são quase paralelos aos incrementos de deformação para pequenos desvios a partir de estados livres de tensões; contudo, para níveis elevados de tensões, os incrementos de deformação são eventualmente paralelos às tensões totais.
- 13) Sob condições não-drenadas, solo é um material multifásico (solo, água e ar).
- 14) Solos apresentam algum grau de anisotropia.

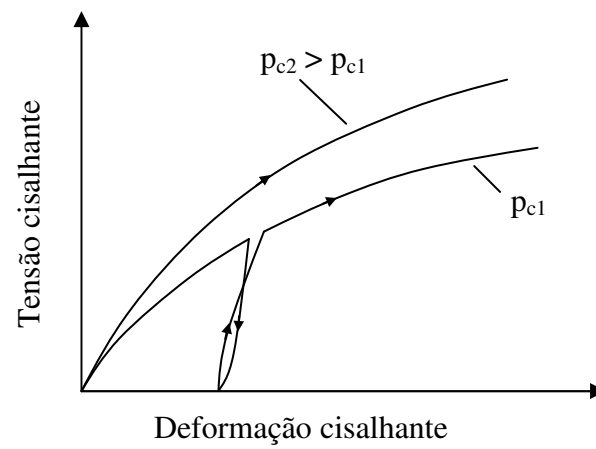
Algumas destas características estão descritas qualitativamente nas figuras a seguir. A Figura 2.7 mostra comportamento típico de solo sujeito a carregamento hidrostático de tensão (teste de consolidação isotrópico).

**Figura 2.7 – Comportamento típico de solo sob consolidação isotrópica (Chen; Balady, 1985).**

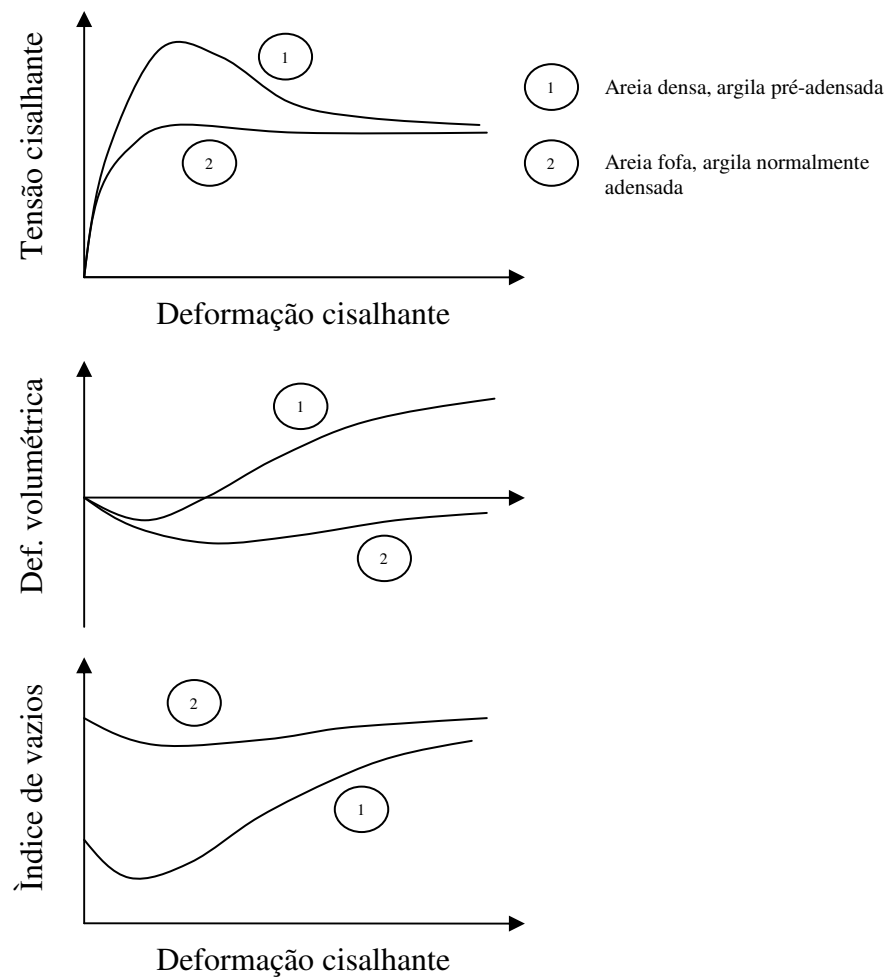


É claro na Figura 2.7 o comportamento não-linear de compactação sob tensão hidrostática. A quantidade de deformação volumétrica permanente é limitada. A Figura 2.7 mostra também a deformação volumétrica permanente sob carregamento cíclico isotrópico.

**Figura 2.8. Curvas de comportamento típico tensão cisalhante x deformação cisalhante (Chen; Balady, 1985).**



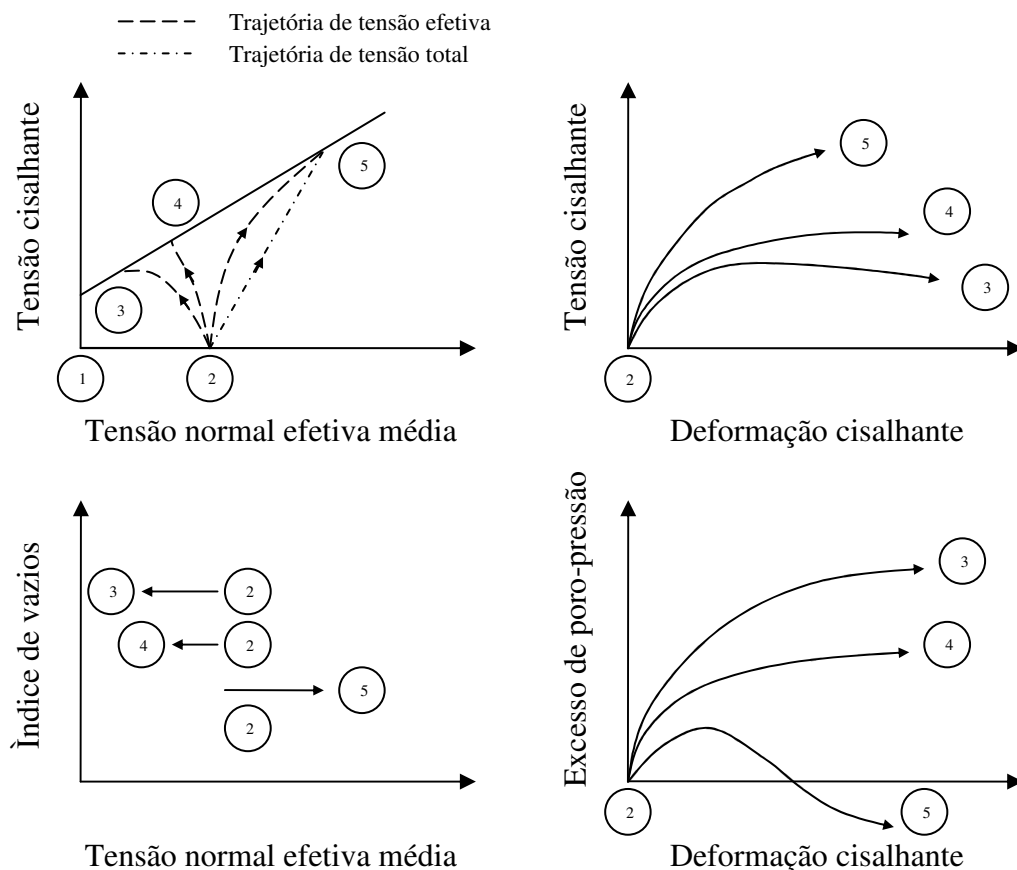
**Figura 2.9. – Comportamento típico de solos testados sob condições de teste triaxial drenado (Chen; Balady, 1985).**



A Figura 2.8 mostra comportamento típico tensão cisalhante versus deformação cisalhante de solos. A dependência da resistência ao cisalhamento da tensão confinante  $p_c$ , ou da tensão normal média, é evidente.

A Figura 2.9 mostra curvas tensão-deformação típicas para solos cisalhados sob condições de compressão triaxial drenada. As curvas assinaladas com "1" representam comportamento de areia densa ou de argila pré-adensada, ao passo que as curvas assinaladas com "2" mostram a resposta de areias fofas ou de argilas normalmente adensadas. Nota-se nestas curvas que a declividade das curvas tensão cisalhante versus deformação cisalhante sempre decresce com o aumento da deformação cisalhante, e que solos exibem variação de volume induzida por cisalhamento.

**Figura 2.10. Comportamento típico de solos testados sob condições de teste triaxial não-drenado (Chen; Balady, 1985).**



A Figura 2.10 mostra uma variedade de curvas tensão – deformação – poro-pressão típica de solos saturados em testes de compressão triaxial não-drenados. As três amostras assinaladas por "3", "4" e "5", foram inicialmente submetidas à consolidação isotrópica sob

uma mesma tensão normal efetiva média (ponto 2) e então cisalhadas sem drenagem. As curvas marcadas com "2-3" mostram a resposta típica de argilas normalmente adensadas ou de areias muito fofas. As curvas marcadas com "2-5" mostram comportamento típico de argilas pré-adensadas ou de areias muito compactas. Dentro destes limites extremos, correspondentes a respostas de materiais muito fofos a muito compactos, existe uma graduação de resposta, indicada pelas curvas intermediárias "2-4". Esta resposta depende do estado de compacidade (consolidação) do material. É fácil de observar a variação da resistência ao cisalhamento com a tensão efetiva, a única parte da tensão total que tem influência sobre a resistência mecânica dos solos.

A comparação da Figura 2.9 com a Figura 2.10 indica que o comportamento tensão cisalhante versus deformação cisalhante para areias densas ou argilas pré-adensadas e para areias fofas ou argilas normalmente adensadas, sob condições drenadas, contrasta de forma marcante com as respostas correspondentes sob condições não-drenadas. Para uma resposta tensão-deformação com amolecimento corresponde um comportamento dilatante, sob condições drenadas, e excesso de poro-pressão negativo na ruptura, sob condições de teste não-drenadas. De forma inversa, uma resposta tensão-deformação com endurecimento corresponde, sob condições drenadas, a um comportamento de contração, e excesso de poro-pressão positivo na ruptura, sob condições não-drenadas.

### 2.3.1. Dilatância

A contribuição da dilatância para a resistência ao cisalhamento dos solos foi equacionada por Taylor (1948), tendo usado o termo "interlocking" para descrever essa contribuição (Maranha das Neves, 2007).

Tomando como referência o resultado de um ensaio de cisalhamento direto em areia, esquematicamente representado na Figura 2.11, Taylor (1948) expressou a condição de equilíbrio de energia, na situação de pico de resistência, para a ocorrência de expansão. Para ocorrer expansão, que é resistida pela pressão normal, energia deve ser suprida para tanto. A quantidade de energia usada durante a expansão da amostra é o produto da variação de altura da amostra  $\delta h$  pela carga normal  $N = \sigma' A$  sobre o topo e base da amostra, de área normal  $A$ . Como não há mudanças nas dimensões horizontais da amostra, as tensões sobre as faces

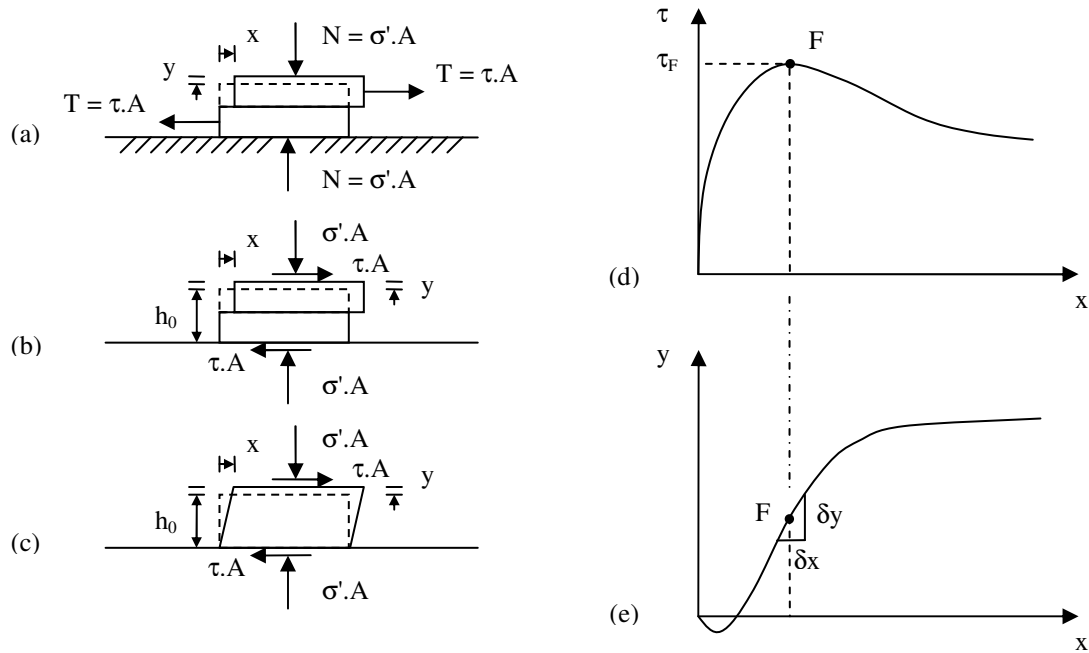


verticais da amostra não realizam trabalho. Trabalho é aplicado pela força cisalhante externa  $T$  produzindo deslocamentos horizontais  $x$ , com incrementos  $T \cdot \delta x$ . Parte deste trabalho é dissipado por atrito interno do material, com coeficiente de atrito friccional  $\mu$ , e parte é gasto para produzir a dilatação da amostra.

A equação de trabalho e energia pode ser escrita como:

$$T \cdot \delta x - N \cdot \delta y = N \cdot \mu \cdot \delta x \quad (2.6)$$

**Figura 2.11. Evolução da resistência e da dilatância durante um ensaio de cisalhamento direto, (a) e (b) esquema para ensaio de cisalhamento direto, (c) esquema de ensaio de cisalhamento com caixa articulada (adaptado de Maranhã das Neves, 2007).**



onde colocando  $T = \tau \cdot A$  e  $N = \sigma' \cdot A$  e dividindo toda a expressão por  $A$ , resulta:

$$\tau \cdot \delta x - \sigma' \cdot \delta y = \mu \cdot \sigma' \cdot \delta x \quad (2.7)$$

Para o ponto onde a razão  $\delta y / \delta x$  atinge o valor máximo, isto é, no ponto correspondente ao pico de resistência (ponto F da Figura 2.11(d) e (e)), colocando  $\delta y = \delta \epsilon_v \cdot h_0$  e  $\delta x = \delta \gamma \cdot h_0$ , a equação (2.7) pode ainda ser escrita como:

$$\tau_p = \sigma' \cdot \mu + \sigma' \cdot (-\delta \epsilon_v / \delta \gamma)_p \quad (2.8)$$

A primeira parcela do segundo membro de (2.8) representa a parcela de atrito interno do solo, referente a uma condição de cisalhamento sob volume constante, isto é  $\mu = \text{tg } \phi'_{cv}$ , e a segunda parcela de (2.8) representa a parcela de resistência devida à expansão durante cisalhamento. O sinal negativo, no termo entre parênteses, mostra que em caso de expansão, em que o incremento de variação volumétrica  $\delta\epsilon_v$  é negativo, a parcela tem valor positivo. Esta parcela devida à expansão vai desaparecendo na medida em que o solo tende para o *estado crítico*, caracterizado pela condição em que o solo se deforma distorcionalmente com as variáveis  $q$  ( $q = \sigma_1 - \sigma_3$ ), tensão desviadora,  $p'$  ( $p' = 1/3 \cdot (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)$ ), tensão média efetiva e  $v$  ( $v = 1 + e$ ), volume específico, constantes.

A equação (2.7), expressa em termos dos invariantes utilizados em ensaios triaxiais, é análoga a:

$$q \cdot \delta\epsilon_s + p' \cdot \delta\epsilon_v = M \cdot p' \cdot |\delta\epsilon_s| \quad (2.9)$$

(Schofield; Wroth, 1968, apud Maranha das Neves, 2007), onde os invariantes  $q$  e  $p'$  são comparáveis com  $\tau$  e  $\sigma'$ , respectivamente, e os incrementos de deformação  $\delta\epsilon_s = 2/3(\delta\epsilon_1 - \delta\epsilon_3)$  com  $\delta x$  e  $\delta\epsilon_v = \delta\epsilon_1 + 2 \cdot \delta\epsilon_3$  com  $-\delta y$ , em (2.7). Segundo Maranha das Neves (2007), tem-se assim que os valores de pico da resistência são determinados pela dilatação positiva (aumento de volume), a qual só é exibida pelos solos OC (Over Consolidated Soils).

### 2.3.2. As Deformações Localizadas nos Solos OC (Over Consolidated soils)

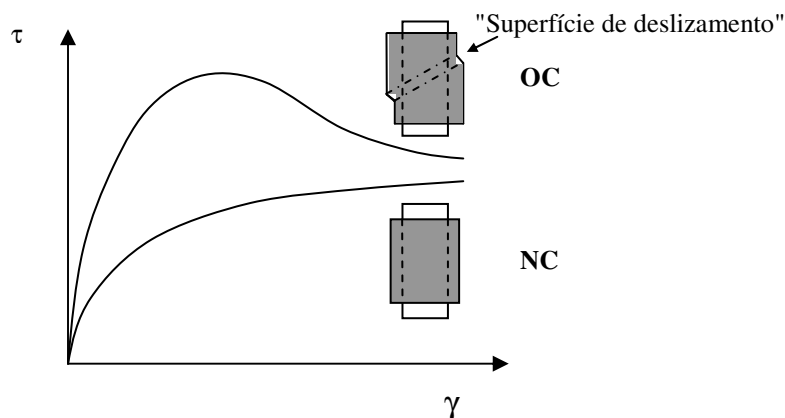
Neste trabalho, em que se utiliza enfoque termodinâmico na análise do comportamento mecânico de solos, é interessante registrar observação ligada à forma de dissipação de energia com a deformação em solos OC. "Um aspecto relevante na deformação dos solos OC é o aparecimento de marcas descontínuidades ou superfícies de deslizamento (Maranha das Neves (2007))." Segundo Maranha, "de facto não são superfícies, pois não teriam espessura, mas regiões de reduzida espessura onde se instalam elevadas deformações distorcionais num material que se vai comportar como essencialmente rígido em ambos os lados das zonas de deslizamento consideradas. Nos solos estas regiões podem ter uma espessura correspondente apenas à dimensão de algumas partículas, mas é uma espessura finita. Pode então o solo,

nessa zona, variar de volume. Assim, logo que se forma uma "superfície de deslizamento", o solo deixa de ser homogêneo e as deformações volumétricas e distorcionais são marcadamente não uniformes."

Ainda, segundo Maranh, "nos solos OC, como o comportamento é dilatante, vai ocorrer aumento de volume na região de deslizamento, com a correspondente diminuição de resistência. Daí resulta uma localização da distorção. Mas no caso de um solo NC ou ligeiramente OC, sendo contrátil, ocorrerá diminuição de volume durante a deformação distorcional, pelo que a resistência aumentará. Assim, se ocorrer qualquer deformação não homogênea, nas regiões de maior deformação o material torna-se mais resistente do que o material envolvente pelo que nunca se desenvolverá localização."

A Figura 2.12 ilustra o exposto anteriormente. Em solos OC a curva tensão-deformação apresenta pico de resistência e nos solos NC o crescimento de resistência é contínuo, de forma monotônica.

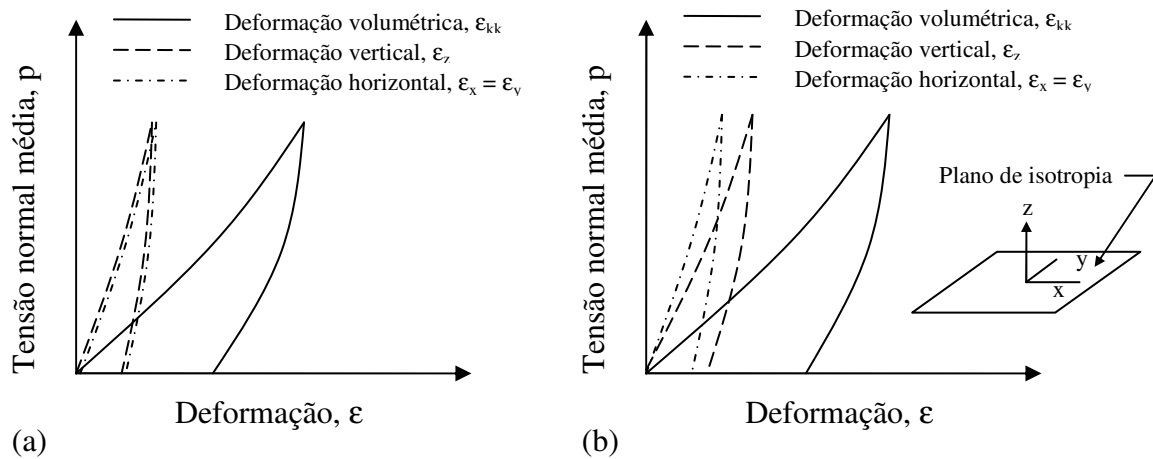
**Figura 2.12. Localização das deformações nos solos (adaptado de Maranh das Neves, 2007).**



As Figuras 2.13(a) e 2.13(b), respectivamente, mostram comportamento típico de materiais isotrópicos e isotrópico-transversos submetidos a carregamento e descarregamento hidrostático. Para o solo isotrópico todas as deformações são iguais, ao passo que no caso de solo isotrópico-transverso as deformações no plano de isotropia ( $\epsilon_x = \epsilon_y$ ) são diferentes da deformação na direção do eixo de simetria,  $\epsilon_z$ .

No caso de solos residuais os efeitos das micro-variáveis: estrutura e cimentação são de particular importância, sendo descritos de forma qualitativa nos itens 2.4 e 2.6.

**Figura 2.13. Comportamento típico de solos isotrópicos e transverso-isotrópicos secos, ou solicitados de forma drenada, sob carregamento e descarregamento hidrostático (Chen; Balady, 1985).**



## 2.4. SOLOS PARCIALMENTE SATURADOS

Na prática da engenharia geotécnica utiliza-se, sempre que possível, a consideração dos solos envolvidos, ou no estado seco ou no estado saturado, reduzindo-se a análise do material ao emprego de um material bifásico (ou seja: solo-ar ou solo-água, no caso de solo seco, ou de solo saturado, respectivamente). E, para o caso de solos saturados, é comum a indicação de análise conduzida sob condição drenada ou não-drenada, para indicar condições em que o material é solicitado com possibilidade de fluxo da água contida nos vazios do esqueleto sólido ou não. Os dois estados referidos correspondem a duas condições extremas de grau de saturação, igual a 0% e a 100%, respectivamente para o estado seco e para o estado saturado.

Se em grande parte dos problemas é possível evitar a complexidade de lidar com solo como material trifásico (solo-água-ar), em obras tais como de barragens de terra, sujeitas a fluxo transiente por ocasião de enchimento de reservatórios, a análise dos efeitos de avanço da frente de saturação necessita do estudo do solo em estado parcialmente saturado. Outro caso de fluxo transiente ocorre pelo esvaziamento rápido do reservatório. Estas análises servem para avaliar variações tanto de compressibilidade quanto de resistência ao cisalhamento, para os diversos solos componentes do corpo da barragem, e para examinar eventual possibilidade

de ruptura ou colapso. A alteração no grau de saturação produz mudança na rigidez do solo. Um aumento no grau de saturação reduz a compressibilidade do solo, por outro lado, entretanto, produz decréscimo na sucção mátrica, que é dependente da estrutura do solo. Este processo de redução de sucção por umedecimento pode resultar em colapso brusco da estrutura do solo.

Em solos parcialmente saturados observam-se comportamentos opostos, eles podem tanto colapsar como expandir quando saturados, dependendo das condições de carregamento e de sua estrutura.

### 2.4.1. Influência do Grau de Saturação no Comportamento do Solo

O grau de saturação é a variável básica de referência das condições não-saturadas de solos. Bear (1979, apud Marinho e Pereira, 1998) classifica o solo em termos do grau de saturação como:

a) Saturação pendular – estado caracterizado por grau de saturação muito baixo. A água é retida entre os meniscos formados em torno dos pontos de contato dos grãos. Estes meniscos não formam uma fase contínua de água, ao passo que a fase ar é contínua. A Figura 2.14(a) ilustra este estado de saturação.

b) Saturação funicular – estado caracterizado pela coexistência de fases contínuas de água e ar. A Figura 2.14(b) ilustra este estado de saturação.

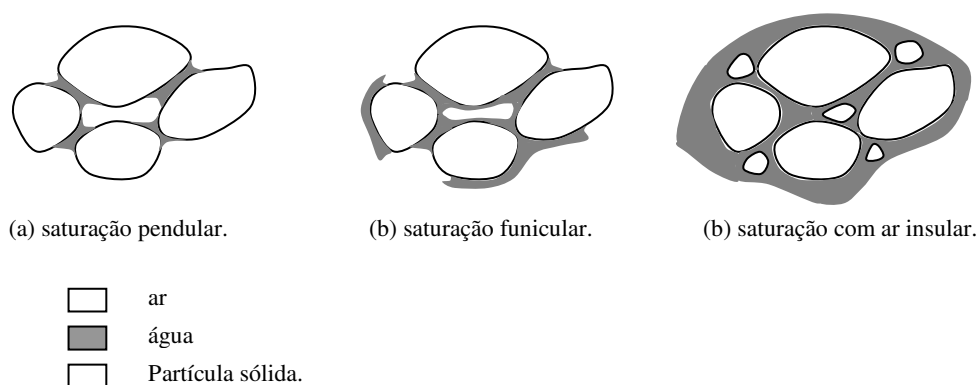
c) Saturação com ar insular (ou ocluso) – neste estado de saturação o ar dos poros perde sua continuidade e algumas partes tornam-se enclausuradas na água em forma de bolhas. A Figura 2.14(c) representa este estado de saturação.

Como os vazios em solos têm dimensões variadas, as três formas de saturação citadas podem coexistir. Quando a sucção excede valor dito de entrada de ar, e o ar entra nos poros, o fluído dos poros flui dos poros maiores. Os poros menores permanecem saturados até que uma sucção elevada seja atingida. As condições de saturação *pendular*, *funicular* e de *ar insular* coexistem exceto para sucções inferiores ao valor de entrada de ar e em situações extremas de sucções elevadas (ou seja, condições extremas de saturação) (Marinho e Pereira, 1998).

Quando a fase ar é contínua na estrutura do solo, o fluxo de fluído é função da permeabilidade do ar através dos vazios. Nesta situação a compressão do solo é rápida. A sucção matricial  $s$ , definida como a diferença entre a pressão do ar  $u_a$  e a pressão da água  $u_w$ ,

existentes nos vazios do solo, algebricamente expressa como:  $s = u_a - u_w$ , atinge valores elevados e a água adere firmemente ao esqueleto sólido. Este fato tem considerável influência no comportamento mecânico do solo. Um aumento no grau de saturação produz um decréscimo na sucção mátrica, que é dependente da estrutura do solo. Este processo pode resultar em colapso brusco da estrutura do solo.

**Figura 2.14. Estados possíveis de saturação do solo (Bear, 1979, apud Marinho e Pereira, 1998).**



Quando a fase ar está na forma de bolhas oclusas a permeabilidade do solo com relação à água controla o fluxo de fluido através dos vazios. A fase água pode fluir, como ocorre na consolidação de um solo saturado. Nos solos finos a presença de bolhas de ar oclusas pode produzir diferenças locais de compressibilidade. Mesmo pequenas quantidades de bolhas de ar oclusas podem fazer a mistura ar-água dos poros mais compressível (Marinho; Pereira, 1998).

Alonso (1987, apud Ibañez, 2003) aponta as seguintes características de comportamento observadas em ensaios de laboratório com solos parcialmente saturados:

- i) a sucção contribui para aumentar a rigidez do solo;
- ii) se o processo natural de deposição ou de compactação mecânica produzir uma estrutura porosa do solo, então uma redução na sucção (umedecimento) para uma dada tensão de confinamento poderá induzir uma compressão volumétrica irreversível (colapso).
- iii) solos como areias, siltes, areias argilosas, argilas arenosas ou argilas de baixa plasticidade, quando submetidos a processos de umedecimento, tendem a se expandir se a tensão de confinamento for baixa, ou a colapsar, se esta for suficientemente alta.

- iv) a resposta volumétrica de solos parcialmente saturados depende não somente dos valores de tensão e de sucção inicial e final, como também da trajetória de tensão seguida entre os estados inicial e final;
- v) variações nos valores de sucção induzem deformações volumétricas irreversíveis, devendo tal comportamento ser investigado submetendo-se as amostras de solo a ciclos de umedecimento e secagem;
- vi) um incremento na sucção resulta em incremento na coesão efetiva, mas não afeta o ângulo de atrito efetivo  $\phi'$ . Este incremento na resistência do solo é não linear, com tendência a alcançar um máximo estável para valores elevados de sucção.

## 2.5. SOLOS COLAPSÍVEIS

Solos ditos colapsíveis, submetidos à ação de cargas externas, apresentam sensível redução de volume quando recebem adição de água. Estes solos, em geral, com seus teores de umidade naturais, são capazes de suportar elevados carregamentos sem deformação significativa, mas sujeitos à infiltração de água podem sofrer uma súbita redução na capacidade de suporte. A perda de resistência produz um rearranjo da estrutura do solo, com uma redução de volume quase instantânea, e em consequência, recalque imediato.

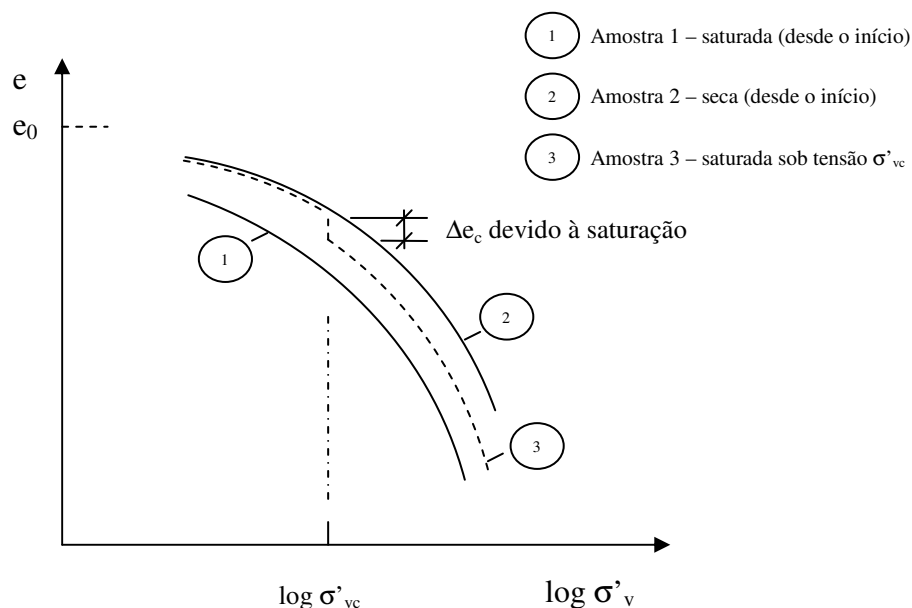
Uma expressão quantitativa para estabelecer se um dado solo é colapsível foi apresentada por Vargas (1973). A grandeza de medida é obtida por comparação do comportamento de três amostras idênticas em ensaio oedométrico. A primeira amostra é saturada desde o início, outra segunda seca é ensaiada sem adição de água, e a terceira inicialmente seca, recebe adição de água após um certo estágio de pressão para provocar a saturação, sofrendo uma variação correspondente de índice de vazios  $\Delta e_c$  (Ortigão, 2007), como mostra a Figura 2.15.

A deformação volumétrica  $\Delta \epsilon_c$  correspondente à  $\Delta e_c$  é dada pela equação:

$$\Delta \epsilon_c = \frac{\Delta e_c}{1 + e_0} \quad (2.10)$$

onde  $e_0$  é o índice de vazios inicial da amostra seca. Segundo Vargas (1973) o solo é considerado *colapsível* se  $\Delta \epsilon_c > 2\%$ .

**Figura 2.15. Colapso devido à saturação em solos insaturados (Vargas, 1973).**



Quatro condições são necessárias para a ocorrência do colapso de um solo (Barden et al., 1973, Mitchel, 1976, apud Marinho e Pereira, 1998).

- i) uma estrutura aberta, parcialmente instável e parcialmente saturada.
- ii) uma carga externa elevada o suficiente para a qual a estrutura do solo é metaestável.
- iii) uma sucção relativamente elevada ou a presença de um agente cimentante que estabilize o solo na condição não saturada.
- iv) a adição de água ao solo que reduza a sucção matricial ou destrua ou minimize a ação do cimentante entre as partículas, portanto causando rupturas por cisalhamento nos contatos inter-granulares ou em torrões de solo.

A colapsibilidade pode ser observada: em solos originados por *depósitos eólicos* ou por *depósitos aluvionares*, em *solos artificiais* obtidos por compactação, quando compactados abaixo da umidade ótima, e em *solos residuais*.

Segundo Marinho e Pereira (1998), solos colapsíveis têm sido tradicionalmente descritos como materiais fofos, primariamente granulares com quantidades variáveis de argila, silte ou outro agente cimentante atuando como ligante e mantendo as partículas granulares coesas.



Ligações entre partículas maiores ou torrões de argila podem ocorrer por: ação capilar, pontes de grãos de silte ou de argila, e ação de agentes cimentantes compostos por sais solúveis. Qualquer combinação destes agentes ligantes é possível e resultam em diversos tipos de solos colapsíveis com diferentes potenciais de colapso.

## **2.6. SOLOS RESIDUAIS**

Solos residuais resultam da decomposição da rocha mãe no próprio local pelo intemperismo. O intemperismo engloba uma série de processos físicos, químicos e biológicos, que provocam a destruição dos minerais da rocha original dando origem a minerais secundários, mais estáveis às novas condições de exposição à ação do ambiente.

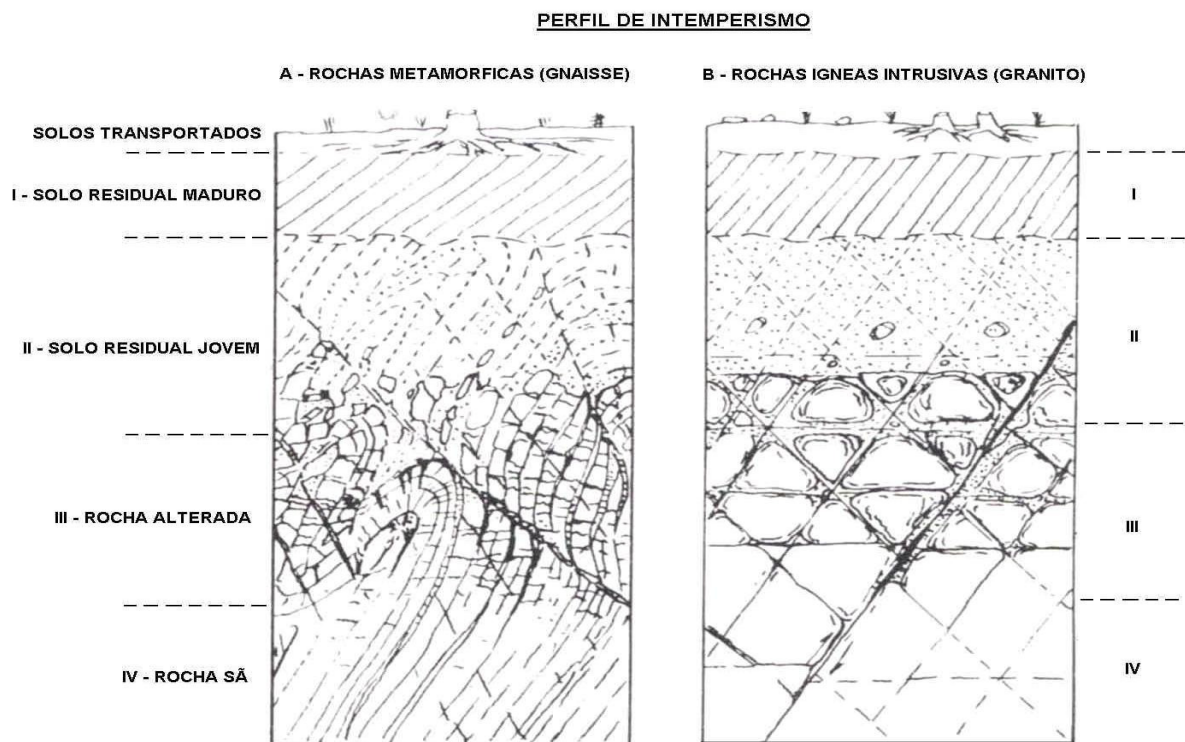
Em geral, é possível observar uma gradação de alteração do material superficial, mais alterado, para materiais situados em maior profundidade, menos alterados, ou mesmo, não alterados. Embora a transição seja gradual, designam-se diferentes camadas de um perfil de intemperismo, pelas suas características morfológicas, físicas, químicas, mineralógicas e biológicas, como (Ibañez, 2003):

- i) Solo maduro – constituído por minerais secundários (transformados) de granulação variável, dependendo do tipo da rocha-mãe. Em geral contém quartzo, argilas cauliníticas e óxidos de ferro e de alumínio hidratados, formando uma estrutura porosa. Trata-se de um solo homogêneo, com estrutura metaestável e geralmente apresentando-se parcialmente saturado, sendo susceptível ao colapso por saturação.
- ii) Solo residual jovem (saprolito) – camada de solo que ainda guarda características herdadas da rocha original. Possui uma estrutura reliquiar, podendo conter a presença de blocos rochosos. Assim, um solo residual jovem que provém da alteração de rochas metamórficas apresentará uma estrutura com xistosidades, sendo marcadamente anisotrópico. Já no caso de rochas ígneas, deverá apresentar uma estrutura mais isotrópica, com blocos arredondados de rocha distribuídos numa matriz arenosa, de forma regular devido à disposição mais homogênea das fraturas no maciço rochoso original (Oliveira e Brito, 1998, apud Ibañez, 2003).

- iii) Rocha alterada – camada onde os minerais rochosos exibem sinais evidentes de alteração, como a perda de brilho e cor, especialmente ao longo de juntas e fraturas. Mostra uma transição entre a rocha muito alterada e a que está pouco decomposta, de maior resistência.
- iv) Rocha sã – o maciço rochoso ainda não atingido pelo intemperismo. Os minerais apresentam-se com brilho e sem sinais evidentes de alteração.

A Figura 2.16 mostra esquematicamente o perfil de intemperismo para os casos de rochas metamórficas e de rocha ígnea intrusiva.

**Figura 2.16. Perfil de intemperismo: (A) Rocha metamórfica, (B) Rocha ígnea intrusiva (adaptado por Ibañez, 2003, de Deere & Patton, 1971).**



Estes aspectos antes relacionados devem ser levados em conta na formulação de modelos constitutivos de solos, incluindo-se as propriedades mais relevantes para o problema a ser estudado.

## 2.7. FORMULAÇÃO TEÓRICA

Mostra-se a seguir um resumo da conceituação dos modelos que servem de referência ao algoritmo proposto no presente trabalho. Tais modelos aplicáveis a solos não-saturados e solos estruturados, estão indicados na Figura 2.4. Dentre estes foram examinados os modelos Cam-Clay Estruturado, Modelo Barcelona e de Teoria do Estado Perturbado. Por uma questão de comparação, apresenta-se antes do modelo Cam-Clay Estruturado o modelo Cam-Clay Modificado, que deu origem a uma série de modelos estudados na Geotecnia, entre estes o Modelo Cam-Clay Estruturado.

Na sequência é mostrada a formulação de modelo de hiperplasticidade com dano acoplado, também derivado do Modelo Cam Clay Modificado, cuja validade de aplicação a casos de solos residuais é examinada neste trabalho.

## 2.8 MODELO CAM-CLAY MODIFICADO

O modelo Cam-Clay Modificado, evolução do modelo Cam-Clay, é modelo de elasto-plasticidade associada, que utiliza duas superfícies de escoamento representadas no plano  $p$  x  $q$ , uma fixa e outra móvel. As grandezas  $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3) / 3$  e  $q = (\sigma_1 - \sigma_3)$  correspondem à tensão normal média e à tensão desviadora, respectivamente, medidas em ensaios traxiais, onde o estado de tensão aplicado é axissimétrico.

A tensão  $p$  é relacionada ao primeiro invariante de tensões:

$$p = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3} = \frac{J_1}{3} = \text{pressão média} \quad (2.11)$$

e a tensão  $q$  é relacionada ao segundo invariante do tensor desviador de tensões.

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{3J_{2D}} \quad (2.12)$$

A substituição do tensor de tensões pelos invariantes  $p$  e  $q$ , implica na definição de componentes associadas de incrementos de deformação volumétrica e desviadora, na forma:

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_3 = \text{deformação volumétrica} \quad (2.13)$$

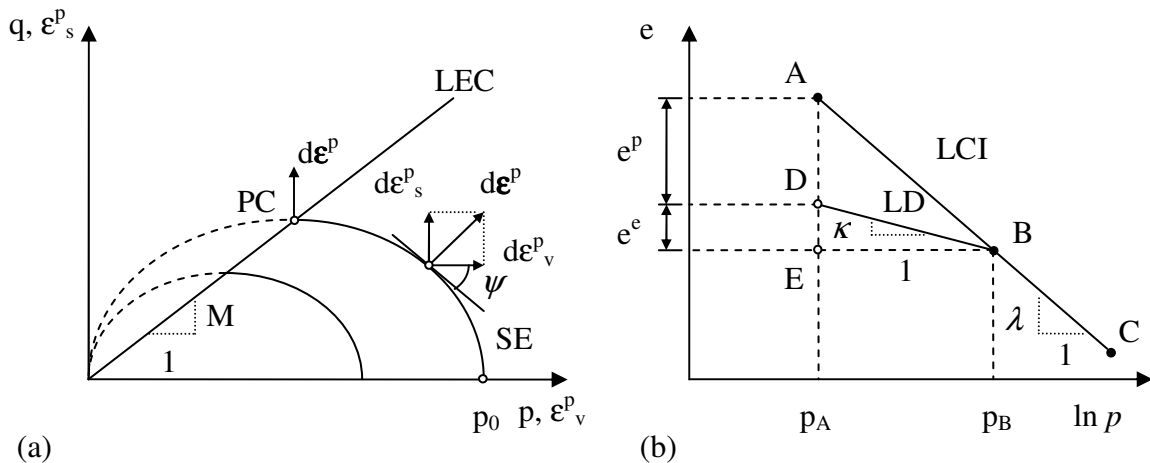
$$d\epsilon_s = \frac{2}{3}(d\epsilon_1 - d\epsilon_3) = \text{deformação desviadora} \quad (2.14)$$

A superfície de escoamento fixa, dita superfície de escoamento último ou de ruptura, é representada pela projeção da *linha de estado crítico* (LEC) no plano  $p \times q$  como reta de inclinação  $M$ , passando pela origem dos eixos. A outra superfície, móvel, tem função de superfície de escoamento de *endurecimento*. No modelo Cam-Clay foi adotada forma de elipse, com tamanho definido pela pressão de pré-adensamento,  $p_0$ , que funciona como parâmetro de endurecimento. As superfícies elípticas de escoamento (SE) interceptam a linha de estado crítico em pontos críticos (PC). Para solos NA a superfície de escoamento só existe na região delimitada pelo eixo  $p$  e pela linha de estado crítico. A Figura 2.17 ilustra a posição das superfícies de escoamento e as grandezas de referência do modelo.

A condição de escoamento último, de estado crítico, ou de ruptura, é definida pela relação:

$$q_u = M \cdot p \quad (2.15)$$

**Figura 2.17. (a) Superfícies de escoamento e linha de estado crítico (LEC) no plano  $p - q$ ; (b) Consolidação isotrópica (LCI) e de descarregamento / recarregamento (LD) (adaptado de Ibañez, 2003).**



A condição de escoamento por endurecimento é definida por relação entre as variáveis  $p$  e  $q$ , que satisfazem à equação da superfície de escoamento elíptica:

$$f = M^2 \cdot p^2 - M^2 \cdot p_0 \cdot p + q^2 = 0 \quad (2.16)$$

A razão  $\psi$ , entre as componentes plásticas de deformação de cisalhamento e volumétrica, é obtida pela consideração da energia dissipada enquanto ocorre a deformação sobre a superfície limite de escoamento. No modelo MCC é assumido que a dissipação do incremento de trabalho plástico é igual a:

$$dW = pd\varepsilon_v^p + qd\varepsilon_s^p = p\sqrt{(d\varepsilon_v^p)^2 + M^2(d\varepsilon_s^p)^2} \quad (2.17)$$

Nos modelos Cam-Clay é assumida validade da regra da normalidade, e da equação (2.17), colocando-se  $\eta = q / p$ , obtém-se a seguinte relação entre os incrementos de deformação plástica desviadora e volumétrica, para caso de endurecimento:

$$\frac{d\varepsilon_s^p}{d\varepsilon_v^p} = \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} = \frac{1}{\psi} \quad (2.18)$$

Na equação diferencial da superfície de escoamento de endurecimento (Desai, 1984):

$$\frac{dp}{p} + \frac{d\eta}{\eta + \psi} = 0 \quad (2.19)$$

substituindo-se a expressão  $\psi = \psi(M, \eta)$  de (2.18), resultam as seguintes expressões para as quantidades incrementais de deformações no MCC.

$$d\varepsilon_v^p = -\frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \left( \frac{dp}{p} + \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} \right) \quad (2.20)$$

$$d\varepsilon_v = \frac{\lambda}{1 + e} \left[ \frac{dp}{p} + \left( 1 - \frac{\kappa}{\lambda} \right) \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} \right] \quad (2.21)$$

$$d\varepsilon_s^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \left( \frac{dp}{p} + \frac{2\eta d\eta}{M^2 + \eta^2} \right) \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \quad (2.22)$$

Os incrementos de deformação volumétrica elástica são obtidos pela diferença entre os valores incrementais de (2.20) e (2.21). Por hipótese os incrementos de deformação desviadora são considerados todos plásticos, isto é ( $d\varepsilon_s^e = 0$ ).

As grandezas  $\lambda$  e  $\kappa$ , nas equações (2.20) a (2.22), são o índice de compressão e de recompressão, respectivamente, obtidos da curva  $e \times \ln p$ , de ensaios de consolidação isotrópica, esquematizada na Figura 2.17(b).

## 2.9. MODELO CAM-CLAY ESTRUTURADO

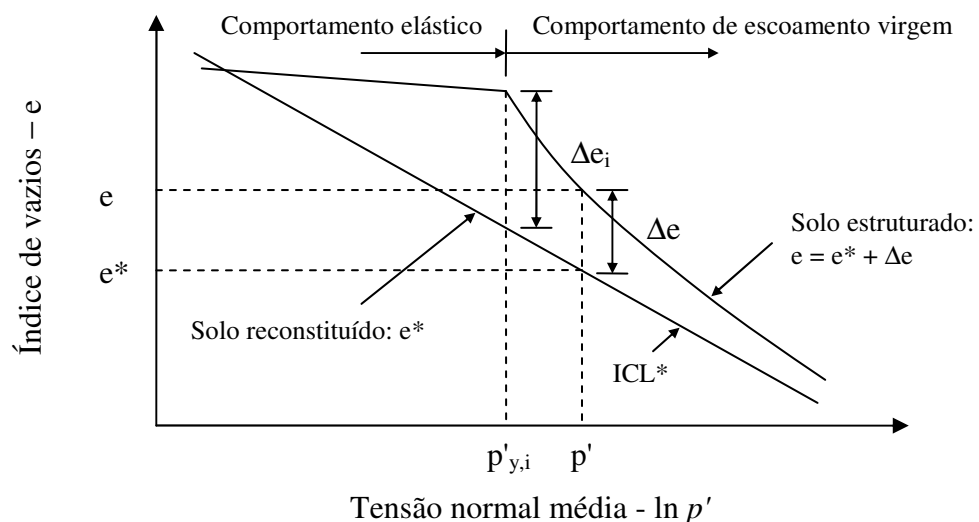
O modelo Cam-Clay Estruturado é uma generalização do modelo Cam-Clay Modificado. O modelo MCC descreve adequadamente o comportamento de solos reconstituídos. O modelo estruturado toma como referência um solo reconstituído, isto é, um solo que perdeu todas as características de estrutura, para o qual são definidas as propriedades "intrínsecas" do solo. Estas propriedades foram assinaladas com um "\*", para distingui-las das propriedades do material estruturado (Liu, Carter; 2002).

No processo de carregamento e deformação, que vai produzindo a destruição da estrutura, o solo vai evoluindo para um comportamento isotrópico, motivo que justifica a adoção por Liu e Carter de modelo isotrópico.

Liu e Carter (2002) assumiram coaxialidade entre incremento de deformação plástica e o tensor de tensões.

A influência da estrutura do solo pode ser observada na Figura 2.18, onde está representado o comportamento de solo reconstituído e de solo estruturado sob consolidação isotrópica.

**Figura 2.18. Idealização de compressão isotrópica de solo reconstituído e de solo estruturado (adaptado de Liu e Carter, 2002).**



O índice de vazios do trecho de compressão virgem de solo estruturado pode ser expresso como:

$$e = e^* + \Delta e \quad (2.23)$$

A seguinte expressão exponencial foi proposta por Liu e Carter (2000) para representar a parcela  $\Delta e$  correspondente ao efeito de estrutura residual do solo.

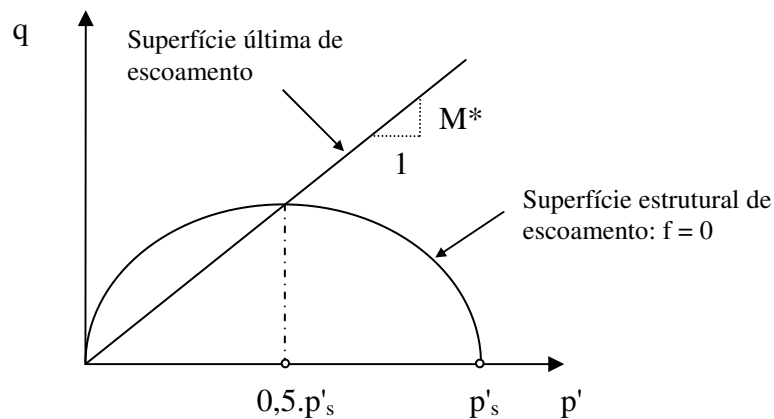
$$e = e^* + \Delta e_i \left( \frac{p'_{y,i}}{p'} \right)^b \quad (2.24)$$

O expoente  $b$  é um parâmetro ligado à taxa de desestruturação do solo e é designado como *índice de desestruturação*.

De forma similar ao modelo MCC a condição de escoamento é estabelecida pelo emprego de duas superfícies de escoamento, uma fixa e outra móvel.

A superfície de escoamento móvel, para argilas estruturadas, separa o escoamento virgem do comportamento elástico. Esta superfície, que é dependente da estrutura do solo, assim como da história de tensões e do índice de vazios, foi designada por Liu e Carter de *superfície de escoamento estrutural*. A Figura 2.19 mostra a representação da superfície móvel de escoamento e da superfície estrutural última ou de ruptura, definida para a condição de solo reconstituído, com inclinação  $M^*$ .

**Figura 2.19. Superfície estrutural de escoamento e superfície última de escoamento (adaptado de Liu e Carter, 2002).**



A função de escoamento estrutural, representada pela elipse na Figura 2.19, pode ser escrita como:

$$f = \left( \frac{q}{0,5.M^*.p'_s} \right)^2 + \left( \frac{p' - 0,5.p'_s}{0,5.p'_s} \right)^2 - 1 = 0 \quad (2.25)$$

A deformação volumétrica sob compressão virgem isotrópica, para solo reconstituído, é definida pela reta de compressão ICL da Figura (2.18), donde se pode escrever que:

$$e^* = e_{IC}^* - \lambda^* \cdot \ln p' \quad (2.26)$$

onde  $e_{IC}^*$  é o índice de vazios do solo reconstituído quando  $p' = 1$  kPa, durante o ensaio de compressão virgem isotrópica.

Para um solo estruturado (Liu e Carter, 2002) sujeito a carregamento monotônico, ocorre escoamento virgem se  $p'_s \geq p'_{y,i}$ . Admitem os citados autores, que o endurecimento de um solo estruturado é dependente da deformação plástica volumétrica, e que a superfície de escoamento elíptica é definida por todos os estados de tensão que têm a mesma deformação plástica volumétrica acumulada. O "tamanho" desta elipse pode ser definido pela pressão de escoamento de compressão isotrópica  $p'_s$ , como mostra a Figura 2.19.

Admitem ainda, Liu e Carter, que a deformação elástica de um solo estruturado é a mesma de um solo reconstituído. Assim, qualquer variação adicional de índice de vazios devida à estrutura do solo deve ser associada com deformação volumétrica plástica, e é, portanto, dependente do tamanho da superfície de escoamento.

Como para cada superfície elíptica está associado valor definido de deformação volumétrica plástica acumulada, Liu e Carter aplicaram na expressão (2.24) o valor da tensão  $p'_s$  em lugar de  $p'$ , atribuindo à tensão  $p'_s$ , diâmetro maior da elipse, função de parâmetro de endurecimento.

A substituição da expressão (2.26) em (2.24) e esta, por sua vez, em (2.23) produz:

$$e = e_{IC}^* - \lambda^* \cdot \ln p' + \Delta e_i \cdot \left( \frac{p'_{y,i}}{p'_s} \right)^b \quad (\text{para } p'_s \geq p'_{y,i}) \quad (2.27)$$

onde  $p'_{y,i}$  é o valor da pressão efetiva média, no ponto inicial de escoamento, para um estado isotrópico de tensão (ver Figura 2.18). Esta pressão é numericamente igual ao tamanho da superfície de escoamento associada à estrutura inicial do solo.

Liu e Carter (2002) fazem a seguinte colocação: "De acordo com Schofield e Wroth (1968), durante compressão ao longo de uma trajetória de tensão qualquer, a deformação volumétrica de um solo reconstituído é definida por  $\lambda^* \cdot \ln p'$ , a qual pode ser dividida em duas partes. A parte elástica é definida por  $\kappa^* \cdot \ln p'$ , que é dependente do estado corrente de tensão efetiva média, e a parte plástica é dada por  $(\lambda^* - \kappa^*) \cdot \ln p'_s$ , que é dependente do tamanho da



superfície de escoamento. O índice de vazios para um solo estruturado, durante compressão virgem ao longo de uma trajetória qualquer de tensões, pode então ser expresso como"

$$e = e_{IC}^* + \Delta e_i \left( \frac{p'_{y,i}}{p'_s} \right)^b - (\lambda^* - \kappa^*) \ln p'_s - \kappa^* \ln p' \quad (2.28)$$

Ainda, segundo Liu e Carter (2002): "A equação de compressão genérica (2.28) indica que o índice de vazios de um solo estruturado é composto de duas partes; uma parte elástica que é dependente do estado corrente de tensão efetiva e uma plástica que é dependente do tamanho da superfície de escoamento. A parte plástica é, por sua vez, dividida em duas partes; a parte associada com as propriedades intrínsecas do solo e a parte associada com a estrutura do solo.

A diferenciação da equação (2.28) permite obter o incremento de deformação volumétrica para uma trajetória qualquer de tensões. Lembrando que  $\varepsilon_v = \Delta V/V = \Delta e / (1+e)$ , resulta:

$$d\varepsilon_v = \left[ \kappa^* \cdot \frac{dp'}{(1+e)p'} \right] + \left[ (\lambda^* - \kappa^*) \cdot \frac{dp'_s}{(1+e)p'_s} + b \cdot \Delta e \cdot \frac{dp'_s}{(1+e)p'_s} \right] \quad (2.29)$$

O primeiro termo entre colchetes, no segundo membro de (2.29), representa o incremento de deformação elástica, e o segundo o incremento de deformação plástica.

Neste ponto, Liu e Carter (2002) fazem um adendo à expressão (2.29): "Considerando o mecanismo de cisalhamento, é racional assumir que a desestruturação e a deformação volumétrica plástica associada devem ser dependentes da variação de tamanho da superfície de escoamento e também da magnitude da tensão cisalhante corrente. Assim, uma modificação da equação (2.29) é feita de forma que o efeito da tensão cisalhante sobre a desestruturação seja também considerado, isto é."

$$d\varepsilon_v = \left[ \kappa^* \cdot \frac{dp'}{(1+e)p'} \right] + \left[ (\lambda^* - \kappa^*) \cdot \frac{dp'_s}{(1+e)p'_s} + b \cdot \Delta e \cdot \left( 1 + \frac{\eta}{M^* - \eta} \right) \cdot \frac{dp'_s}{(1+e)p'_s} \right] \quad (2.30)$$

onde  $\eta = q / p$  é a razão entre as tensões de ensaio triaxial. Da equação (2.30) pode-se notar que a modificação feita influi somente sobre a parcela de incremento plástico de deformação volumétrica. Ainda, segundo Liu e Carter (2002), "pode-se ver da equação (2.30) que o efeito da desestruturação, que é descrito como a redução do índice de vazios adicional, aumenta com

o valor da razão corrente de tensão  $\eta$ . Para um solo reconstituído,  $\Delta e \equiv 0$ , e o comportamento volumétrico previsto pelo modelo Cam Clay Modificado é recuperado."

A equação (2.30) pode ser reescrita como:

$$d\varepsilon_v = \left[ \kappa^* \cdot \frac{dp'}{(1+e)p'} \right] + \left[ (\lambda^* - \kappa^*) \cdot \frac{dp'_s}{(1+e)p'_s} + b \cdot \Delta e \cdot \left( \frac{M^*}{M^* - \eta} \right) \cdot \frac{dp'_s}{(1+e)p'_s} \right] \quad (2.31)$$

onde o primeiro termo entre colchetes representa a parcela elástica e o segundo a parcela plástica.

### 2.9.1. Regra de Fluxo

No modelo MCC foi assumida regra de fluxo associada, expressa como:

$$\frac{d\varepsilon_s^p}{d\varepsilon_v^p} = \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} \quad (2.32)$$

A estrutura do solo tem influência sobre a regra de fluxo. Tem sido observado que uma argila estruturada, com  $\Delta e$  positivo, geralmente tem um menor valor de razão de incremento  $d\varepsilon_s^p / d\varepsilon_v^p$  do que o solo reconstituído correspondente, sujeito ao mesmo estado de tensão de escoamento virgem (Liu e Carter, 2002). Para consideração deste efeito, os citados autores, propuseram a seguinte equação para regra de fluxo de argilas estruturadas, modificação da equação (2.32).

$$\frac{d\varepsilon_s^p}{d\varepsilon_v^p} = \frac{2(1 - \omega \Delta e)\eta}{M^{*2} - \eta^2} \quad (2.33)$$

onde  $\omega$  é um novo parâmetro do modelo, que descreve a influência da estrutura do solo sobre a regra de fluxo. A expressão entre parênteses em (2.33) não pode ser negativa, de outra forma o vetor de incremento plástico seria dirigido para o interior da superfície de escoamento, violando o postulado de continuidade de Drucker. Assim, é imposta a seguinte condição de restrição.

$$0 < 1 - \omega \Delta e \leq 1 \quad (2.34)$$

e, desta forma, a faixa de variação de  $\omega$  situa-se entre:

$$0 \leq \omega \leq \frac{1}{\Delta e_i} \quad (2.35)$$

A equação (2.33) implica em regra de fluxo não-associada para o novo modelo. Este fato tem importantes conseqüências para esquemas de soluções numéricas aplicados à solução de problemas de valor de contorno. Em particular, ele geralmente resulta em sistemas de equações não simétricas (Liu e Carter, 2002).

### 2.9.2. Relações Tensão-Deformação

**Deformação elástica:** para estados de tensão situados dentro da superfície de escoamento ocorrem somente deformações elásticas. As deformações elásticas de um solo estruturado são consideradas independentes da estrutura do solo e podem ser determinadas por meio das relações desenvolvidas para o MCC

$$d\varepsilon_v^e = \kappa^* \cdot \frac{dp'}{(1+e)p'} \quad (2.36)$$

$$d\varepsilon_s^e = \frac{2(1+\nu^*)}{9(1-2\nu^*)} \left( \frac{\kappa^*}{1+e} \right) \frac{dp'}{p'} \quad (2.37)$$

onde  $\nu^*$  é o coeficiente de Poisson. Geralmente é adotado valor constante para  $\nu^*$ .

**Escoamento virgem:** Para estados de tensão sobre a superfície de escoamento e com  $dp'_s > 0$  ocorre escoamento. Unindo-se as expressões de incrementos elásticos, descritas pelas equações (2.36) e (2.37), com as expressões de incrementos plásticos, descritas pelas equações (2.31) e (2.33), obtém-se para os incrementos totais de deformação volumétrica e cisalhante:

$$d\varepsilon_v = \kappa^* \cdot \frac{dp'}{(1+e)p'} + (\lambda^* - \kappa^*) \cdot \frac{dp'_s}{(1+e)p'_s} + b \cdot \Delta e \cdot \left( \frac{M^*}{M^* - \eta} \right) \cdot \frac{dp'_s}{(1+e)p'_s} \quad (2.38)$$

$$d\varepsilon_s = \frac{2(1+\nu^*)}{9(1-2\nu^*)} \left( \frac{\kappa^*}{1+e} \right) \cdot \frac{dp'}{p'} + \frac{2(1-\omega \cdot \Delta e) \eta}{(M^{*2} - \eta^2)} \left[ (\lambda^* - \kappa^*) + b \cdot \Delta e \cdot \left( \frac{M^*}{M^* - \eta} \right) \right] \frac{dp'_s}{(1+e)p'_s} \quad (2.39)$$

**Amolecimento:** "O solo é considerado como material elástico para carregamento dentro da superfície de escoamento. Quando o estado corrente de tensão atinge a superfície virgem de escoamento em um ponto, com  $dp'_s > 0$ , ocorre escoamento virgem. Se o solo atinge a superfície de escoamento com  $\eta > M^*$ , ocorre amolecimento se as condições de contorno permitirem ajuste apropriado do estado de tensão. Em caso contrário, é previsível ocorrência de ruptura catastrófica. Durante o processo de amolecimento, a estrutura do solo será quebrada, e a superfície de escoamento sofrerá contração com o corrente estado de tensão, permanecendo sobre ele. Em tais casos, a superfície de escoamento contrai até que o solo atinja um estado crítico de deformação, quando a estrutura do solo é completamente removida. Este processo pode ser descrito pelas equações de escoamento virgem antes mostradas (Liu e Carter, 2002)."

Continuam ainda Liu e Carter (2002): "O incremento de deformação volumétrico plástico dado pela equação (2.31) é válido para processo de amolecimento. Deve ser observado que como a superfície de escoamento contrai, a deformação volumétrica associada com as propriedades intrínsecas é negativa, isto é, expansiva. Contudo, a deformação volumétrica associada com a desestruturação é determinada por  $\Delta e$ , porque ambos os termos  $(M^* - \eta)$  e  $dp'_s$  são negativos. Por exemplo, para uma argila estruturada com  $\Delta e$  positivo, a deformação volumétrica associada com desestruturação será positiva, isto é, compressiva. Logo, diferentemente de uma argila reconstituída, o processo de *amolecimento* de uma argila estruturada pode ser acompanhado tanto de expansão volumétrica global, quanto de compressão volumétrica global..."

Os autores citados, Liu e Carter, propõem que, o incremento de deformação desviatório plástico, contido na equação (2.39), seja modificado para acomodar amolecimento, como segue, pela alteração do sinal da parcela de  $\Delta e$ :

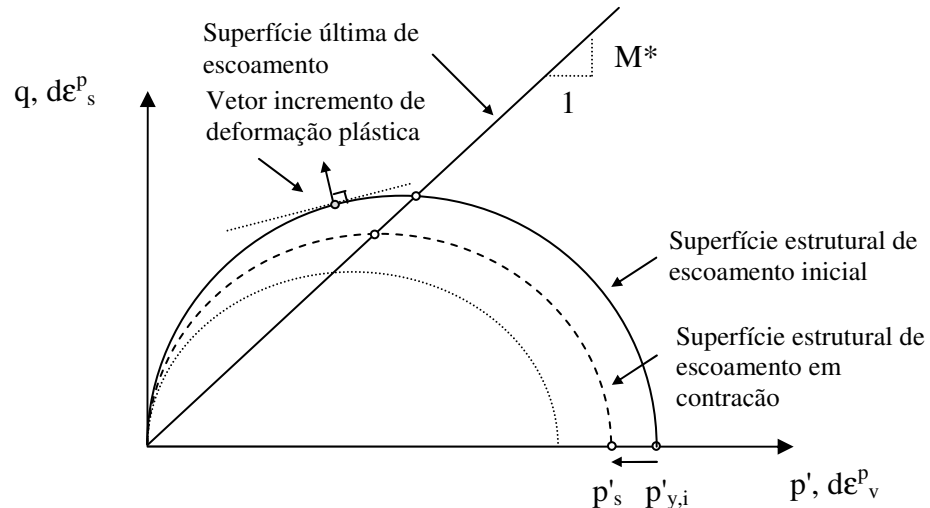
$$d\varepsilon_s^p = \frac{2(1-\omega.\Delta e)\eta}{(M^{*2}-\eta^2)_s} \left[ (\lambda^* - \kappa^*) - b.\Delta e \left( \frac{M^*}{M^* - \eta} \right) \right] \cdot \frac{dp'_s}{(1+e)p'_s} \quad (2.40)$$

Segundo Liu e Carter (2002), "neste caso, somente o sinal da parcela de deformação plástica desviatória associada com a desestruturação, foi mudado, de forma que o vetor incremento de deformação apontará para fora da superfície de escoamento".

A Figura 2.20 ilustra o conceito descrito. Ressalte-se que o novo estado de tensão deve se situar sobre a nova superfície de escoamento contraída, contração que deve perdurar

até que o estado de tensão ( $p'$ ,  $q$ ) recaia sobre ponto crítico, sobre a superfície última de escoamento.

**Figura 2.20. Contração da superfície estrutural de escoamento por amolecimento.**

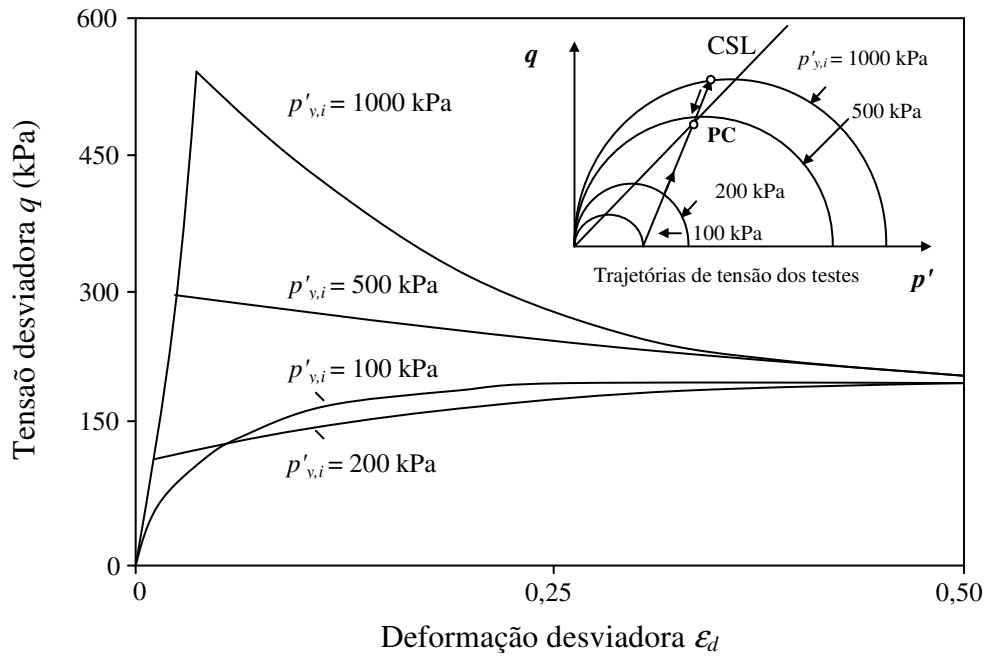


Observam ainda Liu e Carter (2002) que: "A parte elástica da deformação pode ser calculada por meio das equações (2.36) e (2.37). Os incrementos totais de deformação durante amolecimento podem então ser completamente determinados. Como o *amolecimento* é um processo controlado por deformação, a mudança no estado de tensão pode ser definida a partir do tamanho da superfície estrutural de escoamento corrente. Quando a condição  $\eta = M^*$  é atingida, a estrutura do solo deve estar completamente destruída, com  $\Delta e = 0$ , e assim a argila estruturada atinge o estado crítico de deformação."

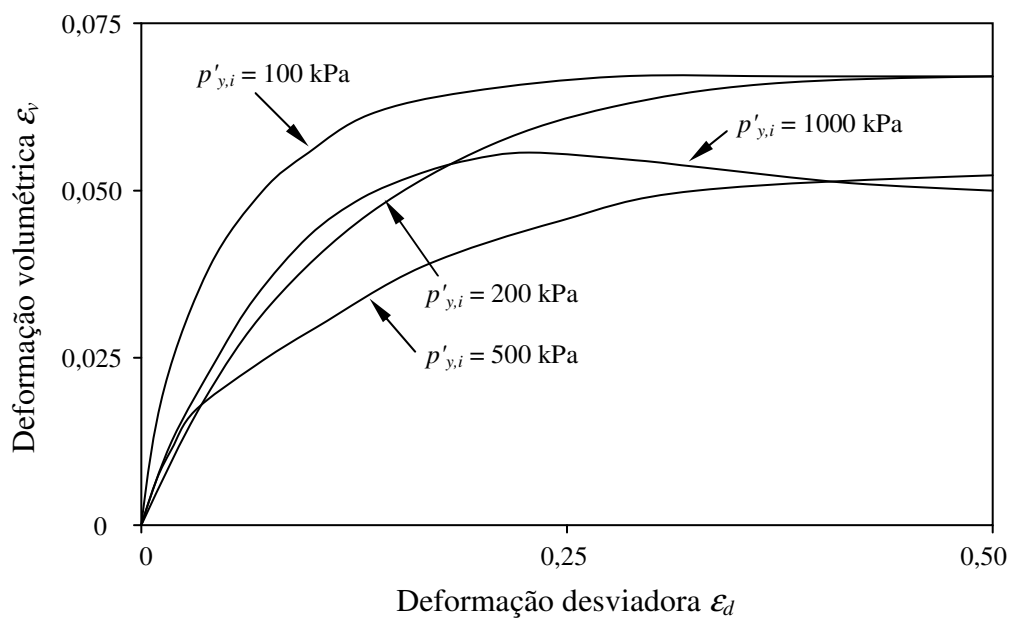
Deve ser observado que um solo pode atingir estado com  $\eta = M^*$ , mas com  $\Delta e \neq 0$ , tanto para escoamento virgem como para amolecimento. Tal caso pode ocorrer quando um solo atinge o estado crítico em carregamento situado inteiramente dentro da superfície de escoamento. Neste caso, o escoamento virgem tem início somente quando a superfície de escoamento é atingida e, de acordo com as equações (2.38) e (2.39), o solo está em estado onde ele pode ser distorcido continuamente sob volume constante ( $d\varepsilon_v^p = 0$  e  $d\varepsilon_s^p \rightarrow \infty$ ). Desta forma, o modelo proposto prevê que, sob trajetórias de tensões especiais, um solo pode atingir um estado crítico de deformação com sua estrutura ainda não tendo sido destruída completamente. Conseqüentemente, em tais casos o estado do solo não estará sobre a linha de estado crítico definida no espaço  $e - \ln p'$ .

A Figura 2.21 ilustra resultados tensão-deformação obtidos, com uso do modelo estruturado, para diferentes pressões iniciais de escoamento.

**Figura 2.21. Influência do tamanho inicial da superfície estrutural de escoamento na simulação de comportamento tensão-deformação (adaptado de Liu e Carter, 2002).**



**Figura 2.22. Influência do tamanho inicial da superfície estrutural de escoamento na simulação de comportamento de deformação volumétrica versus deformação desviadora (adaptado de Liu e Carter, 2002).**



Na Figura 2.21 pode-se observar que, para os casos em que a tensão de escoamento é atingida antes do ponto crítico (PC), caso de  $p'_{y,i} = 100$  e  $200$  kPa, o comportamento tensão-deformação corresponde ao de material com endurecimento. Para os casos em que a tensão de escoamento se situa além do ponto crítico, caso de  $p'_{y,i} = 500$  e  $1000$  kPa, ocorre amolecimento e a continuação do processo conduz ao ponto de estado crítico. Nestes dois últimos casos, em que ocorre amolecimento, observa-se o desenvolvimento de pico de resistência, na relação tensão desviadora – deformação desviadora.

A Figura 2.22 mostra resultados de deformação volumétrica versus deformação desviadora, correspondentes aos testes de compressão, indicados na Figura 2.21.

## 2.10. TEORIA DO ESTADO PERTURBADO

A Teoria do Estado Perturbado (DSC – Disturbed State Concept), proposta por Desai (2000), constitui-se numa abordagem original com o objetivo de unificar os modelos constitutivos para vários materiais aplicados na engenharia, como solos (argilas, areias), rochas, concreto, metais, materiais cerâmicos, etc., incluindo o seu comportamento especial junto a interfaces (Ibañez, 2003).

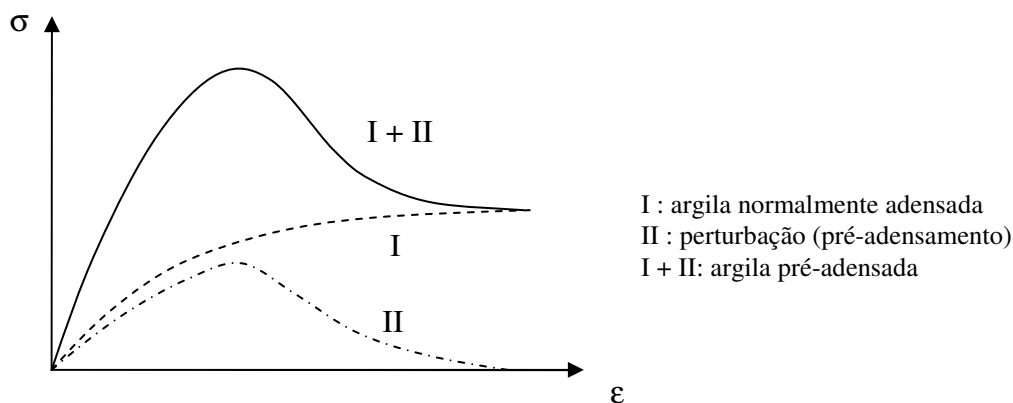
A Teoria do Estado Perturbado guarda semelhança com o modelo Cam-Clay Estruturado, no sentido de utilizar dois estados de referência, para descrever o comportamento tensão-deformação, um para o material intacto, ou melhor, *relativamente intacto* (RI – relatively intact), e outro, para o material *completamente ajustado* (FA – fully adjusted). Tais estados correspondem à condição de "material estruturado" e de "material com estrutura completamente destruída", respectivamente, do MCC. Tal conceito considera que a diferença de comportamento entre os dois estados é devida à perturbação produzida pelo carregamento, e que o comportamento real estará entre o de material *relativamente intacto* e tendendo para o de material *completamente ajustado*, com o aumento das deformações. Está implícita a idéia de convergência do material para estado crítico com a deformação.

O comportamento mecânico pode ser compreendido como uma resposta ponderada envolvendo simultaneamente ambas as fases, cada qual podendo ser descrita por distintos modelos constitutivos (Ibañez, 2003).

Segundo Ibañez (2003): "O conceito de estado perturbado foi proposto por Desai (1974) para caracterização do comportamento de argilas pré-adensadas, quando sugeriu a

idéia de que a resposta do solo poderia ser interpretada como uma composição da resposta da argila no estado normalmente adensado (estado de referência) e os efeitos de pré-adensamento, como perturbação adicional, como ilustra a Figura 2.23".

**Figura 2.23. Curva tensão-deformação de argila pré-adensada. Conceito de perturbação (modificado de Desai, 1974, por Ibañez, 2003).**



Ainda, segundo Ibañez (2003), a influência relativa da fase FA no comportamento geral do material é considerada no modelo DSC através da introdução de uma *função de perturbação D*, cujos valores variam entre 0 e 1, dependendo dos efeitos de vários fatores tais como a trajetória de deformações plásticas, o trabalho plástico, sucção, etc. A Figura 2.24 esquematiza a idéia da função de perturbação como função de ponderação entre os estados RI e FA.

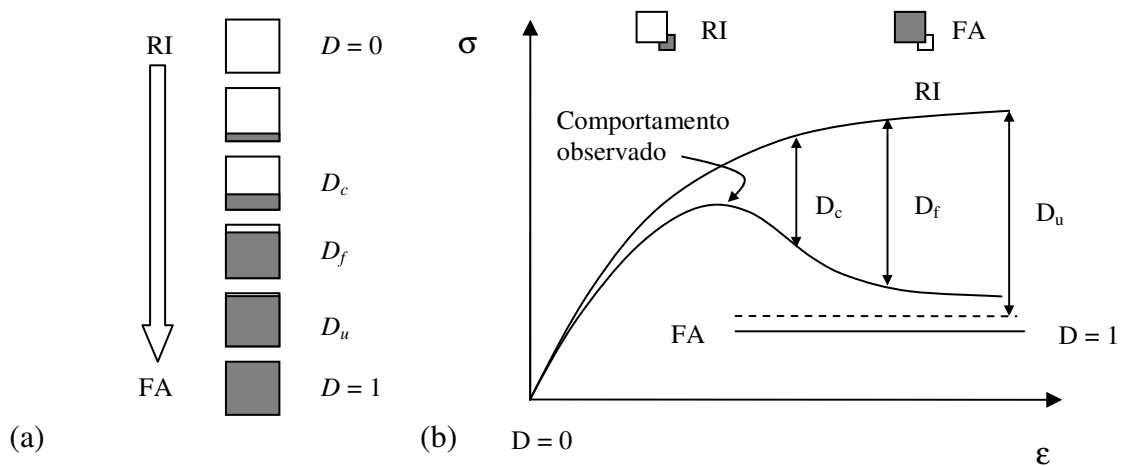
**Estado Relativamente Intacto – RI:** Estado livre de perturbações. Pode ser caracterizado com base em ensaios de laboratório, utilizando valores correspondentes às pequenas deformações. A relatividade inclusa na definição deve-se a que diferentes modelos podem ser empregados, e que fatores como densidade ou pressão influem na resposta. Assim, o estado RI pode ser definido para a densidade de campo, ou para a densidade máxima do material. A denominação *relativamente intacto* é utilizada para indicar que o estado inicial do material nem sempre coincide com o seu estado inalterado no campo.

**Estado FA:** "Neste estado o material deformado pode exibir respostas manifestas e não-manifestas. As primeiras podem ser quantificadas em ensaios de laboratório (por exemplo, endurecimento plástico), enquanto que as segundas refletem mudanças identificadas apenas



qualitativamente, como fraturamento do material, formação de bandas de cisalhamento, desintegração da estrutura, perda de cimentação entre partículas, anisotropias induzidas pelo estado de tensão, variações químicas, etc. O estado FA exibe caráter geralmente assintótico em relação às deformações, sendo normalmente definido pelo valor na ruptura ( $D_f$ ) ou pelo valor último ( $D_u$ ), conforme pode ser visto na Figura 2.24 (Ibañez, 2003).

**Figura 2.24. (a) Representação simbólica do DS; (b) Esquema de comportamento tensão-deformação como uma composição das respostas nas fases RI e FA (modificado de Desai, 2000).**



O comportamento do material no estado FA pode ser caracterizado de modos diversos, como, por exemplo: sólido em estado crítico, líquido confinado, ou como fissura ou vazio finito, entre outros.

Para solos não saturados, onde a função de perturbação pode ser relacionada ao nível de sucção, o estado completamente ajustado pode ser assumido como o correspondente à saturação completa, quando a sucção se anula.

**Função de Perturbação:** A função de perturbação pode ser colocada como uma medida do volume do solo no estado FA ( $V_c$ ) em relação ao volume de solo total ( $V$ ).

$$D = V_c / V \quad (2.41)$$

A função é expressa em termos de variáveis internas tais como a trajetória de deformações plásticas ou o trabalho plástico, densidade do material, grau de saturação ou

sucção, temperatura, número de ciclos, tempo, fatores químicos e ambientais, entre outros (Ibañez, 2003).

Por exemplo, expressão apresentada por Weibul (Ibañez, 2003, apud Kachanov, 1986) utiliza a trajetória de deformações plásticas, na forma de uma norma, como:

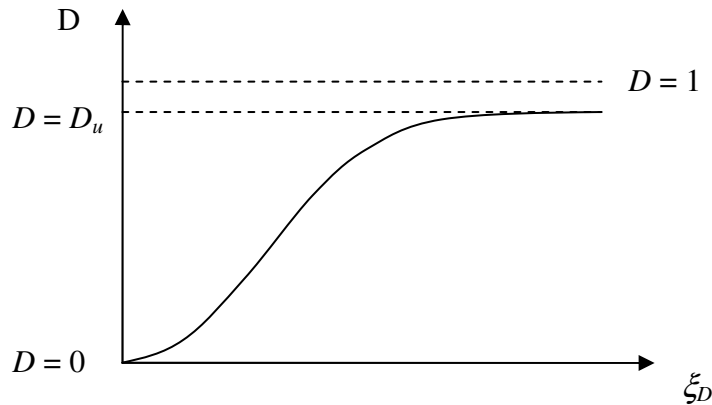
$$\xi_D = \int (dE_{ij}^p \cdot dE_{ij}^p)^{1/2} \quad (2.42)$$

A função de perturbação é colocada como função exponencial da variável  $\xi_D$ .

$$D = D_u [1 - \exp(-A \cdot \xi_D^Z)] \quad (2.43)$$

onde as grandezas  $D_u$ ,  $A$  e  $Z$  são constantes do material. A Figura 2.25 mostra a forma da função de Weibul.

**Figura 2.25. Representação esquemática da função exponencial de perturbação proposta por Weibul  $D(\xi_D)$  (modificado por Desai, 2000).**



**Deformações:** Na Teoria de Estado Perturbado as deformações são determinadas por meio de uma média ponderada entre as correspondentes ao estado *relativamente intacto* ( $\epsilon_{ij}^i$ ) e *completamente ajustado* ( $\epsilon_{ij}^c$ ), na forma.

$$\epsilon_{ij}^a = (1 - D)\epsilon_{ij}^i + D\epsilon_{ij}^c \quad (2.44)$$

E, de forma incremental, pode-se escrever:

$$d\epsilon_{ij}^a = (1 - D)d\epsilon_{ij}^i + D.d\epsilon_{ij}^c + dD.(\epsilon_{ij}^c - \epsilon_{ij}^i) \quad (2.45)$$

Relações similares a (2.44) e (2.45) existem para o índice de vazios corrente, bastando trocar a deformação  $\mathcal{E}_{ij}^i$  por  $e$ .

Em seu trabalho, Ibañez (2003) chama a atenção, que o uso desta formulação recai no uso de dois tensores para caracterizar o estado de deformação. Em alguns casos, entretanto, pode-se utilizar algumas simplificações que permitem o uso de um único tensor, simplificando a aplicação numérica do modelo em programas computacionais.

**Tensões:** De maneira análoga à empregada para a determinação das deformações, pode-se determinar o tensor de tensões como média ponderada dos tensores de tensão correspondentes aos estados RI e FA.

$$\sigma_{ij}^a = (1 - D)\sigma_{ij}^i + D.\sigma_{ij}^c \quad (2.46)$$

$$d\sigma_{ij}^a = (1 - D)d\sigma_{ij}^i + D.d\sigma_{ij}^c + dD.(\sigma_{ij}^c - \sigma_{ij}^i) \quad (2.47)$$

A componente hidrostática é assumida, como aproximação,  $J_I^a = J_I^c = J_I^i = J_I$ , e as componentes de desvio são expressas por:

$$S_{ij}^a = (1 - D)S_{ij}^i + D.S_{ij}^c \quad (2.48)$$

Admite-se também que haja proporcionalidade entre os tensores de tensão associados aos estados RI e FA, ou seja,  $(S_{ij}^c = k.S_{ij}^i)$ , onde  $k$  é um fator de proporcionalidade. Logo, a relação diferencial entre os incrementos de tensões desviadoras pode ser escrita como:

$$dS_{ij}^c = k.dS_{ij}^i + dk.S_{ij}^i \quad (2.49)$$

Da hipótese de proporcionalidade entre os tensores, antes citada, decorre que os segundos invariantes de desvio nos estados RI e FA se correlacionam na seguinte forma:

$$J_{2D}^c = \frac{1}{2}.S_{ij}^c.S_{ij}^c = \frac{k^2}{2}.S_{ij}^i.S_{ij}^i = \frac{k^2}{2}.J_{2D}^i \quad (2.50)$$

Empregando-se as expressões desenvolvidas nas relações anteriores, na relação incremental (2.47), obtém-se a relação incremental de tensões em função dos incrementos de tensão apenas do estado RI, na forma:

$$d\sigma_{ij}^a = [D.(k - 1) + 1]d\sigma_{ij}^i - D.(k - 1).\frac{dJ_1.\delta_{ij}}{3} + [dD.(k - 1) + dk.D]S_{ij}^i \quad (2.51)$$

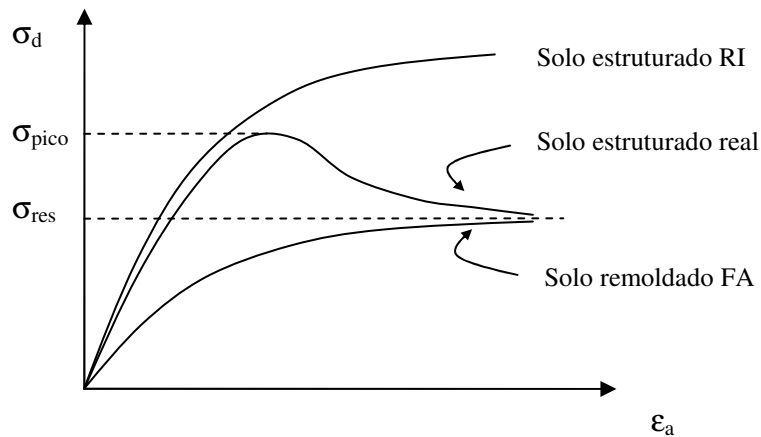
**Relações tensão x deformação:** A expressão geral da lei constitutiva na Teoria do Estado Perturbado pode ser colocada como:

$$d\sigma_{ij}^a = C_{ijkl}^{DSC} d\epsilon_{kl}^i \quad (2.52)$$

onde os termos  $C_{ijkl}^{DSC}$  são os termos da matriz constitutiva elasto-plástica que relaciona os incrementos ponderados de tensão com os incrementos de deformação no estado RI.

No caso de solos estruturados a Teoria do Estado Perturbado pode ser aplicada, considerando o estado inicial, do solo estruturado, como o estado *relativamente intacto* e o final, do solo remoldado, com estrutura completamente destruída, como o estado *completamente ajustado*. A Figura 2.26 ilustra a conceituação para solo estruturado.

**Figura 2.26. Aplicação da teoria DSC no caso de solos estruturados (adaptado de Ibañez, 2003).**



O processo de desestruturação do solo, por efeito do carregamento, pode ser representado pela função de perturbação, por meio de função que reproduza a perda de resistência e a taxa de diminuição de resistência com a deformação. Esta função pode ser expressa em termos de variáveis internas como, trajetória de deformações plásticas ou sucção.

A Teoria do Estado Perturbado gera modelos que podem descrever comportamento de plasticidade com endurecimento, e também com amolecimento. E, como antes citado, permite descrever até comportamento de solos estruturados.

## 2.11. MODELO BARCELONA

O Modelo Barcelona, aplicável a solos parcialmente saturados, foi desenvolvido por Alonso, Gens e Josa (1990). O modelo utiliza conceitos da teoria da Plasticidade com endurecimento e se reduz a modelo de estado crítico quando o solo atinge saturação total.

Estudos de solos parcialmente saturados utilizam dois campos independentes de tensões efetivas, escolhidos entre campos de tensões definidos como: de excesso de tensão total sobre a pressão do ar, de excesso de tensão total sobre a pressão da água e de sucção, diferença entre a pressão do ar e da água, nos vazios do solo.

Neste modelo os autores escolheram como primeiro campo, o de excesso de tensão total sobre a pressão do ar, e como segundo, o campo de tensões de sucção. Estes campos são definidos de acordo com as expressões:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u_a \cdot \delta_{ij} \quad (2.53)$$

$$s = (u_a - u_w) \cdot \delta_{ij} \quad (2.54)$$

onde  $\sigma'_{ij}$  é o excesso de tensão total, e  $u_a$  a  $u_w$  são a pressão do ar e da água nos vazios do solo, respectivamente. A sucção, designada por  $s$ , é a diferença entre a pressão do ar e da água, grandeza que se anula pela saturação do solo, quando a pressão da água iguala a pressão do ar.

Os estados de tensão possíveis dentro de um solo parcialmente saturado podem ser representados em gráfico  $p \times q \times s$ . A Figura 2.27 mostra superfície móvel de plastificação, que no estado saturado, onde  $s = 0$ , se resume ao Modelo Cam Clay Modificado.

### Formulação para estado isotrópico de tensão

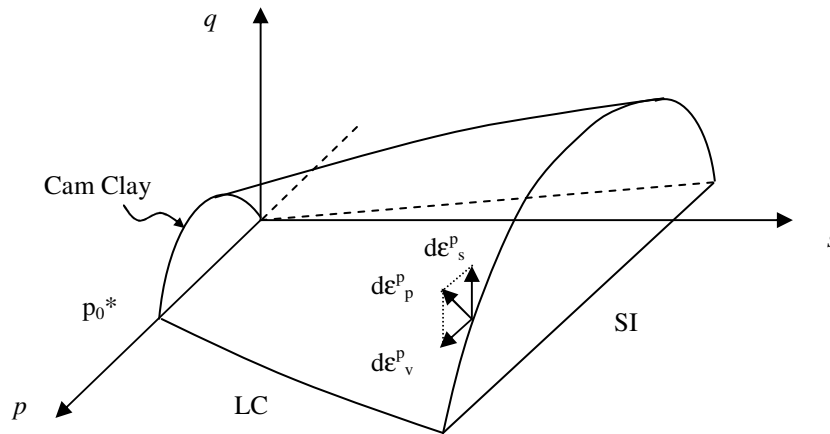
Alonso et al (1990) utilizaram gráficos  $v \times \ln p$ , para representar trajetórias de compressão isotrópica em solos parcialmente saturados, onde  $v = I + e$  é o volume específico e  $p$  tem aqui o significado de tensão normal média  $p = \sigma_m - u_a$ .

Para ensaios de *compressão isotrópica* sob valor constante de sucção, foi verificada experimentalmente a relação logarítmica a seguir:

$$v = N(s) - \lambda(s) \cdot \ln \frac{p}{p^c} \quad (2.55)$$

onde  $\lambda$  e  $N$  são parâmetros dependentes da sucção e  $p^c$  representa a tensão média de referência quando  $v = N(s)$ .

**Figura 2.27. Vista tridimensional das superfícies de escoamento no espaço (p, q, s)**  
(Alonso et al, 1990).



Para trajetórias de descarregamento ou recarregamento, isotrópicas, sob sucção constante, os autores admitiram comportamento elástico, que atende à relação diferencial seguinte:

$$dv = -\kappa \cdot \frac{dp}{p} \quad (2.56)$$

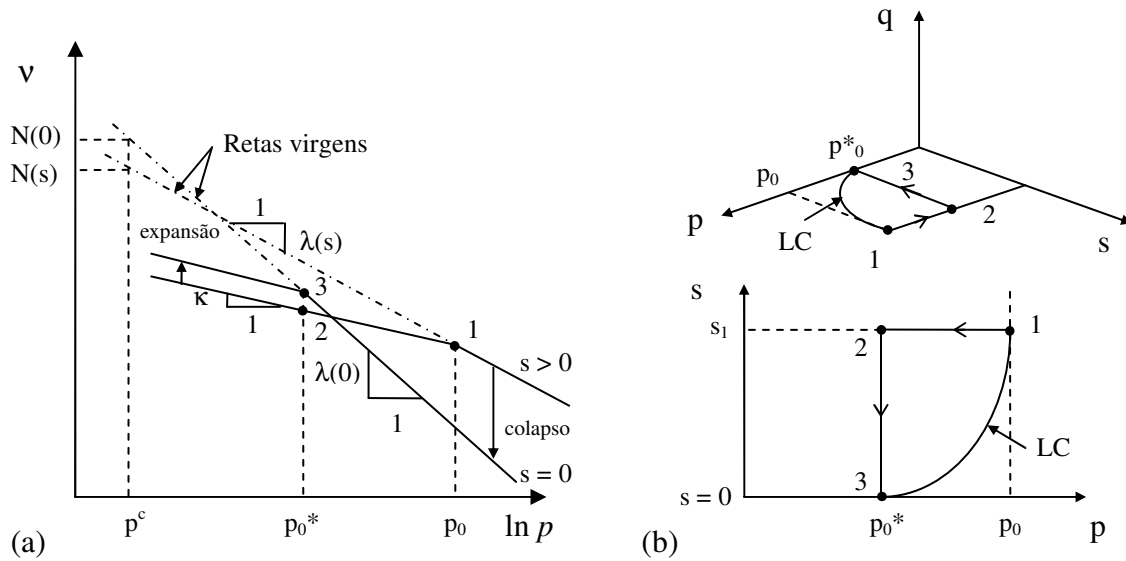
onde o parâmetro  $\kappa$  é assumido constante.

A Figura 2.28(a) mostra representação de dois ensaios de compressão isotrópica, um com amostra saturada ( $s = 0$ ) e outro com amostra parcialmente saturada com sucção  $s$ . As pressões de pré-adensamento, correspondem a  $p_0^*$  (ponto 3) e  $p_0$  (ponto 1), para o solo saturado e parcialmente saturado, respectivamente, com  $p_0 > p_0^*$ .

Para estabelecer uma relação entre as pressões  $p_0$  e  $p_0^*$ , observe-se que é possível atingir um mesmo volume específico final, o ponto 3 na Figura 2.28(a), por dois caminhos diferentes. O primeiro caminho é percorrido por consolidação isotrópica, de amostra saturada, até atingir o ponto 3, sob pressão  $p_0^*$ . O segundo caminho, de consolidação de amostra parcialmente saturada, é percorrido sob sucção  $s$ , até a pressão  $p_0$ , isto é, até o ponto 1, e, a seguir, por descarregamento, ainda sob sucção constante, até a pressão  $p_0^*$ , que

coincide com o ponto 2. E, finalmente, permitindo-se a saturação da amostra pela redução da sucção até zero, atingindo o ponto 3, em processo de umedecimento, ou de absorção de água.

**Figura 2.28. Relação entre pressões de consolidação  $p_0$  e  $p_0^*$ : (a) Curvas de compressão para solo saturado e não saturado; (b) trajetórias de tensões e curva de escoamento no espaço de tensões ( $p, s$ ) (modificado de Alonso et al, 1990).**



O processo de umedecimento ocorre de forma elástica e configura, portanto, forma de expansão reversível. Matematicamente pode ser representado por expressão similar à expressão (2.56).

$$dv = -\kappa_s \cdot \frac{dp}{(s + p_{at})} \quad (2.57)$$

onde a pressão atmosférica  $p_{at}$  é incluída no denominador para evitar a produção de taxas infinitas de variação à medida que a sucção tende a zero.

O volume específico final atingido pelos dois caminhos é igual, assim é válida a identidade:

$$v_1 + \Delta v_p (1 \rightarrow 2) + \Delta v_s (2 \rightarrow 3) = v_3 \quad (2.58)$$

Levando em conta as expressões e valores indicados na Figura 2.28(a) pode-se colocar a identidade (2.58) na forma a seguir, que estabelece uma relação entre  $p_0$  e  $s$  como função

dos valores de referência de pressão ( $p_0^*$ ,  $p^c$ ) e quatro parâmetros do material ( $N(s)$ ,  $\lambda(s)$ ,  $\kappa$ ,  $\kappa_s$ ).

$$\left[ N(s) - \lambda(s) \cdot \ln \frac{p_0}{p^c} \right] + \left[ \kappa \cdot \ln \frac{p_0}{p_0^*} \right] + \left[ \kappa_s \cdot \ln \frac{s + p_{at}}{p_{at}} \right] = \left[ N(0) - \lambda(0) \cdot \ln \frac{p_0^*}{p^c} \right] \quad (2.59)$$

Esta expressão pode ser simplificada por uma escolha conveniente da pressão de referência  $p^c$ , colocando-se:

$$\Delta v(p^c) \Big|_s^0 = N(0) - N(s) = \kappa_s \cdot \ln \frac{s + p_{at}}{p_{at}} \quad (2.60)$$

onde  $p^c$  é a pressão média líquida em que é atingida a reta virgem saturada, partindo de condição parcialmente saturada, por meio de trajetória de umedecimento que envolve somente expansão elástica. A substituição da equação (2.60) em (2.59) produz redução desta a:

$$\lambda(s) \cdot \ln \frac{p_0}{p^c} - \kappa \cdot \ln \frac{p_0}{p_0^*} = \lambda(0) \cdot \ln \frac{p_0^*}{p^c} \quad (2.61)$$

### Superfícies de escoamento LC

A equação (2.61) é equivalente a:

$$\left( \frac{p_0}{p^c} \right) = \left( \frac{p_0^*}{p^c} \right)^{\left( \frac{\lambda(0) - \kappa}{\lambda(s) - \kappa} \right)} \quad (2.62)$$

"Esta equação define o conjunto de valores de tensão de escoamento  $p_0$  para cada valor de sucção adotada, o que pode ser considerado como uma família de curvas de escoamento em espaço  $(p, s)$ . Para isolar uma curva de escoamento em particular é necessário especificar a pressão média líquida de pré-adensamento para condições saturadas ( $p_0^*$ ), a qual pode ser vista como um parâmetro de endurecimento na equação (2.62). Esta equação tem papel central no modelo em questão, e explica não somente o aumento aparente na tensão de pré-adensamento associada com aumento de sucção, mas também o fenômeno de colapso observado em trajetórias de umedecimento. Por esta razão estas curvas são denominadas *curvas de escoamento LC* (loading-collapse). Uma curva LC está indicada na Figura 2.28(b) passado pelos pontos 1 e 3. Notar que para  $p_0^* = p^c$  a curva de escoamento LC torna-se uma



linha reta ( $p_0 = p^c$ ). Neste caso mudanças na sucção  $s$  não produzem deformações plásticas. Somente a componente elástica, como expresso pela equação (2.57) é mantida" (Alonso et al, 1990).

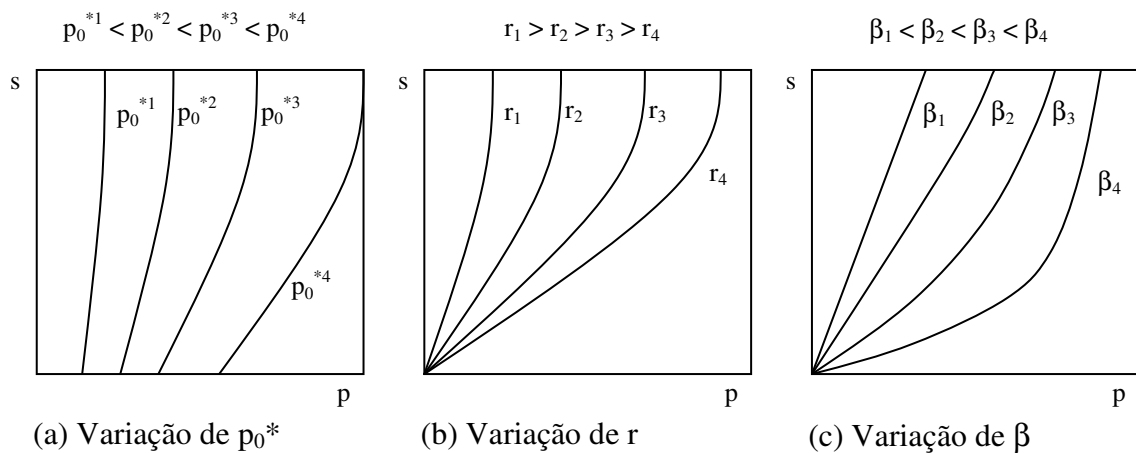
A definição das curvas LC, por meio da expressão (2.62) depende da determinação dos parâmetros  $\lambda(s)$  e  $\kappa$ . O parâmetro  $\kappa$  é assumido como constante, e pode ser determinado a partir de trajetórias de tensão, que envolvam descarregamento, em ensaios isotrópicos. Por outro lado, para o parâmetro  $\lambda(s)$  o que existe é uma relação funcional, já que a observação de resultados experimentais indica que a rigidez do solo cresce com o aumento da sucção. Alonso et al (1990) apresentaram uma expressão que relaciona o parâmetro  $\lambda(0)$ , para condição saturada, ao parâmetro  $\lambda(s)$ , para sucção  $s \neq 0$ . O crescimento da rigidez é assumido de forma assintótica e é modelado pela introdução de dois novos parâmetros  $r$  e  $\beta$ .

$$\lambda(s) = \lambda(0) \cdot [(1 - r) \cdot \exp(-\beta \cdot s) + r] \quad (2.63)$$

onde  $r$  é uma constante relacionada ao valor máximo da rigidez do solo (para uma sucção infinita)  $r = \lambda(s \rightarrow \infty) / \lambda(0)$ , e  $\beta$  é um parâmetro que controla a taxa de crescimento da rigidez do solo com a sucção.

A Figura 2.29 mostra, de modo esquemático, a geometria das curvas LC no plano ( $p$ ,  $s$ ) e a sua variação para diferentes valores de  $p_0^*$ ,  $r$  e  $\beta$ , tomando-se valores fixos para  $p^c$ ,  $\lambda(0)$  e  $\kappa$ .

**Figura 2.29. Superfícies LC no plano ( $p$ ,  $s$ ) (modificado de Alonso et al, 1990).**



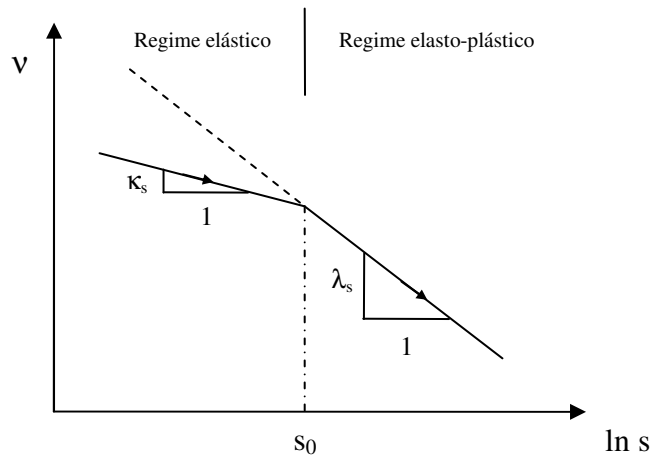
## Superfícies de escoamento SI

Um aumento de sucção também pode produzir deformações irreversíveis. Esta constatação levou Alonso et al (1990) a propor um critério de escoamento para a sucção, tendo por base o maior valor de sucção  $s_0$ , já atingido no material. A condição de escoamento foi expressa simplesmente como:

$$s = s_0 \quad (2.64)$$

Estas superfícies determinadas por (2.64) são denominadas superfícies SI (suction increase). Os autores do modelo assumiram uma lei de variação linear entre  $v$  e  $\ln(s + p_{at})$ , tanto para regime elástico como para regime elasto-plástico. A Figura 2.30 ilustra o critério e razão de uso de relações logarítmicas.

**Figura 2.30. Definição de sucção de escoamento  $s_0$  (modificado de Alonso et al, 1990).**



Para escoamento virgem, e, portanto, elasto-plástico foi proposta relação.

$$dv = -\lambda_s \cdot \frac{ds}{(s + p_{at})} \quad (2.65)$$

E para processos de secagem e umedecimento reversíveis, isto é, elásticos, foi proposta a relação seguinte, similar à equação (2.57).

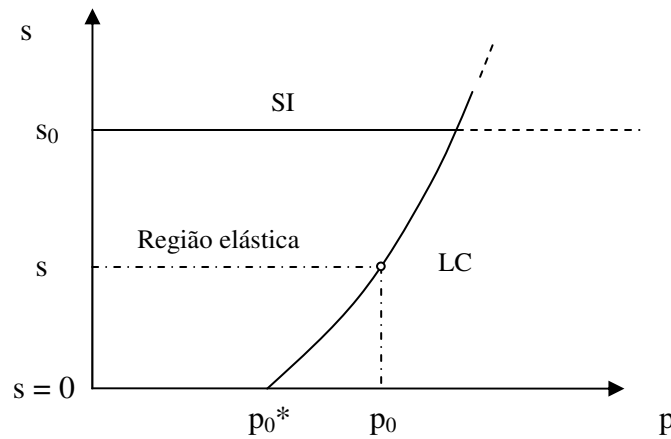
$$dv = -\kappa_s \cdot \frac{ds}{(s + p_{at})} \quad (2.66)$$

Alonso et al (1990) assumiram os parâmetros  $\lambda_s$  e  $\kappa_s$  como constantes, com a ressalva de que poderia ser esperada alguma dependência com a tensão isotrópica  $p$ .

### Leis de endurecimento (para estado isotrópico de tensões)

No plano  $(p, s)$  a combinação das superfícies de escoamento LC e SI limita uma região elástica, como pode ser visto na Figura 2.31.

**Figura 2.31. Superfícies de escoamento LC (*loading-collapse*) e SI (*suction increase*)**  
(adaptado de Alonso et al, 1990).



Na região elástica um incremento de tensão isotrópica  $dp$  induz um incremento de deformação volumétrica compressiva, expresso com auxílio da equação (2.56), como:

$$d\varepsilon_{vp}^e = -\frac{dv}{v} = \frac{\kappa}{v} \cdot \frac{dp}{p} \quad (2.67)$$

Quando a tensão isotrópica  $p$ , sob sucção  $s$ , atinge o valor de escoamento  $p_0$  (ponto sobre LC, na Figura 2.31), o incremento de deformação volumétrica total, devido à variação de tensão isotrópica, pode ser calculado com o emprego da equação (2.55), de forma incremental.

$$d\varepsilon_{vp} = \frac{\lambda(s)}{v} \cdot \frac{dp_0}{p_0} \quad (2.68)$$

e o incremento de deformação plástica volumétrica, devido ao incremento de tensão  $dp_0$ , é obtido pela diferença entre as equações (2.68) e (2.67), como:

$$d\epsilon_{vp}^p = \frac{\lambda(s) - \kappa}{\nu} \cdot \frac{dp_0}{p_0} \quad (2.69)$$

Utilizando a relação (2.62), para a curva de escoamento LC, pode-se escrever a equação (2.69) como:

$$d\epsilon_{vp}^p = \frac{\lambda(0) - \kappa}{\nu} \cdot \frac{dp_0^*}{p_0^*} \quad (2.70)$$

relação que permite expressar o cálculo de incremento de deformação volumétrica plástica, para sucção qualquer  $s$ , em função de incremento equivalente para o estado saturado ( $s = 0$ ).

De forma semelhante, incrementos de sucção dentro da região elástica produzirão somente deformações elásticas, que podem ser expressas como:

$$d\epsilon_{vs}^e = \frac{\kappa_s}{\nu} \cdot \frac{ds}{(s + p_{at})} \quad (2.71)$$

e, uma vez atingido valor de escoamento de sucção  $s_0$ , o incremento de deformação elasto-plástica volumétrica total é dado por

$$d\epsilon_{vs} = \frac{\lambda_s}{\nu} \cdot \frac{ds_0}{(s_0 + p_{at})} \quad (2.72)$$

e o incremento de deformação plástica volumétrica total, devido à sucção, é obtido pela diferença entre as expressões (2.71) e (2.72), considerando  $s = s_0$ , em (2.71)

$$d\epsilon_{vs}^p = \frac{\lambda_s - \kappa_s}{\nu} \cdot \frac{ds_0}{(s_0 + p_{at})} \quad (2.73)$$

As deformações irreversíveis controlam a posição das superfícies de escoamento LC e SI, através das equações (2.70) e (2.73). Este tipo de endurecimento implica em movimento independente das duas superfícies no espaço  $(p, s)$ , embora existam evidências de acoplamento entre elas (Alonso et al, 1990). Os citados autores admitiram que, em primeira aproximação, ambos os conjuntos de deformações plásticas,  $d\epsilon_{vp}^p$  e  $d\epsilon_{vs}^p$ , produzem efeitos semelhantes. Desta forma assumiram um acoplamento das duas superfícies de escoamento, vinculando as suas posições por meio da deformação volumétrica plástica total,  $d\epsilon_v^p = d\epsilon_{vp}^p + d\epsilon_{vs}^p$ , e propuseram uma lei de endurecimento na forma seguinte.

$$\frac{dp_0^*}{p_0^*} = \frac{\nu}{\lambda(0) - \kappa} \cdot d\epsilon_v^p \quad (2.74)$$

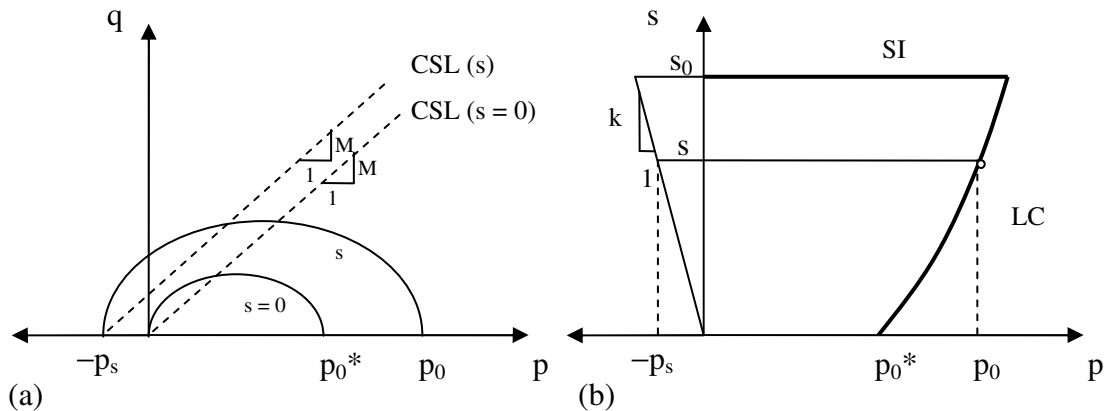
$$\frac{ds_0}{(s_0 + p_{at})} = \frac{\nu}{\lambda_s - \kappa_s} \cdot d\epsilon_v^p \quad (2.75)$$

### Formulação para estados triaxiais de tensões

Para consideração de estados triaxiais de tensão resta incorporar o efeito das tensões desviadoras  $q$ , e os efeitos de deformações cisalhantes decorrentes, aos efeitos de estados isotrópicos de tensão descritos nos parágrafos anteriores.

Para a descrição do estado saturado, foi adotado por Alonso et al (1990) o modelo Cam Clay Modificado. E para estados parcialmente saturados foi admitido que as superfícies de escoamento, para  $s \neq 0$ , também podem ser adequadamente descritas por elipses, que apresentam uma pressão de consolidação isotrópica  $p_0$ , que se situa sobre uma curva LC, como mostrado na Figura 2.32.

**Figura 2.32. Superfícies de escoamento no espaço  $(p, q, s)$ : (a) projeção sobre plano  $(q, s)$  e (b) plano  $(p, s)$  (Alonso et al, 1990).**



Para definir a elipse é também necessário definir os estados de ruptura. Uma linha paralela à linha de estado crítico para sucção nula representa o efeito de aumento de coesão induzido pela sucção. A sucção aumenta a coesão, mas não altera a inclinação  $M$  da reta de estado crítico. Desta forma, no modelo Barcelona, não se tem uma linha de estado crítico, mas uma família de retas, correspondentes às elipses desde  $s = 0$  até  $s = s_0$ .

Se o aumento da coesão tem relação linear com a sucção então as elipses interceptam o eixo  $p$  no ponto:

$$p = -p_s = -k.s \quad (2.76)$$

onde  $k$  é uma constante, com significado indicado na Figura 2.32(b).

As elipses que compõem a superfície de escoamento, nos planos  $(p, q)$ , e que se estendem entre  $-p_s(s)$  e  $+p_0(s)$ , têm equação geral dada por

$$M^2.(p + p_s).(p_0 - p) - q^2 = 0 \quad (2.77)$$

Alonso et al (1990) propuseram extensão das linhas de escoamento de sucção  $IS$ , no plano  $(p, s)$ , na região  $q > 0$ , ou seja, constituindo equações de planos verticais paralelos ao plano  $(p, q)$ . A representação das superfícies de escoamento descritas pode ser vista na Figura 2.27. A Figura 2.27 deve ser vista como resultado da interação dos dois campos de tensões efetivas necessários para a descrição do comportamento de solos parcialmente saturados.

Para definição da direção dos incrementos plásticos de deformação, associados às superfícies de escoamento definidas por (2.77), Alonso et al (1990) adotaram uma regra de fluxo não associada, segundo os planos de sucção  $s = \text{constante}$ . Comentam os citados autores, que é fato conhecido que modelos de estado crítico superestimam valores de  $K_0$  (coeficiente de empuxo no repouso), e para evitar tal inconveniente, a regra de fluxo, obtida a partir de (2.77), foi modificada pela introdução de um parâmetro  $\alpha$  (Ohmaki, 1982, apud Alonso et al 1990), resultando na seguinte expressão.

$$\frac{d\varepsilon_s^p}{d\varepsilon_{vp}^p} = \frac{2q\alpha}{M^2(2p + p_s - p_0)} \quad (2.78)$$

onde  $\alpha$  é escolhido de modo que a regra de fluxo prediga deformação lateral zero para estados correspondentes aos valores da expressão de Jaky ( $K_0 = 1 - \sin \phi' = (6-2M)/(6 + M)$ ). As componentes de incremento plástico ( $d\varepsilon_{vp}^p$ ,  $d\varepsilon_{vs}^s$ ) associadas com esta superfície de escoamento podem ser determinadas pela aplicação de procedimento padrão de plasticidade com endurecimento.

Para a segunda superfície de escoamento ( $s = s_0$ ) o vetor de incremento plástico induzido por aumento de sucção, tem componentes ( $d\varepsilon_{vs}^p$ , 0), onde a componente  $d\varepsilon_{vs}^p$  é determinada pela equação (2.73).

Os incrementos elásticos, produzidos pelos incrementos de tensão desviadora  $dq$ , podem ser calculados pela expressão.

$$d\epsilon_s^e = \frac{2}{3}(d\epsilon_1 - d\epsilon_3) = \frac{dq}{3G} \quad (2.79)$$

A calibração do modelo exige a realização de uma série de ensaios que permitam isolar o efeito das variáveis, ou ao menos, reduzi-los, para simplificar a interpretação dos ensaios.

"O modelo Barcelona é bastante geral e versátil para representação das principais características de comportamento de solos não saturados. Dos dez parâmetros do material, quatro correspondem ao modelo Cam Clay Modificado (solo saturado) e os seis parâmetros adicionais são necessários para descrever aspectos próprios do comportamento de solos não saturados, como a perda de rigidez e da resistência com a diminuição do valor da sucção  $s$  e o fenômeno de colapso e moderada expansão do solo com o umedecimento.

"O modelo representa, de maneira simples, a expansão de solos de baixa a moderada plasticidade, mas ainda não é capaz de representar de maneira adequada a verificada em solos altamente expansíveis (Ibañez, 2003)".

## **2.12. MODELO DE PLASTICIDADE COM DANO ACOPLADO**

O modelo exposto a seguir, de hiperplasticidade com dano acoplado, permite modelar comportamento de solos estruturados. O modelo é capaz de representar comportamento de materiais com endurecimento, amolecimento e desestruturação por dano.

Aplicação do modelo a solos residuais e extensão do modelo a solos parcialmente saturados são desenvolvidas na sequência deste trabalho.

Segundo Einav et al (2007), comportamento inelástico de materiais tem sido modelado com sucesso, utilizando dois enfoques distintos: plasticidade e mecânica do dano. A teoria da plasticidade é muito utilizada na modelagem de metais dúcteis, e tem também sido aplicada a geomateriais. Ela é baseada no conceito de deformações aditivas elásticas e plásticas, onde as últimas ocorrem uma vez que um critério de escoamento seja satisfeito. Teorias de plasticidade incluindo princípios termodinâmicos deram origem ao que se denomina de Hiperplasticidade (Houlsby; Puzrin, 2000). A mecânica do dano contínuo (CDM –

Continuum Damage Mechanics) teve início com Kachanov (1958). O dano em materiais é o processo progressivo pelo qual eles quebram e assim perdem resistência e rigidez. Este processo é representado na CDM pela introdução de uma "variável interna de dano". Enquanto alguns enfoques apresentados na literatura têm base puramente fenomenológica, em outros têm sido levado em conta observância de princípios termodinâmicos.

No trabalho de Einav et al (2007) é apresentada a CDM dentro do contexto da hiperplasticidade, unindo os dois conceitos — plasticidade e dano — dentro de uma única teoria. É mostrado que, descrição integral de modelo envolvendo plasticidade e dano acoplado, pode ser expressa por meio da definição de dois potenciais, e que é possível derivar as relações constitutivas por diferenciação direta, em caminho que assegura consistência com as leis da termodinâmica.

O enquadramento dentro da Hiperplasticidade, de modelo de plasticidade com dano acoplado, permite a formulação de modelos, que podem variar entre modelos hiperelásticos com dano associado (sem plasticidade) e modelos hiperplásticos (sem dano).

A diferença entre modelos hiperelásticos com dano e modelos de plasticidade decorre do significado físico das variáveis internas, que por sua vez decorrem da natureza funcional dos potenciais. Para processos independentes do tempo "rate independents" é habitual assumir a existência de uma superfície de escoamento para o dano. Aqui, ao contrário, a superfície de escoamento é derivada a partir da admissão da existência de uma função potencial de dissipação, e a evolução da variável interna de dano é definida a partir das propriedades do potencial de dissipação. Em alguns modelos a evolução do dano é postulada como uma lei de evolução separada. Nenhuma hipótese adicional é necessária na hiperplasticidade (Einav et al, 2007).

As variáveis internas de dano podem ser de tipo escalar, ou tensorial. No caso de solos em que não ocorre abertura de fissuras e propagação de fraturas, sendo preservado o contacto entre grãos, é razoável assumir variáveis de tipo escalar e dano isotrópico.

A combinação de hiperplasticidade com dano deu origem a duas classes de modelos. À primeira classe pertencem os *modelos hiperplásticos com dano não-acoplado*, nos quais dano e plasticidade são processos independentes, embora possam ocorrer simultaneamente, sob certas condições. À segunda classe pertencem os *modelos hiperplásticos com dano acoplado*, nos quais dano e plasticidade sempre ocorrem simultaneamente.

A descrição a seguir apresenta enfoque utilizado por Einav et al (2007) para derivar modelos termomecânicos, e que foi originalmente utilizada por Houlsby e Puzrin (2000) para



derivar modelos elasto-plásticos, dentro da Hiperplasticidade. Os processos considerados são idealizados como independentes do tempo, isotérmicos e envolvendo somente pequenas deformações. A formulação é apresentada em termos de um número arbitrário de variáveis internas. O estado local do material é assumido ser completamente definido pelo conhecimento de: (a) tensor de deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , (b) um conjunto de variáveis internas  $\tilde{\alpha}_i$ ,  $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_N)$ , (c) a entropia  $s$ , embora esta não entre na formulação para casos isotérmicos

Para deformações isotérmicas de um contínuo que sofre pequenas deformações, a primeira e a segunda lei da Termodinâmica, foram expressas por Collins e Tai (2005) como:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{W} = \dot{\Psi} + \dot{\Phi}, \quad \text{onde } \dot{\Phi} \geq 0 \quad (2.80)$$

onde  $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathcal{M}, s)$  é a função energia livre e  $\dot{\Psi}$  é a sua derivada em relação ao tempo. Esta função energia livre depende das "variáveis de estado", que definem de maneira única o estado corrente do elemento contínuo. Por sua vez,  $\dot{W}$  é a taxa de trabalho aplicada pelas tensões  $\boldsymbol{\sigma}$ , e  $\dot{\Phi}$  é a taxa de dissipação, que nunca pode ser negativa. O uso do "til" para as taxas de trabalho e de dissipação é para enfatizar que, diferentemente de  $\dot{\Psi}$ , estas funções não são derivadas em relação ao tempo de alguma função de estado, e que suas integrais são dependentes da trajetória de tensões, ou deformações, com o "tempo".

A primeira Lei da Termodinâmica estabelece a existência de uma função de estado, chamada de energia interna  $\Psi$ . Em condições isotérmicas esta função pode ser substituída pela energia livre de Helmholtz  $f = f(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathcal{M})$ , que depende somente de variáveis de estado cinemáticas. Por meio de uma transformação de Legendre, aplicada sobre o potencial de Helmholtz, pode-se obter o potencial de energia livre de Gibbs  $g = g(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{M})$ , onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensões. Os dois potenciais de energia, de Helmholtz e de Gibbs, estão relacionados por

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{M}) = f(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathcal{M}) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.81)$$

O formalismo de Houlsby e Puzrin (2000) requer que, se o potencial  $f$  de Helmholtz é definido, então

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.82)$$

ou alternativamente, se o potencial  $g$  de Gibbs é definido então

$$\varepsilon = -\frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (2.83)$$

As tensões generalizadas, associadas às variáveis internas, são definidas como:

$$\tilde{\chi}_i = -\frac{\partial f}{\partial \tilde{\alpha}_i} = -\frac{\partial g}{\partial \tilde{\alpha}_i} \quad (2.84 - a,b)$$

É assumido que a dissipação mecânica  $d$  é uma função estritamente não-negativa de ambos, do estado do material e da taxa de variação das variáveis internas  $d = d^f(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathcal{M}, \dot{\mathcal{M}}) = d^g(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{M}, \dot{\mathcal{M}}) \geq 0$ . A função  $d$  aqui referida é a mesma função  $\tilde{\Phi}$  ( $d \equiv \tilde{\Phi}$ ) de (2.80). No caso de processos independentes do tempo, a função de dissipação é homogênea de primeira ordem das taxas de variáveis internas. Quando o conjunto de variáveis internas consiste de uma única variável interna, esta homogeneidade pode ser expressa pela equação de Euler:

$$d = \frac{\partial d}{\partial \dot{\tilde{\alpha}}} \bullet \dot{\tilde{\alpha}} \quad (2.85)$$

E, de forma semelhante, para um conjunto de  $N$  variáveis internas, pode-se escrever:

$$d = \sum_{i=1}^N \frac{\partial d}{\partial \dot{\tilde{\alpha}}_i} \bullet \dot{\tilde{\alpha}}_i = \sum_{i=1}^N \tilde{\chi}_i \bullet \dot{\tilde{\alpha}}_i \quad (2.86)$$

onde  $\tilde{\chi}_i = \partial d / \partial \dot{\tilde{\alpha}}_i$  é designada como *tensão generalizada de dissipação*.

Observando-se que no caso de processos isotérmicos, pode-se substituir a função energia livre interna  $\Psi$ , pela função energia livre de Helmholtz  $f$ , e utilizando para a função de dissipação a notação ( $d \equiv \tilde{\Phi}$ ), pode-se reescrever a equação (2.80) como.

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{f} + d \quad (2.87)$$

Desenvolvendo-se a derivada da função de Helmholtz em relação ao tempo e usando a equação (2.86) para a função de dissipação  $d$ , a equação (2.87) toma a forma

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{\alpha}_i} : \dot{\tilde{\alpha}}_i + \frac{\partial d}{\partial \dot{\tilde{\alpha}}_i} : \dot{\tilde{\alpha}}_i \quad (2.88)$$

Considerando-se que as variáveis cinemáticas  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i$  são independentes, a validade de (2.88) implica que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.82 \text{ rep.})$$

$$-\tilde{\boldsymbol{\chi}}_i : \dot{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}_i + \tilde{\boldsymbol{\chi}}_i : \dot{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad (\tilde{\boldsymbol{\chi}}_i - \tilde{\tilde{\boldsymbol{\chi}}}_i) : \dot{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}_i = 0 \quad (2.89)$$

A equação (2.89) expressa que a diferença  $\tilde{\boldsymbol{\chi}}_i - \tilde{\tilde{\boldsymbol{\chi}}}_i$ , entre a *tensão generalizada* e a *tensão generalizada de dissipação* é ortogonal à taxa de incremento das variáveis internas  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}_i$ . Da equação (2.89) decorre o princípio da ortogonalidade de Ziegler, que estabelece condição mais restritiva do que a Termodinâmica, fixando que  $\tilde{\boldsymbol{\chi}}_i = \tilde{\tilde{\boldsymbol{\chi}}}_i$ , para qualquer  $i \in [1, N]$ . Einav et al (2007) ressaltam em seu trabalho que, embora se admita a condição  $\tilde{\boldsymbol{\chi}}_i = \tilde{\tilde{\boldsymbol{\chi}}}_i$ , por propósito formal é conveniente conservar  $\tilde{\boldsymbol{\chi}}_i$  e  $\tilde{\tilde{\boldsymbol{\chi}}}_i$  como variáveis separadas.

"Para desenvolver modelos termo-mecânicos independentes do tempo, Puzrin e Houlsby (2001) sugeriram uma forma de função de dissipação desacoplada que é apropriada para modelos de plasticidade de múltiplas superfícies cinemáticas de endurecimento (Einav et al, 2007)". No trabalho de Einav et al foi mostrado como esta formulação pode ser utilizada para introduzir efeito de dano. Modelos de plasticidade-dano, com função de dissipação desacoplada, podem apresentar dano antes da ocorrência de deformações plásticas, ou deformações plásticas antes da ocorrência de dano.

Outra forma, designada como de dissipação acoplada, foi apresentada por Einav et al (2007). Para esta classe de potenciais de dissipação, em que existe acoplamento em seus termos, os modelos introduzem dano sempre que ocorre plastificação, e viceversa. É mostrado que a teoria de potencial de dissipação desacoplado é um caso particular da teoria acoplada. Mais ainda, enquanto a teoria acoplada introduz uma única superfície de escoamento no espaço multi-dimensional  $\mathcal{M}$ , a teoria desacoplada conduz a  $N$  superfícies individuais de escoamento.

### 2.12.1. Potencial de Dissipação Desacoplado e Campo Discreto de Superfícies de Escoamento

Puzrin e Houlsby (2001) sugeriram a seguinte forma de função de dissipação desacoplada.

$$d = \sum_{i=1}^N d_i^f(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathcal{M}, \dot{\tilde{\alpha}}_i) = \sum_{i=1}^N d_i^g(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{M}, \dot{\tilde{\alpha}}_i) \geq 0 \quad (2.90)$$

aqui, as variáveis internas podem representar tanto deformações plásticas como dano, com a condição de que cada termo de dissipação deve ser não negativo.

$$d_i^e = \frac{\partial d_i^e}{\partial \dot{\tilde{\alpha}}_i} \bullet \dot{\tilde{\alpha}}_i = \tilde{\chi}_i \bullet \dot{\tilde{\alpha}}_i \geq 0 \quad \forall i \in [1, N] \quad (2.91)$$

onde o sobrescrito  $e$  pode significar tanto  $f$  (para função de dissipação associada ao potencial de Helmholtz) como  $g$  (para função de dissipação associada ao potencial de Gibbs).

Segundo Einav et al (2007), na formulação de modelos de superfícies múltiplas, é necessário definir a forma funcional das superfícies de escoamento para obter as relações entre incrementos tensão-deformação. A  $i$ -ésima superfície de escoamento, associada com a evolução da  $i$ -ésima variável interna  $\tilde{\alpha}_i$ , é relacionada à  $i$ -ésima componente da função de dissipação expressa por (2.90). A relação é dada por um caso especial de transformação de Legendre degenerada porque a função de dissipação é homogênea, de primeira ordem em relação às taxas  $\dot{\tilde{\alpha}}_i$  (Collins e Houlsby, 1997).

$$\lambda_i y_i^e = \tilde{\chi}_i \bullet \dot{\tilde{\alpha}}_i - d_i^e = 0 \quad \forall i \in [1, N] \quad (2.92)$$

onde  $y_i^f = y_i^f(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathcal{M}, \dot{\tilde{\alpha}}_i)$  e  $y_i^g = y_i^g(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{M}, \dot{\tilde{\alpha}}_i)$  são as  $i$ -ésimas superfícies de escoamento no  $i$ -ésimo espaço de tensões generalizadas em forma- $f$  e forma- $g$ , respectivamente, e  $\lambda_i$  é um multiplicador não-negativo no mesmo espaço. As propriedades da transformada de Legendre conduzem às regras de fluxo

$$\dot{\tilde{\alpha}}_i = \lambda_i \cdot \frac{\partial y_i^e}{\partial \tilde{\chi}_i} \quad (2.93)$$

Como  $\lambda_i \geq 0$  e da equação (2.92)  $\lambda_i y_i^e = 0$ , as condições complementares de Kuhn-Tucker são completadas com a exigência  $y_i^e \leq 0$ . A condição  $y_i^e = 0$  representa a  $i$ -ésima função de escoamento. Se esta condição é encontrada, e desde que  $y_i^e$  não pode ser maior do que zero, a condição de consistência torna-se, para a forma-f:

$$\dot{y}_i^f = \frac{\partial y_i^f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial y_i^f}{\partial \dot{\tilde{\alpha}}_j} \cdot \dot{\tilde{\alpha}}_j + \frac{\partial y_i^f}{\partial \dot{\tilde{\chi}}_i} \cdot \dot{\tilde{\chi}}_i = 0 \quad (2.94)$$

e, para a forma-g:

$$\dot{y}_i^g = \frac{\partial y_i^g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial y_i^g}{\partial \dot{\tilde{\alpha}}_j} \cdot \dot{\tilde{\alpha}}_j + \frac{\partial y_i^g}{\partial \dot{\tilde{\chi}}_i} \cdot \dot{\tilde{\chi}}_i = 0 \quad (2.95)$$

A soma dos termos  $\partial y_i^e / \partial \dot{\tilde{\alpha}}_j \cdot \dot{\tilde{\alpha}}_j$  representa um possível acoplamento com a evolução da  $i$ -ésima superfície de escoamento com a evolução da  $j$ -ésima variável interna. Este acoplamento é fraco já que ele acontece somente quando ambas as superfícies,  $i$ -ésima e  $j$ -ésima, estão ativas. Cada superfície deve ser checada de forma independente para carregamento ou descarregamento.

### 2.12.2. Potencial de Dissipação Acoplado e Superfície de Escoamento

Para função de dissipação que não pode ser decomposta em termos aditivos, na forma da equação (2.90) ou (2.91), pode-se escrever, de forma genérica que:

$$d = d^f(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathcal{M}, \dot{\mathcal{M}}) = d^g(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{M}, \dot{\mathcal{M}}) \geq 0 \quad (2.96)$$

Neste caso a função de dissipação está associada a uma única função de escoamento por um caso particular degenerado de transformação de Legendre na forma

$$\lambda y^e = \sum_{i=1}^N \tilde{\chi}_i \cdot \dot{\tilde{\alpha}}_i - d^e = 0 \quad (2.97)$$

onde  $y^e$  é a função de escoamento em forma- $f$ ,  $y^f = y^f(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathcal{M}, \mathcal{B})$ , ou em forma- $g$ ,  $y^g = y^g(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{M}, \mathcal{B})$ . O conjunto  $\mathcal{B}$  indica o conjunto das tensões dissipativas  $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}(\tilde{\chi}_1, \dots, \tilde{\chi}_N)$ , onde a  $i$ -ésima tensão generalizada é dada por

$$\tilde{\chi}_i = \frac{\partial d^e}{\partial \dot{\tilde{\alpha}}_i} \quad (2.98)$$

Diferentemente da teoria não acoplada, neste caso a função de escoamento deve ser expressa no espaço  $N$ -dimensional das tensões dissipativas generalizadas  $\mathcal{B}$ . Entretanto, a esta superfície de escoamento única correspondem  $N$  regras de fluxo, todas contendo um multiplicador comum  $\lambda$ , não negativo, na forma

$$\dot{\tilde{\alpha}}_i = \lambda \frac{\partial y^e}{\partial \tilde{\chi}_i} \quad \forall i \in [1, N] \quad (2.99)$$

Como  $\lambda \geq 0$  e da equação (2.97)  $\lambda y^e = 0$ , as condições complementares de Kuhn-Tucker são completadas com a exigência  $y^e \leq 0$ . A condição  $y^e = 0$  representa a função de escoamento única. Esta condição introduz um forte acoplamento entre variáveis internas, já que todas elas evoluem se ocorre escoamento. Se  $y^e = 0$  e  $\lambda > 0$  somente uma condição de consistência é introduzida, que pode ser expressa na forma- $f$  como:

$$\dot{y}^f = \frac{\partial y^f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial y^f}{\partial \tilde{\alpha}_i} \cdot \dot{\tilde{\alpha}}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial y^f}{\partial \tilde{\chi}_i} \cdot \dot{\tilde{\chi}}_i = 0 \quad (2.100)$$

e, na forma- $g$ :

$$\dot{y}^g = \frac{\partial y^g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial y^g}{\partial \tilde{\alpha}_i} \cdot \dot{\tilde{\alpha}}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial y^g}{\partial \tilde{\chi}_i} \cdot \dot{\tilde{\chi}}_i = 0 \quad (2.101)$$

A soma dos termos  $\partial y^e / \partial \tilde{\alpha}_i \cdot \dot{\tilde{\alpha}}_i$  representa o mesmo possível acoplamento fraco entre variáveis internas, de forma semelhante ao caso não acoplado. Agora, entretanto, um forte acoplamento é introduzido pela soma de termos  $\partial y^e / \partial \tilde{\chi}_j \cdot \dot{\tilde{\chi}}_j$ .

Einav et al (2007) apresentam exemplo de função de dissipação na forma- $f$ :

$$d^f = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^N [c_i^f(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathcal{M}) \Phi_i(\dot{\tilde{\alpha}}_i)]^n} \quad (2.102)$$

onde  $c_i^f(\varepsilon, \mathcal{M})$  é uma função positiva definida e  $\Phi_i(\dot{\tilde{\alpha}}_i)$  é um operador funcional homogêneo de primeira ordem, que retorna um escalar positivo. Por conveniência, os citados autores, impuseram que a derivada  $\Phi_i'(\dot{\tilde{\alpha}}_i) = \partial \Phi_i(\dot{\tilde{\alpha}}_i) / \partial (\dot{\tilde{\alpha}}_i)$  deve satisfazer à condição  $\Phi_i'(\dot{\tilde{\alpha}}_i) \bullet \Phi_i'(\dot{\tilde{\alpha}}_i) = 1$ . A Tabela 2.1 apresenta alguns exemplos de operadores citados no trabalho de Einav et al (2007).

**Tabela 2.1. Exemplos de operadores sobre variáveis internas (Einav et al, 2007).**

Variável interna	Operador $\Phi_i(\dot{\tilde{\alpha}}_i)$	Derivada $\Phi_i'(\dot{\tilde{\alpha}}_i) = \partial \Phi_i(\dot{\tilde{\alpha}}_i) / \partial (\dot{\tilde{\alpha}}_i)$
Escalar $\dot{\tilde{\alpha}}_i$	$ \dot{\tilde{\alpha}}_i $	$sign(\dot{\tilde{\alpha}}_i)$
Tensor de segunda ordem $\dot{\tilde{\alpha}}_i = \dot{\mathbf{a}}_i$	$\sqrt{\dot{\mathbf{a}}_i : \dot{\mathbf{a}}_i} \quad (*)$	$\frac{\dot{\mathbf{a}}_i}{\sqrt{\dot{\mathbf{a}}_i : \dot{\mathbf{a}}_i}}$
	$\left  \dot{\mathbf{a}}_i : \frac{\mathbf{I}}{3} \right  \quad (**)$	$sign(\dot{\mathbf{a}}_i : \mathbf{I})$

(\*) Operador é a norma do tensor  $\dot{\mathbf{a}}_i$ .

(\*\*) Operador relacionado ao primeiro invariante do tensor  $\dot{\mathbf{a}}_i$ , onde  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade.

Da definição, expressa por (2.98),  $\tilde{\chi}_i = \partial d^e / \partial \dot{\tilde{\alpha}}_i$ , obtém-se para a  $i$ -ésima tensão generalizada a relação:

$$\frac{\tilde{\chi}_i}{c_i^f(\varepsilon, \mathcal{M})} = \frac{\left[ c_i^f(\varepsilon, \mathcal{M}) \Phi_i(\dot{\tilde{\alpha}}_i) \right]^{n-1} \Phi_i'(\dot{\tilde{\alpha}}_i)}{\left( \sum_{i=1}^N \left[ c_i^f(\varepsilon, \mathcal{M}) \Phi_i(\dot{\tilde{\alpha}}_i) \right]^n \right)^{\frac{n-1}{n}}} \quad (2.103)$$

A superfície de escoamento pode ser obtida através de soma dos produtos internos dos termos de (2.103), termo a termo, produzindo na forma-f:

$$y^f = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\tilde{\chi}_i \bullet \tilde{\chi}_i}{c_i^f(\varepsilon, \mathcal{M})^2} \right) - 1 \leq 0 \quad (2.104)$$

Segundo Einav et al, já citados,  $n$  pode ser identificado como um parâmetro que controla a intensidade de acoplamento. O caso  $n = 1$  é um caso particular, para o qual a função de dissipação (2.102) torna-se desacoplada, recaindo em caso similar ao expresso por (2.90).

De forma análoga, empregando-se o potencial de Gibbs, pode-se expressar a função de dissipação na forma-g como:

$$d^g = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^N [c_i^g(\sigma, \mathcal{M}) \Phi_i(\dot{\tilde{\alpha}}_i)]^n} \quad (2.105)$$

E a função de escoamento, pode ser expressa também em forma-g como:

$$y^g = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\tilde{\chi}_i \bullet \tilde{\chi}_i}{c_i^g(\sigma, \mathcal{M})^2} \right) - 1 \leq 0 \quad (2.106)$$

A função de escoamento expressa por (2.106) é descrita no espaço  $N$ -dimensional das tensões dissipativas generalizadas, mas pode ser representada no espaço das tensões convencionais de Cauchy pela aplicação da condição de ortogonalidade,  $\tilde{\tilde{\chi}}_i = \tilde{\chi}_i$ , e da equação (2.84), definição de  $\tilde{\tilde{\chi}}_i = -\partial g / \partial \tilde{\alpha}_i$ .

### 2.12.3. Modelos de Variável Interna Única

Quando se utiliza uma única variável interna é possível gerar modelos hiperplásticos (sem dano), ou modelos hiperelásticos (com dano). Sendo única a variável, na exposição a seguir está simplificada a notação utilizada, sem índice  $i$  e sem "~". Negrito é usado para identificar variável tensorial. O papel físico da variável interna está ligado à forma funcional dos potenciais de energia e de dissipação. No caso da teoria hiperplástica, adiante descrito, a variável interna consiste no tensor de deformações plásticas, e no de teoria hiperelástica com dano a variável interna consiste em variável escalar de dano.

#### Teoria Hiperplástica

Einav et al, já citados, partiram de potencial de Gibbs utilizado por Collins e Houlsby (1997), em que a energia livre de Gibbs só tem termos cruzados lineares, na forma:



$$g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}_p) = g_1(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\alpha}_p + g_2(\boldsymbol{\alpha}_p) \quad (2.107)$$

do que se segue, por derivação da energia livre de Gibbs, obtenção do tensor de deformações:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\partial g_1(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\alpha}_p \quad (2.108)$$

Na expressão (2.108) a variável interna  $\boldsymbol{\alpha}_p$  representa deformações plásticas, e a primeira parcela representa deformações elásticas. Em modelos deste tipo, em que a elasticidade é desacoplada da plasticidade, foi mostrado por Collins e Houlsby (1997) que, a correspondente energia livre de Helmholtz, pode ser obtida por meio de transformada de Legendre, na forma:

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}_p) = f_1(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}_p) + g_2(\boldsymbol{\alpha}_p) = f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_e) + g_2(\boldsymbol{\alpha}_p) \quad (2.109)$$

Da definição de tensão generalizada (2.84), e do potencial de Gibbs de (2.107):

$$\bar{\boldsymbol{\chi}}_p = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial g_2(\boldsymbol{\alpha}_p)}{\partial \boldsymbol{\alpha}_p} \quad (2.110)$$

onde  $\bar{\boldsymbol{\chi}}_p$  difere da tensão real pelo termo  $-\partial g_2(\boldsymbol{\alpha}_p)/\partial \boldsymbol{\alpha}_p$ , que corresponde à tensão de arraste ou *back stress* da plasticidade com endurecimento cinemático. Observam ainda os citados autores que empregando o potencial de Helmholtz, expresso por (2.109):

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_e)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} \quad (2.111)$$

de maneira que, para potenciais de energia na forma de (2.109), a definição das tensões tem a mesma forma da obtida pela hiperelasticidade. Contudo, como na elasticidade não existem deformações plásticas, na hiperelasticidade, o potencial de (2.109) simplificar-se-ia para

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}) = f_1(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.112)$$

A formulação do modelo é completada com a especificação da função de dissipação (2.86), que para o presente modelo simplifica-se para:

$$d^f = \bar{\boldsymbol{\chi}}_p \bullet \dot{\boldsymbol{\alpha}}_p \quad (2.113)$$

Exemplos deste tipo de modelo podem ser encontrados no trabalho de Houlsby e Puzrin (2000).

### Teoria hiperelástica com dano

Com uma escolha diferente de formas funcionais, Einav et al (2007), demonstraram que uma variável interna pode representar o papel de uma variável de dano.

O conceito de dano escalar foi introduzido por Kachanov (1958) utilizando conceito de *tensão efetiva*, de base fenomenológica. Outros modelos foram baseados no conceito de *deformação efetiva*. Em qualquer um dos casos o dano é representado por uma variável escalar, variando entre 0 e 1. Por exemplo, a variável de dano associada à tensão efetiva:

$$\alpha_d = \frac{A - A_s}{A} \quad (2.114)$$

onde  $A$  é a área total da seção transversal, dentro de uma célula unitária da estrutura do material, em uma de três direções perpendiculares,  $A_s$  é a área da matriz sólida dentro de  $A$ . Aqui está aplicada notação  $\alpha_d$  em lugar de  $D$ , para ressaltar que esta é uma variável interna, e que como tal pode ser usada na formulação apresentada sem mudanças conceituais.

Usando a *hipótese de equivalência de deformação* (Lemaitre, 1971), a relação entre a tensão macroscópica da Mecânica do Contínuo  $\sigma$  e a correspondente *tensão efetiva* pode ser expressa em função da variável de dano dada por (2.114) como:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - \alpha_d)} \quad (2.115)$$

Para estabelecer a formulação do modelo hiperelástico é necessário formular os potenciais de energia e de dissipação de energia. Admitindo-se potencial de energia livre de Helmholtz expresso como:

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d) = f_1(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot (1 - \alpha_d) \quad (2.116)$$

Deste potencial se pode derivar, de imediato, com emprego de (2.82) ( $\sigma = \partial f / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ ):

$$\sigma = \frac{\partial f_1(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (1 - \alpha_d) \quad (2.117)$$

Einav et al (2007) observam que a expressão acima pode ser vista como correspondente à formulação de Lemaitre (1971), se a *tensão efetiva* for identificada como:

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial f_1(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.118)$$

Usando a transformação de Legendre, dada por (2.81) (  $g(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{M}) = f(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathcal{M}) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$  ), pode-se obter o potencial de energia livre de Gibbs, como:

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \alpha_d) = f_1(\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\sigma}))(1 - \alpha_d) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\sigma}) \quad (2.119)$$

Quando  $\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\sigma})$  é linear com  $\bar{\sigma}$ ,  $f_1(\boldsymbol{\varepsilon})$  é função quadrática em  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (e  $\bar{\sigma}$ ) e a função potencial de Gibbs, neste caso particular, toma a forma:

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \alpha_d) = \frac{g_1(\boldsymbol{\sigma})}{(1 - \alpha_d)} \quad (2.120)$$

onde  $g_1(\boldsymbol{\sigma})$  é a função energia livre de Gibbs, se não ocorrer dano.

A hipótese de equivalência de tensão utiliza ponto de vista inverso em relação à formulação antes descrita. Nesta a *deformação efetiva* é definida como:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}(1 - \alpha_d) \quad (2.121)$$

que relaciona a deformação macroscópica  $\boldsymbol{\varepsilon}$  da Mecânica do Contínuo com a correspondente deformação efetiva  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . A diferenciação do potencial (2.120) produz:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = - \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{1}{(1 - \alpha_d)} \quad (2.122)$$

que é equivalente à formulação de Simo e Ju (1987), se for identificada a deformação efetiva como.

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = - \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.123)$$

A forma transformada de  $f(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d) = f_1(\boldsymbol{\varepsilon})(1 - \alpha_d)$  novamente só é aplicável se o material é linear elástico.

Em caso de elasticidade não-linear os potenciais de Helmholtz (2.116) e de Gibbs (2.120) podem ser escritos de maneira genérica, dependendo de uma função  $M(\alpha_d)$  monotonicamente decrescente, de 1 a 0, como:

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha_d) = f_I(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot M(\alpha_d) \quad (2.124)$$

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \alpha_d) = \frac{g_I(\boldsymbol{\sigma})}{M(\alpha_d)} \quad (2.125)$$

para as hipóteses de equivalência de deformação ou de tensão, respectivamente, mas com uma possível mudança de significado das variáveis internas  $\alpha_d$  de (2.124) e (2.125).

- Tensão de dano generalizada

Cada uma das variáveis internas de dano é associada a uma tensão dual, denominada de tensão generalizada de dano. Quando a variável é escalar, de acordo com as equações (2.84) ( $\bar{\chi}_i = -\partial f / \partial \alpha_i$ ) e (2.124) obtém-se:

$$\bar{\chi}_d = -f_I(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot M'(\alpha_d) \quad (2.126)$$

De forma alternativa, a tensão generalizada de dano pode ser definida com o emprego de (2.84) ( $\bar{\chi}_i = -\partial g / \partial \alpha_i$ ) e (2.125) como:

$$\bar{\chi}_d = -g_I(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \frac{M'(\alpha_d)}{M(\alpha_d)^2} \quad (2.127)$$

As equações (2.126) e (2.127) mostram que a tensão generalizada tem dimensão de energia, já que a variável interna de dano é adimensional. As duas definições de tensões são equivalentes somente quando o significado das variáveis internas também é o mesmo.

Para qualquer função monotonicamente decrescente  $M(\alpha_d)$  com  $\alpha_d$ ,  $M'(\alpha_d)$  é sempre negativa, e como  $f_I(\boldsymbol{\varepsilon})$  em (2.126) corresponde à energia elástica armazenada, sem dano, que é por definição não-negativa, então  $\bar{\chi}_d \geq 0$  é também não-negativa.

- Evolução do dano

O modelo é completado pela especificação da função de dissipação  $d^e$  (função da taxa de dano das variáveis internas), ou alternativamente pela especificação da superfície de escoamento de dano (função das tensões generalizadas de dano). Neste último caso a equação de evolução do dano é expressa por meio de regra de fluxo, dada pela equação (2.93) ou (2.99), que para uma variável interna única, em forma- $f$  ou em forma- $g$ , torna-se:

$$\dot{\alpha}_d = \lambda \frac{\partial y^f(\varepsilon, \chi_d, \alpha_d)}{\partial \chi_d} \quad (2.128)$$

$$\dot{\alpha}_d = \lambda \frac{\partial y^g(\sigma, \chi_d, \alpha_d)}{\partial \chi_d} \quad (2.129)$$

que são equivalentes, novamente, somente quando a interpretação da variável interna de dano é a mesma.

Reescrevendo a função de dissipação, para este caso de variável interna única, resulta:

$$d^e = \chi_d \dot{\alpha}_d \quad (2.130)$$

Da igualdade assumida entre a tensão generalizada e a tensão dissipativa generalizada, isto é,  $\chi_d = \bar{\chi}_d$ , e como  $d^e \geq 0$ , e também  $\bar{\chi}_d \geq 0$ , decorre que  $\dot{\alpha}_d \geq 0$ .

*Exemplo de modelo uni-dimensional hiperelástico com dano*

Neste exemplo, apresentado por Einav et al (2007), o estado de tensão-deformação aplicado representa solicitação de compressão confinada, ou oedométrica.

Admitindo-se potencial de energia livre de Helmholtz ou de Gibbs, expressos por:

$$f(\varepsilon, \alpha_d) = \frac{E\varepsilon^2(1-\alpha_d)}{2} \quad (2.131)$$

$$g(\sigma, \alpha_d) = -\frac{\sigma^2}{2E(1-\alpha_d)} \quad (2.132)$$

e associados, respectivamente, com as correspondentes funções de dissipação:

$$d^f = \frac{k\Pi(\alpha_d)|\varepsilon|}{2(1-\alpha_d)} \cdot |\dot{\alpha}_d| \geq 0 \quad (2.133)$$

$$d^g = \frac{k\Pi(\alpha_d)|\sigma|}{2E(1-\alpha_d)^2} \cdot |\dot{\alpha}_d| \geq 0 \quad (2.134)$$

onde a função  $\Pi(\alpha_d)$  é uma função positiva definida que descreve as mudanças na função de dissipação à medida em que o material é danificado, satisfazendo a condição  $\Pi(\alpha_d = 0) \equiv 1$ ; note-se que, neste caso, a variável interna de dano  $\alpha_d$  tem o mesmo significado, tanto para a forma- $f$  como para a forma- $g$ , já que  $f$  é quadrática em  $\varepsilon$ . Assim, usando a equação (2.84a, b) ( $\bar{\chi}_i = -\partial f / \partial \alpha_i$ ) ou ( $\bar{\chi}_i = -\partial g / \partial \alpha_i$ ) e (2.131) ou (2.132), obtém-se a tensão generalizada:

$$\bar{\chi}_d = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E(1-\alpha_d)^2} \quad (\text{forma-}f \text{ e forma-}g, \text{ respectivamente}) \quad (2.135)$$

que é sempre positiva, e corresponde à energia elástica armazenada, sem dano. A transformação de Legendre degenerada, das funções (2.133) e (2.134), conduz às funções de escoamento na forma- $f$  (em termos de deformações) e na forma- $g$  (em termos de tensões) a seguir:

$$y^f = |\chi_d| - \frac{k\Pi(\alpha_d)|\varepsilon|}{2(1-\alpha_d)} \leq 0 \quad (2.136)$$

$$y^g = |\chi_d| - \frac{k\Pi(\alpha_d)|\sigma|}{2E(1-\alpha_d)^2} \leq 0 \quad (2.137)$$

Aplicando a condição de ortogonalidade de Ziegler, que estabelece que  $\chi_d = \bar{\chi}_d$ , e as equações (2.135) em (2.136) e (2.137), respectivamente, obtém-se as funções de escoamento em termos de deformações ou de tensões.

$$y^\varepsilon = E|\varepsilon|(1-\alpha_d) - k\Pi(\alpha_d) \leq 0 \quad (2.138)$$

$$y^\sigma = |\sigma| - k\Pi(\alpha_d) \leq 0 \quad (2.139)$$

Durante o escoamento, a condição  $y^e = 0$  deve ser cumprida, o que conduz ao par de equações expressas de forma paramétrica em função de  $\alpha_d$ .

$$\varepsilon_y(\alpha_d) = \pm \frac{k\Pi(\alpha_d)}{E(1-\alpha_d)} \quad (2.140)$$

$$\sigma_y(\alpha_d) = \pm k\Pi(\alpha_d) \quad (2.141)$$

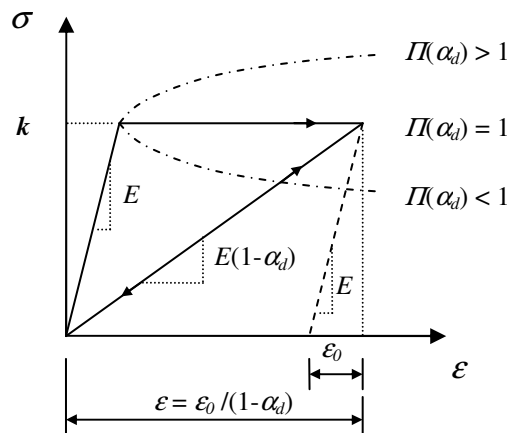
onde o subscrito  $y$  foi adicionado para assinalar que estas equações são seguidas somente durante o escoamento. A determinação da função  $\Pi(\alpha_d)$  deve ser baseada nestas equações paramétricas.

O critério de escoamento expresso por (2.136) ou (2.137) reduz-se ao caso de critério elasto-plástico ideal se  $\Pi(\alpha_d) = 1$ , caso em que a energia armazenada e a tensão de escoamento permanecem constantes após início do escoamento. O caso  $\Pi(\alpha_d) > 1$  corresponde a processo de endurecimento após escoamento por efeito de dano e, de forma contrária, o caso  $\Pi(\alpha_d) < 1$ , indica processo de amolecimento com o dano. A Figura 2.33 apresenta, de forma esquemática, curvas tensão-deformação para os casos mencionados. Nestes modelos o descarregamento retorna à condição inicial, já que não há introdução de deformações plásticas residuais. Este fato está mostrado apenas para o caso de elasto-plasticidade ideal, em tração cheio.

O módulo de elasticidade instantâneo (módulo danificado) neste modelo varia com o dano. Usando as equações (2.82) ( $\sigma = \partial f / \partial \varepsilon$ ) e (2.131) obtém-se:

$$\sigma = E(1 - \alpha_d) \cdot \varepsilon \quad (2.142)$$

**Figura 2.33. Curvas tensão-deformação de modelo uni-dimensional hiperelástico com dano (Einav et al, 2007).**



### 2.12.4. Modelos Hiperplásticos com Dano

Aplicando a formulação termomecânica apresentada, para potenciais dependentes de duas variáveis internas, uma identificada como tensor de deformações plásticas e a outra como variável de dano, pode-se gerar modelos hiperplásticos com dano. No trabalho de Einav et al (2007) foi mostrado que a formulação termomecânica para dano pode ser englobada dentro da formulação da hiperplasticidade.

Incluindo o efeito de dano sobre o modelo de variável interna única de (2.109), o potencial de energia livre de Helmholtz, na forma- $f$ , pode ser expresso como:

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d) = f_I(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}_p) \cdot (1 - \alpha_d) + f_2(\boldsymbol{\alpha}_p) \quad (2.143)$$

De forma alternativa, na forma- $g$ , o potencial de energia livre de Gibbs de (2.107), com a introdução de variável interna de dano, pode ser escrito como:

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d) = \frac{g_1(\boldsymbol{\sigma})}{(1 - \alpha_d)} - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\alpha}_p + g_2(\boldsymbol{\alpha}_p) \quad (2.144)$$

Apontam os citados autores, que os dois enfoques produzem os mesmos resultados no caso de elasticidade linear, para os quais  $f_I$  e  $g_I$  são funções quadráticas.

Como exposto nos itens 2.12.1 e 2.12.2 duas formulações diferentes podem ser geradas, dependendo da escolha da função potencial de dissipação: desacoplada ou acoplada.

Para *função de dissipação desacoplada*, caso em que o escoamento por dano ou por plasticidade pode ocorrer de forma independente, expressa em forma- $f$ :

$$d^f = d_p^f(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_p) + d_d^f(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d, \dot{\alpha}_d) \geq 0 \quad (2.145)$$

ou em forma- $g$ :

$$d^g = d_p^g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_p) + d_d^g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d, \dot{\alpha}_d) \geq 0 \quad (2.146)$$

Pelo uso de transformada degenerada de Legendre obtêm-se funções de escoamento no espaço generalizado de tensões, isto é, função de escoamento de dano no espaço  $\chi_d$  e função de escoamento plástico no espaço generalizado de tensões  $\chi_p$ , na forma- $f$ :



$$y_d^f = y_d^f(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d, \chi_d) \leq 0 \quad (2.147)$$

$$y_p^f = y_p^f(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d, \chi_p) \leq 0 \quad (2.148)$$

ou em forma-g:

$$y_d^g = y_d^g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d, \chi_d) \leq 0 \quad (2.149)$$

$$y_p^g = y_p^g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d, \chi_p) \leq 0 \quad (2.150)$$

Para *função de dissipação acoplada*, caso em que os escoamentos por dano e por plasticidade sempre ocorrem de forma simultânea, expressa em forma-f:

$$d^f = d^f(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_p, \dot{\alpha}_d) \geq 0 \quad (2.151)$$

ou em forma-g:

$$d^g = d^g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_p, \dot{\alpha}_d) \geq 0 \quad (2.152)$$

Pelo uso de transformada degenerada de Legendre uma única função de escoamento é obtida, no espaço generalizado de tensões plásticas e de dano combinadas  $\{\chi_d, \chi_p\}$ , gerando na forma-f e forma-g, respectivamente:

$$y^f = y^f(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d, \chi_p, \chi_d) \leq 0 \quad (2.153)$$

$$y^g = y^g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d, \chi_p, \chi_d) \leq 0 \quad (2.154)$$

Exemplo deste procedimento é apresentado por Einav et al (2007), para caso acoplado, com expressão geral da função de dissipação dada por (2.102), aqui repetida:

$$d^f = \eta \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i^f(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathcal{M}) \Phi_i(\tilde{\alpha}_i)]^n} \quad (2.102 - \text{rep.})$$

e função de escoamento geral, dada por (2.104), também aqui repetida:

$$y^f = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\tilde{\chi}_i \bullet \tilde{\chi}_i}{c_i^f(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathcal{M})^2} \right) - 1 \leq 0 \quad (2.104 - \text{rep.})$$

Aplicando a equação (2.104) ao caso em exame, de modelo com duas variáveis internas, uma correspondente às deformações plásticas e outra à variável de dano, a função de escoamento combinada pode ser escrita, para a forma- $f$  ou forma- $g$ , como:

$$y^f = \left( \frac{\chi_p \bullet \chi_p}{c_p^f (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d)^2} \right)^{\frac{2}{2(n-1)}} + \left( \frac{\chi_d}{c_d^f (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d)} \right)^{\frac{n}{n-1}} - 1 \leq 0 \quad (2.155)$$

$$y^g = \left( \frac{\chi_p \bullet \chi_p}{c_p^g (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d)^2} \right)^{\frac{2}{2(n-1)}} + \left( \frac{\chi_d}{c_d^g (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d)} \right)^{\frac{n}{n-1}} - 1 \leq 0 \quad (2.156)$$

Os exemplos apresentados a seguir, publicados no trabalho de Einav et al (2007), têm o objetivo de mostrar aplicação da teoria da hiperplasticidade, com função de dissipação acoplada, a três casos de plasticidade combinada com dano. O primeiro exemplo se refere a modelo uni-dimensional de hiperplasticidade com dano acoplado, e que mostra a diferença de comportamento em relação ao modelo hiperelástico, de uma única variável interna, apresentado no item 2.12.3. O segundo exemplo apresenta modelo de von Mises de plasticidade com dano acoplado e o terceiro se refere a aplicação ao modelo Cam Clay Modificado (MCC). Os exemplos estão em seqüência de generalização crescente.

a) *Exemplo de modelo uni-dimensional hiperplástico com dano*

O estado de tensão-deformação aplicado, de forma semelhante ao mostrado no item 2.12.3, representa solicitação de compressão confinada, ou oedométrica. Aqui foi feita a opção pelo uso de potencial de Gibbs.

Os autores empregaram potencial de energia livre de Gibbs, que combina a hiperplasticidade expressa pela equação (2.107),  $g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}_p) = g_1(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\alpha}_p + g_2(\boldsymbol{\alpha}_p)$ , mas com  $g_2(\boldsymbol{\alpha}_p) = 0$ , com a hiperelasticidade com dano expressa pela equação (2.132),  $g(\boldsymbol{\sigma}, \alpha_d) = -\boldsymbol{\sigma}^2 / [2E \cdot (1 - \alpha_d)]$ , na seguinte forma:

$$g(\sigma, \alpha_p, \alpha_d) = -\frac{\sigma^2}{2E(1 - \alpha_d)} - \sigma \alpha_p \quad (2.157)$$

$$d^g(\sigma, \alpha_d, \dot{\alpha}_p, \dot{\alpha}_d) = k\Pi(\alpha_d) \sqrt{\left(r_p \dot{\alpha}_p\right)^2 + \left(r_d \frac{\sigma}{2E(1-\alpha_d)^2} \dot{\alpha}_d\right)^2} \geq 0 \quad (2.158)$$

onde a raiz quadrada representa uma "média geométrica" entre as taxas de escoamento plástico e de dano, e os fatores  $r_p$  e  $r_d$ , representam a razão entre as taxas de variáveis internas.

A equação (2.158) é o resultado da particularização da equação (2.102)

$d^g = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^N [c_i^g(\sigma, \mathcal{M}) \Phi_i(\dot{\tilde{\alpha}}_i)]^n}$ , na forma-g, com:

$$c_p^g(\sigma, \alpha_p, \alpha_d) = k\Pi(\alpha_d) \cdot r_p \quad \Phi_p(\dot{\alpha}_p) = \dot{\alpha}_p \quad (2.159 - a,b)$$

$$c_d^g(\sigma, \alpha_p, \alpha_d) = k\Pi(\alpha_d) \cdot \frac{\sigma}{2E(1-\alpha_d)^2} \cdot r_d \quad \Phi_d(\dot{\alpha}_d) = \dot{\alpha}_d \quad (2.160 - a,b)$$

Utilizando a forma da função de escoamento combinada, na forma-g, expressa por (2.156), levando em conta tratar-se de caso uni-dimensional, resulta por meio de (2.104):

$$y^g = \left( \frac{\chi_p}{k\Pi(\alpha_d) \cdot r_p} \right)^2 + \left( \frac{\chi_d \cdot 2E(1-\alpha_d)^2}{k\Pi(\alpha_d) \cdot r_d \cdot \sigma} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad (2.161)$$

Usando a equação (2.83)  $\varepsilon = -\partial g / \partial \sigma$ , e a equação (2.157), obtém-se:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E(1-\alpha_d)} + \alpha_p \quad (2.162)$$

onde a primeira parcela do segundo membro pode ser identificada como a deformação hiperelástica com dano e a segunda como a deformação plástica.

O uso das equações (2.84 b),  $\tilde{\chi}_i = -\partial g / \partial \tilde{\alpha}_i$ , e (2.157), fornece as expressões das tensões generalizadas:

$$\bar{\chi}_p = \sigma \quad (2.163)$$

$$\bar{\chi}_d = \frac{\sigma^2}{2E(1-\alpha_d)^2} \quad (2.164)$$

cuja substituição na equação da função acoplada de escoamento (2.161), no espaço das tensões generalizadas, produz a seguinte função de escoamento no espaço das tensões.

$$y^\sigma = \left( \frac{\sigma}{k} \right)^2 \left[ \frac{r_p^2 + r_d^2}{r_p^2 r_d^2} \right] \frac{1}{\Pi^2(\alpha_d)} - 1 \leq 0 \quad (2.165)$$

A equação (2.165) mostra que durante o escoamento, a curva tensão-deformação é, de forma semelhante à observada para o modelo hiperelástico com dano, uma função da variável interna de dano, e também da variável interna de deformação plástica, por meio da razão ( $r_p/r_d$ ). Isolando a tensão  $\sigma$  em (2.165), obtém-se a expressão da tensão de escoamento:

$$\sigma_y(\alpha_d) = \pm \left( \frac{r_p r_d}{\sqrt{r_p^2 + r_d^2}} \right)^2 k \Pi(\alpha_d) \quad (2.166)$$

E a substituição da tensão de escoamento na expressão (2.162) permite obter a correspondente deformação para a condição de escoamento:

$$\varepsilon(\alpha_d, \alpha_p) = \frac{\sigma_y}{E(1 - \alpha_d)} + \alpha_p \quad (2.167)$$

Por questão de consistência com os dois modelos já descritos, hiperelástico com dano e hiperplástico sem dano, os citados autores colocaram  $\Pi(\alpha_d = 0) = 1$ , de forma que a tensão no início do escoamento,  $\sigma_y(\alpha_d = 0) = \pm k$ . Substituindo-se estes valores em (2.166), verifica-se que os fatores  $r_p$  e  $r_d$  estão relacionados pela equação:

$$\frac{1}{r_p^2} + \frac{1}{r_d^2} = 1 \quad (2.168)$$

de onde se conclui que  $r_p \geq 1$  e  $r_d \geq 1$ . A intensidade relativa entre estes fatores gradua a participação das deformações plásticas e do efeito de dano, na dissipação de energia.

No caso limite em que  $r_p = 1$  e  $r_d \rightarrow \infty$ , a função de escoamento (2.161) passa a ser expressa somente no espaço das tensões generalizadas plásticas:

$$y^s = \left( \frac{\chi_p}{k} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad (2.169)$$

concordando com o modelo hiperplástico. E, no outro caso limite em que  $r_p \rightarrow \infty$  e  $r_d = 1$  a função de escoamento (2.161) passa a ser expressa no espaço da tensão generalizada de dano:

$$y^s = \left( \frac{\chi_d}{k\Pi(\alpha_d)} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad (2.170)$$

concordando com o modelo hiperelástico ideal com dano.

A relação entre as taxas de variação das variáveis internas pode ser encontrada aplicando-se a equação de regra de fluxo (2.99)  $\dot{\alpha}_i = \lambda \partial y^e / \partial \chi_i$ , à função de dissipação (2.161), produzindo:

$$\frac{\dot{\alpha}_d}{\dot{\alpha}_p} = \frac{\lambda \cdot \frac{2\chi_d (2E(1-\alpha_d)^2)^2}{(k\Pi(\alpha_d)r_d \cdot \sigma)^2}}{\lambda \cdot \frac{2\chi_p}{(k\Pi(\alpha_d)r_p)^2}} = \frac{\chi_d \left( \frac{r_p}{r_d} \right)^2 \cdot \frac{(2E(1-\alpha_d)^2)^2}{\sigma^2}}{\chi_p \left( \frac{r_p}{r_d} \right)^2 \cdot \frac{\sigma^2}{(2E(1-\alpha_d)^2)^2}} = \frac{\chi_d \left( \frac{r_p}{r_d} \right)^2 \cdot \frac{\sigma^2}{(2E(1-\alpha_d)^2)^2}}{\chi_p \left( \frac{r_p}{r_d} \right)^2 \cdot \frac{\sigma^2}{(2E(1-\alpha_d)^2)^2}}$$

onde introduzindo a condição de ortogonalidade  $\chi_d = \bar{\chi}_d$  e  $\chi_p = \bar{\chi}_p$  e as expressões (2.163) e (2.164), na expressão acima, resulta, finalmente:

$$\frac{\dot{\alpha}_d}{\dot{\alpha}_p} = \frac{\chi_d}{\chi_p} \cdot \left( \frac{r_p}{r_d} \right)^2 \cdot \frac{\chi_p^2}{\chi_d^2} \Rightarrow \frac{\dot{\alpha}_d}{\dot{\alpha}_p} = \frac{\chi_p}{\chi_d} \cdot \left( \frac{r_p}{r_d} \right)^2 \quad (2.171)$$

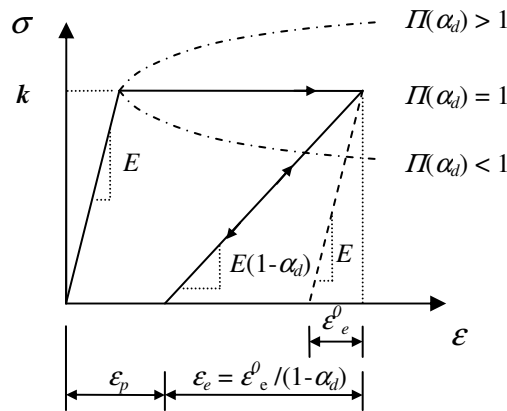
Esta equação (2.171) pode ainda ser reescrita, pela substituição de  $\chi_d = \bar{\chi}_d = \sigma_y(\alpha_d)$ , dada pela equação (2.166), que representa a tensão durante processo de escoamento, e pela substituição de  $\chi_p = \bar{\chi}_p = \sigma_y^2(\alpha_d) / [2E(1-\alpha_d)^2]$ , e pela observância da condição (2.168), como:

$$\frac{\dot{\alpha}_d}{\dot{\alpha}_p} = \frac{2E(1-\alpha_d)^2}{k\Pi(\alpha_d)} \cdot \left( \frac{r_p}{r_d} \right)^2 \quad (2.172)$$

As equações (2.171) e (2.172) mostram que a fração  $(r_p/r_d)$  determina a razão entre os incrementos das variáveis internas, e, portanto, o equilíbrio entre dano e plasticidade.

Ilustração qualitativa do modelo exposto está apresentada na Figura 2.34. Em traço cheio está mostrado ciclo de carregamento e descarga, para material sem dano.

**Figura 2.34. Curvas tensão-deformação de modelo uni-dimensional hiperplástico com dano, para plasticidade ideal, endurecimento e amolecimento (Einav et al, 2007).**



O modelo apresentado é capaz de simular (em estado uni-dimensional), plasticidade perfeita, endurecimento, amolecimento, e efeito de dano.

b) *Exemplo de modelo uni-dimensional hiperplástico com dano de Von Mises*

O modelo apresentado neste exemplo, por Einav et al (2007), trata-se de modelo de von Mises de dano-plasticidade apresentado por Lemaitre (1985). Os autores utilizaram a mesma função potencial de Helmholtz, mas ao contrário de Lemaitre, que apresentou função de dissipação não relacionada à superfície de escoamento por transformação de Legendre, os autores seguiram a formulação rigorosa deduzindo a função de escoamento a partir da função de dissipação adotada.

O potencial de energia livre de Helmholtz utilizado por Lemaitre (1985), para modelo elástico linear, isotrópico, de plasticidade acoplada com dano, foi apresentado por Einav et al (2007) na forma:

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d) = G(1 - \alpha_d)(\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\alpha}_p') : (\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\alpha}_p') + \frac{1}{2} K(1 - \alpha_d) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}_p)^2 \quad (2.173)$$

onde  $G$  e  $K$  representam o módulo cisalhante e volumétrico, respectivamente;  $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - 1/3 \text{tr}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{I}$ , é a parte desviadora do tensor de segunda ordem  $\boldsymbol{x}$  e  $\text{tr}(\boldsymbol{x}) = x_{ii}$  é o traço do tensor. O potencial de Helmholtz representa a soma da energia armazenada de distorção, a primeira

parcela do segundo membro de (2.173), com a energia de compressão volumétrica, a segunda parcela de (2.173).

O traço e o tensor desviador de tensões podem ser obtidos de (2.173), pelo emprego da equação (2.82),  $\boldsymbol{\sigma} = \partial f / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ .

$$tr(\boldsymbol{\sigma}) = 3 \cdot \frac{\partial f}{\partial tr(\boldsymbol{\varepsilon})} = 3 \cdot K \cdot (1 - \alpha_d) \cdot tr(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}_p) \quad (2.174)$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}'} = 2 \cdot G \cdot (1 - \alpha_d) (\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\alpha}_p') \quad (2.175)$$

Pelo emprego da equação (2.84-a)  $\bar{\chi}_i = -\partial f / \partial \bar{\alpha}_i$  obtém-se o traço e o tensor desviador de tensões generalizadas, assim como a tensão escalar generalizada de dano.

$$tr(\bar{\chi}_p) = -3 \cdot \frac{\partial f}{\partial tr(\boldsymbol{\alpha}_p)} = tr(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.176)$$

$$\bar{\chi}_p' = -\frac{\partial f}{\partial (\boldsymbol{\alpha}_p')} = \boldsymbol{\sigma}' \quad (2.177)$$

$$\bar{\chi}_d = -\frac{\partial f}{\partial \alpha_d} = G(\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\alpha}_p') : (\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\alpha}_p') + \frac{1}{2} K \cdot tr(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}_p)^2 = \frac{\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'}{4G(1 - \alpha_d)^2} \cdot R_v \quad (2.178)$$

onde a variável auxiliar  $R_v$ , denominada de "função de triaxialidade", pode ser escrita, em função de tensões ou deformações, como:

$$R_v = R_{v\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) = 1 + \frac{G}{2K} \cdot \frac{tr(\boldsymbol{\sigma})^2}{\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'} \quad (2.179)$$

$$R_v = R_{v\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}_p) = 1 + \frac{K}{2G} \cdot \frac{tr(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}_p)^2}{(\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\alpha}_p') : (\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\alpha}_p')} \quad (2.180)$$

Esta função é função da *razão de triaxialidade* definida como:  $tr(\boldsymbol{\sigma})^2 / (\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}')$ .

Einav et al (2007), relatam que Lemaitre (1985) apresentou a seguinte superfície de escoamento, sem relacioná-la a um potencial explícito de dissipação.

$$y^* = \bar{\chi}_d - \frac{k^2}{G(1 - \alpha_d)^2} \cdot R_v(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (2.181)$$

Esta função foi assinalada com asterisco para indicar que ela não foi deduzida a partir de uma função de dissipação. Lemaitre observou que a introdução da equação (2.178) em (2.181) reproduzia a superfície clássica de escoamento elasto-plástico de von Mises :

$$y^* = \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' - 2k^2 = 0 \quad (2.182)$$

onde  $k$  é o parâmetro de resistência que corresponde ao teste de cisalhamento simples.

Lemaitre (1985) completou a formulação do modelo postulando outra função, o potencial de dissipação, mas não o potencial associado com a função de escoamento (2.181).

Einav et al, modificaram o modelo, sem necessidade de introdução de qualquer hipótese adicional. A superfície de escoamento obtida foi associada diretamente à função de dissipação. Os autores assumiram a seguinte função de dissipação:

$$d^f(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d, \dot{\boldsymbol{\alpha}}'_p, \dot{\alpha}_d) = k \cdot \sqrt{2r_p^2 \dot{\boldsymbol{\alpha}}'_p : \dot{\boldsymbol{\alpha}}'_p + \frac{1}{2} \cdot R_{ve}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}_p) \left( r_d \frac{1}{G(1-\alpha_d)^2} \cdot \dot{\alpha}_d \right)^2} \geq 0 \quad (2.183)$$

Usando a equação (2.104), obtém-se a equação da função de escoamento no espaço combinado das tensões generalizadas de plasticidade e dano, expressa como:

$$y^f = y^f(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}_p, \alpha_d, \boldsymbol{\chi}_p, \chi_d) = \frac{\boldsymbol{\chi}'_p : \boldsymbol{\chi}'_p}{2(kr_p)^2} + \frac{\chi_d^2 \cdot 2G(1-\alpha_d)^2}{(kr_d)^2 \cdot R_{ve}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}_p)} - 1 \leq 0 \quad (2.184)$$

*Obs.: A nosso ver a tensão generalizada de dano  $\chi_d$  deve ser elevada ao quadrado. No texto do artigo tal termo é apresentado como linear e não como quadrático.*

Aplicando a condição de ortogonalidade,  $\chi_d = \bar{\chi}_d = [\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' / (4G(1-\alpha_d)^2)] R_v$ , dada pela equação (2.178), que representa a tensão generalizada de dano, e a condição  $\boldsymbol{\chi}'_p = \bar{\boldsymbol{\chi}}'_p = \boldsymbol{\sigma}'$ , que representa a tensão generalizada (tensor desviador) de plasticidade, e substituindo estas relações na equação da função de escoamento (2.184), resulta:

$$y^\sigma = \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' \left[ \frac{r_p^2 + r_d^2}{r_p^2 r_d^2} \right] - 2k^2 \leq 0 \quad (2.185)$$



Considerando-se o acoplamento entre dano e plasticidade, da mesma forma empregada no exemplo (a), isto é, que  $[(r_p^2 + r_d^2) / r_p^2 \cdot r_d^2] = 1$ , a função de escoamento, no espaço das tensões, reduz-se à expressão do critério de escoamento de von Mises.

$$y^\sigma = \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' - 2k^2 \leq 0 \quad (2.186)$$

que conduz á mesma conclusão de Lemaitre. Mas, observam Einav et al (2007), agora a função de escoamento é derivada da função de dissipação. E mais, agora é possível derivar as equações de evolução das variáveis internas de dano e de deformação plástica diretamente, a partir da regra de fluxo para caso acoplado (2.99), na forma  $\dot{\alpha}_i = \lambda \cdot \partial y^e / \partial \chi_i$ .

$$\dot{\alpha}_d = \lambda \frac{2G(1-\alpha_d)^2}{(k \cdot r_d)^2 R_v} \quad (2.187)$$

$$\dot{\alpha}_p' = \lambda \frac{\chi_p'}{(k \cdot r_p)^2} \quad (2.188)$$

que guardam uma razão entre si, que pode ser determinada com o emprego de uma norma para a taxa de incremento de deformação plásticas, como:

$$\frac{\dot{\alpha}_d}{\sqrt{\dot{\alpha}_p' : \dot{\alpha}_p'}} = \frac{\sqrt{2}G(1-\alpha_d)^2}{k \cdot R_v} \left( \frac{r_p}{r_d} \right)^2 \quad (2.189)$$

mostrando uma vez mais que a razão  $r_p/r_d$  determina o balanço entre dano e plasticidade, embora neste caso o balanço dependa também do grau de triaxialidade.

Para razão de triaxialidade igual a zero, e, portanto  $R_v = 1$ , a equação (2.189) torna-se

$$\frac{\dot{\alpha}_d}{\sqrt{\dot{\alpha}_p' : \dot{\alpha}_p'}} = \frac{2G(1-\alpha_d)^2}{\sqrt{2}k} \left( \frac{r_p}{r_d} \right)^2 \quad (\text{quando } \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = 0) \quad (2.190)$$

que após integração produz (desde que a razão de triaxialidade seja mantida igual a zero)

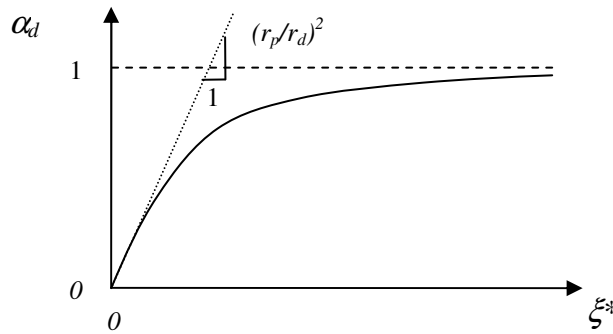
$$\alpha_d = \frac{\left( \frac{r_p}{r_d} \right)^2 \xi^*}{1 + \left( \frac{r_p}{r_d} \right)^2 \xi^*}; \quad \xi^* = \frac{2G}{\sqrt{2}k} \xi \quad (2.191)$$

A equação (2.191) permite concluir que, neste caso de carregamento, o dano é função puramente da deformação cisalhante  $\xi$  acumulada, que é expressa em forma de norma como:

$$\xi = \int_t \sqrt{\dot{\alpha}'_p : \dot{\alpha}'_p} dt = \int_0^{\alpha'_p} \sqrt{\dot{\alpha}'_p : \dot{\alpha}'_p} \quad (2.192)$$

Os autores chamam a atenção para o fato que a relação entre o dano e a deformação plástica cisalhante acumulada é representada por uma curva hiperbólica, com a inclinação inicial determinada pela razão  $r_p/r_d$ , no espaço  $\alpha_d - \xi^*$ , como mostra a Figura 2.35.

**Figura 2.35. Relação entre dano e deformação plástica cisalhante acumulada em modelo de von Mises de plasticidade acoplada com dano (Einav et al, 2007).**



*Obs.: Nas equações (2.191) foi feita uma inversão da razão  $r_d/r_p$  para  $r_p/r_d$ , e do coeficiente da variável  $\xi$ , que no trabalho de Einav et al (2007) figura como  $\sqrt{2}k/2G$  para  $2G/\sqrt{2}k$ , após consulta ao Dr. Einav.*

*c) Exemplo de modelo Cam Clay Modificado de plasticidade com dano acoplado*

Einav et al (2007) apresentaram, no último exemplo de seu trabalho, formulação de modelo MCC de plasticidade com dano acoplado. Narram os autores que a principal característica de curvas tensão-deformação de compressão de argilas sensíveis, quando comparadas com curvas de argilas remoldadas, é a degradação da pressão isotrópica de pré-adensamento (Burland, 1990, Liu e Carter, 1999). Este comportamento tem sido modelado por diferentes caminhos, com foco na perda de resistência, caso dos métodos apresentados no início deste capítulo, do MCC Estruturado e da Teoria do Estado Perturbado.

Entretanto, há evidência experimental de que a perda de resistência ocorre juntamente com a degradação dos módulos elásticos (Holtz et al., 1986). Estes são os motivos que levaram os autores a adotar enfoque de hiperplasticidade com dano para estender a aplicação do MCC. Os autores seguiram as idéias apresentadas para formulação de hiperplasticidade do MCC, sem dano, apresentadas por Houlsby (1981) e Collins e Houlsby (1997).

Foram utilizadas duas variáveis internas escalares para modelar dano em argilas sensíveis, uma para modo de deformação volumétrico e outra para modo de deformação cisalhante.

O modelo Cam Clay Modificado, descrito no item 2.8, pode, de acordo com Collins e Houlsby, ser descrito através de dois potenciais: potencial de energia livre de Gibbs e potencial de dissipação:

$$g = -\kappa^* p \left( \log \left( \frac{p}{p_0} \right) - 1 \right) - \frac{q^2}{6G} - p.\alpha_p^v - q.\alpha_p^s \quad (2.193)$$

$$d^s = \frac{p_y}{2} \left( \dot{\alpha}_p^v + \sqrt{(\dot{\alpha}_p^v)^2 + (M\dot{\alpha}_p^s)^2} \right) \geq 0 \quad (2.194)$$

onde

$$p_y = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v) \quad (2.195)$$

$$\Pi(\alpha_p^v) = \exp(\alpha_p^v / (\lambda^* - \kappa^*)) \quad (2.196)$$

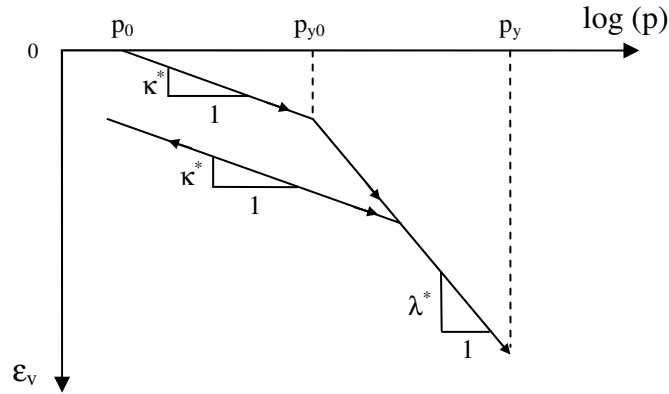
Nas expressões anteriores,  $p$  e  $q$  são a pressão média efetiva e a tensão desviadora, do ensaio triaxial;  $p_0$  é uma pressão de referência;  $p_y$  é a *pressão de pré-adensamento*;  $G$  é o módulo cisalhante;  $\kappa^*$  é o índice de compressão elástico relacionado ao módulo volumétrico e  $\lambda^*$  é o índice de compressão, relacionado à declividade da reta virgem.

A definição da pressão de pré-adensamento  $p_y$ , junto com a relação tensão-deformação volumétrica  $\varepsilon_v = -\partial g / \partial p = \kappa^* \cdot \log(p/p_0) + \alpha_p^v$ , produz a curva de compressão do MCC convencional indicada na Figura 2.36.

Einav et al (2007) consideraram um modelo similar, mas agora incluindo dano, que pode ser completamente derivado dos dois potenciais seguintes:

$$g = -\frac{\kappa^* p}{(1 - \alpha_d^v)} \left( \log \left( \frac{p}{p_0} \right) - 1 \right) - \frac{q^2}{6G(1 - \alpha_d^s)} - p.\alpha_p^v - q.\alpha_p^s \quad (2.197)$$

**Figura 2.36. Modelo de compressão convencional MCC (Einav et al, 2007).**



$$d^g = \frac{p_y}{2} \left( \dot{\alpha}_p^v + R_d^v \dot{\alpha}_d^v + \sqrt{(r_p \dot{\alpha}_p^v)^2 + (r_d R_d^v \dot{\alpha}_d^v)^2 + (r_p M \dot{\alpha}_p^s)^2 + (r_d M R_d^s \dot{\alpha}_d^s)^2} \right) \geq 0 \quad (2.198)$$

onde

$$R_d^v(p, \alpha_d^v) = \frac{\kappa^*}{(1 - \alpha_d^v)^2} \left( \log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1 \right) \quad (2.199)$$

$$R_d^s(q, \alpha_d^s) = \frac{q}{6G(1 - \alpha_d^s)^2} \quad (2.200)$$

e é requerida, de forma adicional, a condição:

$$\frac{1}{r_p^2} + \frac{1}{r_d^2} = 1 \quad (2.168 - \text{rep.})$$

Nas expressões anteriores,  $\alpha_d^v$  e  $\alpha_d^s$  são as duas variáveis internas de dano, associadas com as deformações volumétricas e cisalhantes, respectivamente;  $\alpha_p^v$  e  $\alpha_p^s$  são as variáveis internas de deformação plástica associadas com as deformações volumétricas e cisalhantes, respectivamente.

A função de escoamento, obtida da função de dissipação, em termos de tensões generalizadas é expressa como:

$$y^g = \left( \frac{\chi_p^v - p_y / 2}{r_p} \right)^2 + \left( \frac{\chi_d^v - R_d^v p_y / 2}{r_d R_d^v} \right)^2 + \left( \frac{\chi_p^s}{r_p M} \right)^2 + \left( \frac{\chi_d^s}{r_d M R_d^s} \right)^2 - \left( \frac{p_y}{2} \right)^2 = 0 \quad (2.201)$$

A função de escoamento no espaço das tensões é obtida pela consideração do princípio da ortogonalidade de Ziegler, que implica que:  $\chi_p^v = \bar{\chi}_p^v$ ,  $\chi_p^s = \bar{\chi}_p^s$ ,  $\chi_d^v = \bar{\chi}_d^v$  e  $\chi_d^s = \bar{\chi}_d^s$ , e pela substituição das expressões das tensões generalizadas abaixo, em (2.201):

$$\bar{\chi}_p^v = -\frac{\partial g}{\partial \alpha_p^v} = p \quad \bar{\chi}_d^v = -\frac{\partial g}{\partial \alpha_d^v} = \frac{\kappa^* p}{(1 - \alpha_d^v)^2} \left( \log \left( \frac{p}{p_0} - 1 \right) \right) \quad (2.202)$$

$$\bar{\chi}_p^s = -\frac{\partial g}{\partial \alpha_p^s} = q \quad \bar{\chi}_d^s = -\frac{\partial g}{\partial \alpha_d^s} = \frac{q^2}{6G(1 - \alpha_d^s)^2} \quad (2.203)$$

Produzindo:

$$y = \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 + \left( \frac{q}{M} \right)^2 - \left( \frac{p_y}{2} \right)^2 \leq 0 \quad (2.204)$$

onde:

$$p_y = p_y(\alpha_p^v, \alpha_d^v, \alpha_d^s) \quad (2.205)$$

A forma específica desta função (2.205) determina o papel dos parâmetros de dano. Se ela se reduz à  $p_y = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v)$ , isto é, à equação (2.195), a função de escoamento do modelo Cam Clay Modificado com dano reduz-se à do modelo Cam Clay Modificado convencional.

Para o modelo geral, incluindo dano, as deformações volumétricas e cisalhantes são obtidas, pelas derivadas da função potencial de energia livre de Gibbs, dada por (2.197):

$$\varepsilon_v = -\frac{\partial g}{\partial p} = \bar{\kappa}^* \log \left( \frac{p}{p_0} \right) + \alpha_p^v = \frac{\kappa^*}{(1 - \alpha_d^v)} \log \left( \frac{p}{p_0} \right) + \alpha_p^v \quad (2.206)$$

$$\varepsilon_s = -\frac{\partial g}{\partial q} = \frac{q}{3G} + \alpha_p^s = \frac{q}{3G(1 - \alpha_d^s)} + \alpha_p^s \quad (2.207)$$

As expressões (2.206) e (2.207) concordam com a versão hiperplástica do modelo Cam Clay Modificado obtido por Collins e Housby, mas agora o modelo inclui as duas variáveis internas de dano. O efeito das variáveis de dano se traduz pela redução da rigidez do material. O módulo cisalhante e o índice de compressibilidade (de recompressão), efetivos, foram expressos por Einav et al (2007) como:

$$\bar{G} = G(1 - \alpha_d^s) \quad (2.208)$$

$$\bar{\kappa}^* = \frac{\kappa^*}{(1 - \alpha_d^v)} \quad (2.209)$$

Cabe notar que o dano não tem influência sobre a compressibilidade ao longo da reta virgem, isto é, não tem influência sobre o índice de compressão  $\lambda^*$ .

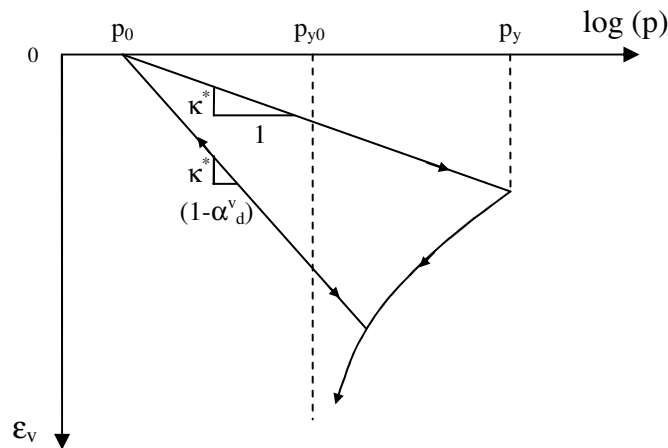
Einav et al (2007) examinaram os comportamentos extremos do modelo à compressão. Em primeiro lugar, postularam um hipotético modelo hiperelástico com dano, pela imposição de  $r_d = 1$  e  $r_p \rightarrow \infty$ , removendo desta forma a influência da dependência da variável interna de plasticidade,  $\alpha_p$ . Mais ainda, assumiram a seguinte expressão para descrever a degradação do parâmetro de resistência com o dano, substituindo as equações (2.195) e (2.196) por:

$$p_y = p_{y0} \cdot \Gamma(\alpha_d^v) \quad (2.210)$$

$$\Gamma(\alpha_d^v) = (\delta_{rem} + (1 - \delta_{rem}) \exp(-3\alpha_d^v(1 - D_{95})/D_{95}(1 - \alpha_d^v))) \quad (2.211)$$

onde  $\delta_{rem}$  é a razão de resistência completamente remoldada, e  $D_{95}$  é a quantidade de dano necessária para causar 95% de redução (de pico para a remoldada). Observam os autores que  $\exp(-3) \approx 0,05$ . Esta fórmula e a sua aplicação à equação (2.206) permitem estabelecer a curva de compressão do modelo MCC hiperelástico com dano, mostrada na Figura 2.37.

**Figura 2.37. Modelo de compressão MCC hiperelástico com dano (Einav et al, 2007).**



Em segundo lugar, os autores considerando que é fato bem estabelecido, que argilas (sensíveis ou não) são fortemente dependentes da deformação plástica, examinaram o comportamento do modelo hiperplástico com a combinação de plasticidade e dano. Desta vez

assumiram a combinação das equações (2.195) e (2.196) para modelar a variação da pressão de pré-adensamento, com o dano e com a deformação plástica volumétrica, na forma:

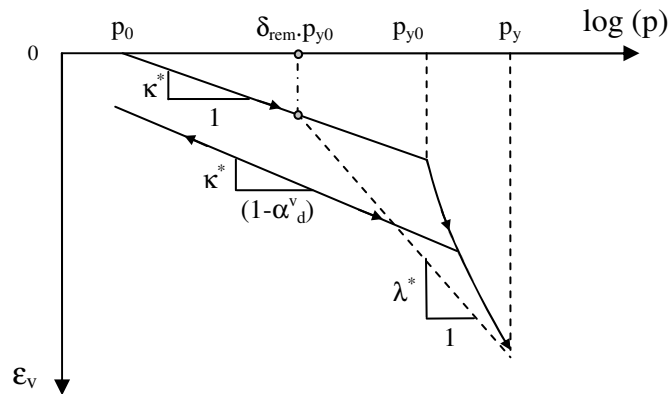
$$p_y = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v) \Gamma(\alpha_d^v) \quad (2.212)$$

Neste enfoque a deformação plástica não é eliminada da equação (2.206). Antes do escoamento o comportamento elástico é dado pelo índice efetivo de compressibilidade  $\bar{\kappa}^* = \kappa^* / (1 - \alpha_d^v)$ , definindo a declividade danificada da relação linear no espaço  $\varepsilon_v - \log(p)$ . Após o escoamento, a curva de compressão normal isotrópica ( $q = 0$ ) satisfaz  $p = p_y$ , e então passam a ocorrer os efeitos combinados de endurecimento por plastificação e amolecimento por dano. Quando  $\alpha_d^v = 1$ , e o material está completamente remoldado, a pressão  $p$  e pressão de pré-adensamento se reduzem a:

$$p = p_y = p_y(\alpha_p^v, \alpha_d^v) = \delta_{rem} p_y(\alpha_p^v) = \delta_{rem} \cdot p_{y0} \cdot \exp\left(\frac{\alpha_p^v}{\lambda^* - \kappa^*}\right) \quad (2.213)$$

comportamento este que está representado na Figura 2.38.

**Figura 2.38. Comportamento tensão-deformação de compressão de modelo MCC hiperplástico com dano (modificado de Einav et al, 2007).**

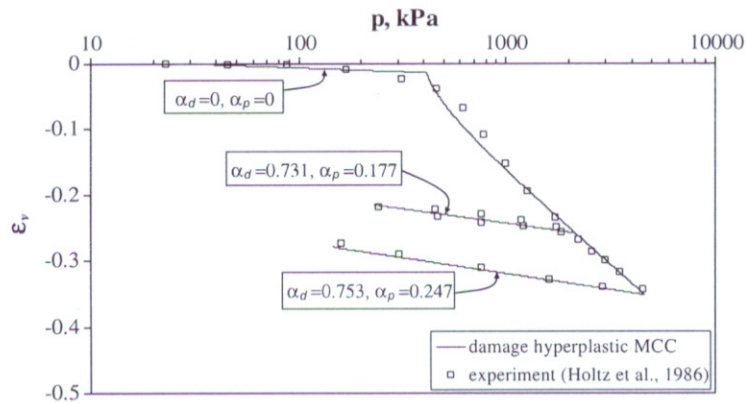


Einav et al (2007) aplicaram o modelo descrito a dados experimentais obtidos por Holtz et al (1986), em ensaios oedométricos sobre amostras naturais indeformadas, extraídas de depósitos de argilas sensíveis. Nestes testes foram medidas tensões verticais e horizontais, permitindo reconstruir a curva apresentada na Figura 2.39. Os mesmos testes foram repetidos usando o modelo MCC hiperplástico com dano, e previsões foram plotadas na citada figura.

Os resultados concordaram bem com o fato que a resistência e o índice de compressibilidade  $\kappa^*$  mostram degradação durante o carregamento.

Nesta Figura 2.39 os autores anotaram a quantidade de dano e de deformação plástica que corresponde aos estágios de recarregamento. Como se pode observar, o dano cresce de zero ( $\alpha_d = 0$ ) no início, para  $\alpha_d = 0,731$  e  $\alpha_d = 0,753$  durante o primeiro e o segundo estágio de recarregamento, respectivamente. Isto produz um crescimento no índice efetivo de compressibilidade de  $\bar{\kappa}^* = \kappa^* = 0,005$  para  $\bar{\kappa}^* = 0,018$  e  $\bar{\kappa}^* = 0,020$ , ou de forma correspondente, um fator de redução em torno de quatro vezes no módulo volumétrico. Os autores chamam a atenção para a importância prática de tal redução de rigidez em problemas práticos de engenharia, e para a potencialidade do modelo representar estes efeitos.

**Figura 2.39. Predições do modelo hiperplástico com dano de resultados experimentais de resposta volumétrica tensão-deformação de ensaios oedométricos (Holtz et al, 1986) (Einav et al, 2007).**



Para completar o modelo os autores introduziram o efeito de dano por cisalhamento na função da tensão de pré-adensamento, utilizando a expressão a seguir:

$$p_y(\alpha_p^v, \alpha_d^v, \alpha_d^s) = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v) \cdot \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)} \quad (2.214)$$

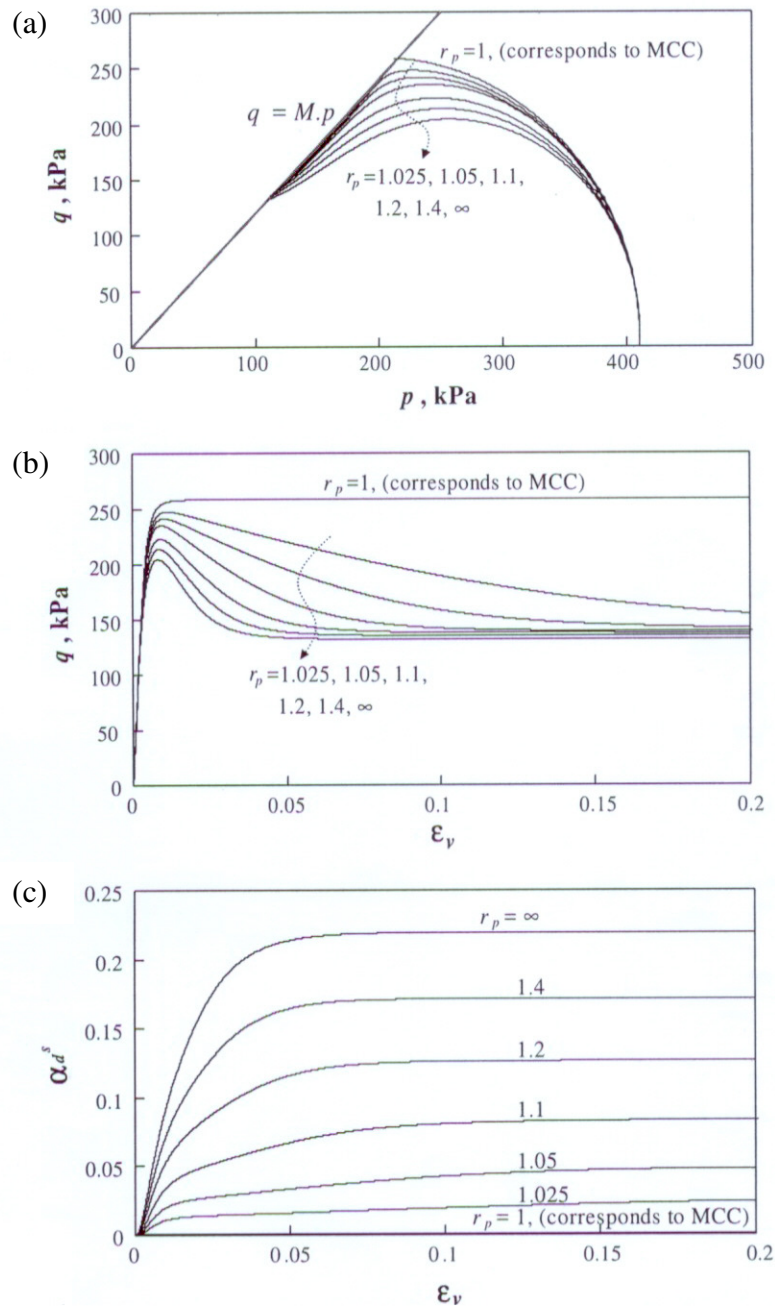
onde o termo de raiz quadrada foi escolhido de forma que em compressão normal o modelo tenha comportamento exatamente igual ao indicado nas Figuras 2.38 e 2.39, e que para deformações cisalhantes o fator de redução seja simétrico.

A Figura 2.40 apresenta exemplo de Einav et al (2007) do comportamento do modelo sob condição de cisalhamento não-drenado ( $\varepsilon_v = 0$ ), para argila sensível normalmente



adensada, onde é examinado o efeito de acoplamento dano-plasticidade através do parâmetro  $r_p$ . Os parâmetros restantes são idênticos aos do exemplo apresentado na Figura 2.39 ( $\kappa = 0,005$ ,  $\lambda^* = 0,09$ ,  $p_{y0} = 410$  kPa,  $M = 1,2$ ,  $D_{95} = 0,93$ ,  $\delta_{rem} = 0,3$ ,  $G = 20.000$  kPa).

**Figura 2.40. Efeito de parâmetro de acoplamento dano-plasticidade  $r_p$  em testes de cisalhamento não-drenado: (a) trajetórias de tensão, (b) resposta tensão-deformação ao cisalhamento e (c) evolução da variável de dano de cisalhamento (Einav et al, 2007).**



Quando  $r_p = 1$ , o modelo tem comportamento exatamente igual ao MCC convencional, pois o mecanismo de dano está desativado. Para  $r_p > 1$  o modelo pode sofrer dano e, portanto, amolecimento. Quando  $r_p \rightarrow \infty$  ( $r_d = 1$ ), o modelo torna-se puramente hiperelástico com dano, sem qualquer deformação plástica. Neste modelo as trajetórias de tensão sempre terminam ao longo da linha de ruptura  $q = Mp$ , o que implica em ser constante o ângulo de atrito, mas os estados de tensão finais, dados pelas coordenadas  $(p, q)$  no estado crítico, são menores do que para o MCC original, refletindo a sensibilidade do material ao cisalhamento, o que pode ser visto na Figura 2.40a.

A Figura 2.40b mostra o desenvolvimento de resistência de pico e o decaimento para a resistência residual com a deformação, por efeito do aumento da proporção dano-plasticidade. E a Figura 2.40c apresenta a evolução da variável interna de dano associada ao cisalhamento durante o teste, atingindo um valor crítico assintótico com a deformação, valor este que aumenta com o aumento do acoplamento através do parâmetro  $r_p$ .

A aplicabilidade do método a solos residuais estruturados é verificada nos capítulos à frente. A introdução de variáveis internas de dano, em associação com as variáveis internas de plasticidade, de forma unificada, dentro de um mesmo contexto termomecânico, simplifica a compreensão da tradução dos fenômenos físicos de escoamento, endurecimento, amolecimento e de evolução de deformações plásticas, com o carregamento, em equações matemáticas.

A dificuldade de aplicação de métodos derivados da hiperplasticidade está na formulação dos potenciais de energia. No presente modelo que é examinado à frente, modelo Cam Clay Modificado hiperplástico com dano acoplado, a formulação do potencial de dissipação de energia, que recaiu em caso de dano acoplado, não seguiu a lei de formação geral, dado pela equação (2.102), aqui novamente repetida, em forma- $f$ .

$$d^f = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^N [c_i^f(\varepsilon, \mathcal{M}) \Phi_i(\dot{\tilde{\alpha}}_i)]^n} \quad (2.102 - \text{rep.})$$

Na formulação do modelo, a função de dissipação expressa pela equação (2.198), aqui também repetida, para comparação, não permite a reescrita na forma da equação (2.102).

$$d^s = \frac{P_y}{2} \left( \dot{\alpha}_p^v + R_d^v \dot{\alpha}_d^v + \sqrt{(r_p \dot{\alpha}_p^v)^2 + (r_d R_d^v \dot{\alpha}_d^v)^2 + (r_p M \dot{\alpha}_p^s)^2 + (r_d M R_d^s \dot{\alpha}_d^s)^2} \right) \geq 0 \quad (2.198 - \text{rep.})$$

Tal fato complica a obtenção da função de escoamento, por meio da transformação de Legendre degenerada aplicada à função de dissipação (2.97), que no caso de função sob forma da equação (2.102), é obtida por aplicação da equação (2.104).

$$y^f = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\tilde{\chi}_i \bullet \tilde{\chi}_i}{c_i^f(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathcal{M})^2} \right) - 1 \leq 0 \quad (2.104 - \text{rep.})$$

### Modelo hiperplástico com dano acoplado para solos parcialmente saturados

Para solos parcialmente saturados o estado de tensão é caracterizado pelo uso de dois campos de tensão, como já exposto na descrição do modelo Barcelona. Assim, o estado de tensão caracterizado pelas variáveis triaxiais  $q$  e  $p$ , deve ser definido pelo excesso de pressão média em relação à pressão atmosférica:  $p' = p - u_a$ , pela tensão desviadora  $q$  e pela tensão de sucção  $s = u_a - u_w$ , diferença entre a pressão do ar e da água nos vazios do solo.

Como o aumento de tensão de sucção provoca deformações plásticas volumétricas, pode-se introduzir variável interna associada à deformação volumétrica por efeito de sucção, uma variável interna  $\alpha_s^v$ , associada a uma tensão generalizada (de sucção)  $\chi_s$ .

A formulação do modelo exige o estabelecimento de potencial de energia livre e de dissipação. Extensão natural é desmembrar o efeito das componentes de tensão ( $p$ ,  $q$ ), nos potenciais dados por (2.197) e (2.198), aqui repetidos.

$$g = -\frac{\kappa^* p}{(1 - \alpha_d^v)} \left( \log \left( \frac{p}{p_0} \right) - 1 \right) - \frac{q^2}{6G(1 - \alpha_d^s)} - p \cdot \alpha_p^v - q \cdot \alpha_p^s \quad (2.197 - \text{rep.})$$

$$d^s = \frac{p_y}{2} \left( \dot{\alpha}_p^v + R_d^v \dot{\alpha}_d^v + \sqrt{(r_p \dot{\alpha}_p^v)^2 + (r_d R_d^v \dot{\alpha}_d^v)^2 + (r_p M \dot{\alpha}_p^s)^2 + (r_d M R_d^s \dot{\alpha}_d^s)^2} \right) \geq 0 \quad (2.198 - \text{rep.})$$

em função das componentes dos dois campos de tensão efetivos, ( $p'$ ,  $q$ ) e  $s$ .

Para a condição de escoamento, deve-se incorporar efeito de sucção à expressão (2.214)

$$p_y(\alpha_p^v, \alpha_s^v, \alpha_d^v, \alpha_d^s) = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v) \cdot \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)} \cdot \Omega(\alpha_s^v) \quad (2.215)$$

Tal proposta desvincula o escoamento por sucção do escoamento por endurecimento.

### 3. ALGORITMO

O modelo MCC com dano acoplado, apresentado no exemplo (c) do item 2.12.4, é descrito em termos de componentes de tensão  $p$  e  $q$ , utilizadas para representar resultados de ensaios triaxiais em solos, juntamente com as componentes de deformação associadas,  $\varepsilon_v$  e  $\varepsilon_s$ , correspondentes a  $p$  e  $q$ , respectivamente. O modelo é definido por:

**Função potencial energia livre de Gibbs:**

$$g = -\frac{\kappa^* p}{(1 - \alpha_d^v)} \left( \log \left( \frac{p}{p_0} \right) - 1 \right) - \frac{q^2}{6G(1 - \alpha_d^s)} - p \cdot \alpha_p^v - q \cdot \alpha_p^s \quad (2.197 - \text{rep.})$$

**Função potencial de dissipação de energia:**

$$d^g = \frac{p_y}{2} \left( \dot{\alpha}_p^v + R_d^v \dot{\alpha}_d^v + \sqrt{(r_p \dot{\alpha}_p^v)^2 + (r_d R_d^v \dot{\alpha}_d^v)^2 + (r_p M \dot{\alpha}_p^s)^2 + (r_d M R_d^s \dot{\alpha}_d^s)^2} \right) \geq 0 \quad (2.198 - \text{rep.})$$

$$\text{onde: } R_d^v(p, \alpha_d^v) = \frac{\kappa^*}{(1 - \alpha_d^v)^2} \left( \log \left( \frac{p}{p_0} \right) - 1 \right) \quad (2.199 - \text{rep.})$$

$$R_d^s(q, \alpha_d^s) = \frac{q}{6G(1 - \alpha_d^s)^2} \quad (2.200 - \text{rep.})$$

e é requerida, de forma adicional, a condição:

$$\frac{1}{r_p^2} + \frac{1}{r_d^2} = 1 \quad (2.168 - \text{rep.})$$

**Função de escoamento** (em termos de tensões generalizadas de dissipação):

$$y^g = \left( \frac{\mathcal{X}_p^v - p_y / 2}{r_p} \right)^2 + \left( \frac{\mathcal{X}_d^v - R_d^v p_y / 2}{r_d R_d^v} \right)^2 + \left( \frac{\mathcal{X}_p^s}{r_p M} \right)^2 + \left( \frac{\mathcal{X}_d^s}{r_d M R_d^s} \right)^2 - \left( \frac{p_y}{2} \right)^2 = 0 \quad (2.201 - \text{rep.})$$

**Função de escoamento** (em termos de tensões):

A função de escoamento no espaço das tensões é obtida pela consideração do princípio da ortogonalidade de Ziegler, que implica que:  $\chi_p^v = \bar{\chi}_p^v$ ,  $\chi_p^s = \bar{\chi}_p^s$ ,  $\chi_d^v = \bar{\chi}_d^v$  e  $\chi_d^s = \bar{\chi}_d^s$ , e pela substituição das expressões das tensões generalizadas abaixo, em (2.201):

$$\bar{\chi}_p^v = -\frac{\partial g}{\partial \alpha_p^v} = p \quad \bar{\chi}_d^v = -\frac{\partial g}{\partial \alpha_d^v} = \frac{\kappa^* p}{(1 - \alpha_d^v)^2} \left( \log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1 \right) \quad (2.202 - \text{rep.})$$

$$\bar{\chi}_p^s = -\frac{\partial g}{\partial \alpha_p^s} = q \quad \bar{\chi}_d^s = -\frac{\partial g}{\partial \alpha_d^s} = \frac{q^2}{6G(1 - \alpha_d^s)^2} \quad (2.203 - \text{rep.})$$

donde resulta:

$$y = \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 + \left( \frac{q}{M} \right)^2 - \left( \frac{p_y}{2} \right)^2 \leq 0 \quad (2.204 - \text{rep.})$$

onde:

$$p_y = p_{y0}(\alpha_p^v, \alpha_d^v, \alpha_d^s) \quad (2.205 - \text{rep.})$$

A forma específica desta função (2.205) determina o papel dos parâmetros de dano, e, por sua vez, tem papel central na modelagem do material.

A formulação do modelo é completada com a especificação da segunda condição de escoamento limite de ruptura do MCC,  $q_u = M \cdot p$ , já apresentada como equação (2.15), e que pode ser reescrita como:

$$y = q - M \cdot p = 0 \quad (2.15 - \text{rep.})$$

A esta função de escoamento corresponde função conjugada de dissipação, que tem forma geral (2.113), que para o presente modelo pode-se reescrever, ajustando a notação de (2.113), como:

$$d^r = \bar{\chi}_p^v \cdot \dot{\alpha}_p^v + \bar{\chi}_p^s \cdot \dot{\alpha}_p^s \quad (2.113 - \text{rep.})$$

A operação de derivação direta sobre a função potencial de energia (2.197) permite estabelecer as expressões para as deformações  $\varepsilon_v$  e  $\varepsilon_s$ , aqui repetidas:

$$\varepsilon_v = -\frac{\partial g}{\partial p} = \bar{\kappa}^* \log\left(\frac{p}{p_0}\right) + \alpha_p^v = \frac{\kappa^*}{(1 - \alpha_d^v)} \log\left(\frac{p}{p_0}\right) + \alpha_p^v \quad (2.206 - \text{rep.})$$

$$\varepsilon_s = -\frac{\partial g}{\partial q} = \frac{q}{3G} + \alpha_p^s = \frac{q}{3G(1-\alpha_d^s)} + \alpha_p^s \quad (2.207 - \text{rep.})$$

que representam as deformações finitas, correspondentes ao estado de tensão  $(p, q)$ .

Estas expressões permitem a construção das curvas de ensaios triaxiais, como será mostrado adiante. Entretanto, para a aplicação a métodos numéricos incrementais, é necessário determinar os incrementos de deformação volumétrica e de distorção, que podem ser expressos pelas derivadas de (2.206) e (2.207), em relação ao "tempo", como:

$$\dot{\varepsilon}_v = \kappa^* \cdot \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{(1-\alpha_d^v)} \log \left( \frac{p}{p_0} \right) \right] + \dot{\alpha}_p^v = \kappa^* \cdot \left[ \frac{\dot{\alpha}_d^v}{(1-\alpha_d^v)^2} \log \left( \frac{p}{p_0} \right) + \frac{1}{(1-\alpha_d^v)} \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) \right] + \dot{\alpha}_p^v$$

ou:  $\dot{\varepsilon}_v = \bar{\kappa}^* \cdot \left[ \frac{\dot{\alpha}_d^v}{(1-\alpha_d^v)} \log \left( \frac{p}{p_0} \right) + \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) \right] + \dot{\alpha}_p^v \quad (3.1)$

onde:  $\bar{\kappa}^* = \kappa^* / (1-\alpha_d^v)$ .

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{d}{dt} \left[ \frac{q}{3G(1-\alpha_d^s)} \right] + \dot{\alpha}_p^s = \frac{\dot{q}}{3G(1-\alpha_d^s)} + \frac{q \cdot \dot{\alpha}_d^s}{3G(1-\alpha_d^s)^2} + \dot{\alpha}_p^s$$

ou:  $\dot{\varepsilon}_s = \frac{1}{\bar{G}} \left[ \dot{q} + \frac{q \cdot \dot{\alpha}_d^s}{(1-\alpha_d^s)} \right] + \dot{\alpha}_p^s \quad (3.2)$

onde:  $\bar{G} = G(1-\alpha_d^s)$ .

Nas expressões (3.1) e (3.2) aparecem os incrementos de variáveis internas de plasticidade e de dano, que podem ser obtidos da regra de fluxo aplicada para a função de escoamento, por meio de:

$$\dot{\alpha}_p^v = \lambda \cdot \frac{\partial y^g}{\partial \chi_p^v} = \lambda \cdot 2 \cdot \left( \frac{\chi_p^v - p_y / 2}{r_p^2} \right) \quad (3.3)$$

$$\dot{\alpha}_d^v = \lambda \cdot \frac{\partial y^g}{\partial \chi_d^v} = \lambda \cdot 2 \cdot \left( \frac{\chi_d^v - R_d^v p_y / 2}{(r_d R_d^v)^2} \right) \quad (3.4)$$

$$\dot{\alpha}_p^s = \lambda \cdot \frac{\partial y^g}{\partial \chi_p^s} = \lambda \cdot 2 \cdot \frac{\chi_p^s}{(r_p M)^2} \quad (3.5)$$

$$\dot{\alpha}_d^s = \lambda \cdot \frac{\partial y^g}{\partial \chi_d^s} = \lambda \cdot 2 \cdot \frac{\chi_d^s}{(r_d M R_d^s)^2} \quad (3.6)$$

Aplicando-se a condição de ortogonalidade de Ziegler, para componentes de tensão que satisfazem à condição de escoamento, obtêm-se as expressões anteriores em termos de tensões:

$$\dot{\alpha}_p^v = 2\lambda \cdot \left( \frac{\mathcal{X}_p^v - p_y / 2}{r_p^2} \right) = 2\lambda \cdot \left( \frac{p - p_y / 2}{r_p^2} \right) \quad (3.7)$$

$$\dot{\alpha}_d^v = 2\lambda \cdot \left( \frac{\mathcal{X}_d^v - R_d^v p_y / 2}{(r_d R_d^v)^2} \right) = 2\lambda \cdot \frac{\left( p - \frac{p_y}{2} \right)}{r_d^2 \cdot \left( \frac{\kappa^*}{(1 - \alpha_d^v)^2} \cdot \left[ \log \left( \frac{p}{p_0} \right) - 1 \right] \right)} \quad (3.8)$$

$$\dot{\alpha}_p^s = 2\lambda \cdot \frac{\mathcal{X}_p^s}{(r_p M)^2} = 2\lambda \cdot \frac{q}{(r_p M)^2} \quad (3.9)$$

$$\dot{\alpha}_d^s = 2\lambda \cdot \frac{\mathcal{X}_d^s}{(r_d M R_d^s)^2} = 2\lambda \cdot \frac{6G(1 - \alpha_d^s)^2}{(r_d M)^2} \quad (3.10)$$

Como as variáveis internas de dano variam de 0 para 1, de (3.8) e (3.10) pode-se notar que os incrementos tendem a zero quando as variáveis tendem a 1.

A inclusão dos incrementos de variáveis internas, dados por (3.7) a (3.10), em (3.1) e (3.2) exige a determinação do fator multiplicador  $\lambda$ .

### 3.1 FATOR MULTIPLICADOR $\lambda$

Ao ser atingida condição de escoamento, caso em que as componentes de tensão tornam  $y = 0$  em (2.204), a continuação de processo de carregamento implica que (2.204) deverá continuar a ser satisfeita, de forma que  $dy = 0$ , e, portanto:

$$dy = 2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \left( dp - \frac{dp_y}{2} \right) + 2 \cdot \frac{q}{M^2} \cdot dq - 2 \cdot \frac{p_y}{2} \cdot \frac{dp_y}{2} = 0 \quad (3.11)$$

equação que se reduz a:

$$\left( p - \frac{p_y}{2} \right) dp - p \frac{dp_y}{2} + \frac{q}{M^2} \cdot dq = 0 \quad (3.12)$$

Os incrementos de tensão de (3.12) podem ser colocados em função dos incrementos de variáveis internas de deformação plástica e de dano, na forma seguinte:

De (3.1), invertendo-se a expressão e explicitando o incremento  $dp^I$ , obtém-se:

$$\dot{p} = \frac{p}{\bar{K}^*} \left[ \dot{\varepsilon}_v - \dot{\alpha}_p^v - \bar{K}^* \cdot \frac{\dot{\alpha}_d^v}{(1 - \alpha_d^v)} \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right) \right] \quad (3.13)$$

onde aplicando as expressões dos incrementos das variáveis internas (3.3) e (3.4) resulta:

$$\dot{p} = \frac{p}{\bar{K}^*} \left[ \dot{\varepsilon}_v - \lambda \cdot 2 \cdot \left( \frac{\chi_p^v - p_y / 2}{r_p^2} \right) - \lambda \cdot 2 \cdot \left( \frac{\chi_d^v - R_d^v p_y / 2}{(r_d R_d^v)^2} \right) \cdot \frac{\bar{K}^*}{(1 - \alpha_d^v)} \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right) \right] \quad (3.14)$$

Da mesma forma, de (3.2) invertendo-se a expressão e isolando  $dq$ , obtém-se:

$$\dot{q} = 3\bar{G} \left[ \dot{\varepsilon}_s - \dot{\alpha}_p^s - \frac{q}{3\bar{G}(1 - \alpha_d^s)} \cdot \dot{\alpha}_d^s \right] \quad (3.15)$$

onde aplicando os incrementos das variáveis internas (3.5) e (3.6) resulta:

$$\dot{q} = 3\bar{G} \left[ \dot{\varepsilon}_s - \lambda \cdot 2 \cdot \frac{\chi_p^s}{(r_p M)^2} - \lambda \cdot 2 \cdot \frac{\chi_d^s}{(r_d M R_d^s)^2} \cdot \frac{q}{3\bar{G}(1 - \alpha_d^s)} \right] \quad (3.16)$$

E, finalmente, o incremento  $dp_y$ , da pressão de escoamento, é obtido da diferenciação da expressão de  $p_y$ . Para a expressão genérica proposta por Einav et al (2007) na forma:

$$p_y(\alpha_p^v, \alpha_d^v, \alpha_d^s) = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v) \cdot \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)} \quad (2.214 - \text{rep.})$$

o incremento  $dp_y$  é expresso por:

---

<sup>1</sup> Na obtenção deste resultado lançou-se mão de um abuso de notação, substituindo o incremento de tensão  $dp$  por  $\dot{p}$ , que a rigor significa derivada de  $p$  em relação tempo. Da mesma forma as demais diferenciais envolvidas foram substituídas pelas suas derivadas em relação ao tempo. Como os processos aqui examinados são independentes do tempo (*rate independent*), as diferenciais são proporcionais ao incremento de tempo considerado, ou, dito de outra forma, são proporcionais às suas taxas de variação em relação ao "tempo".



$$\dot{p}_y = p_{y0} \cdot \left[ \Pi'(\alpha_p^v) \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)} \dot{\alpha}_p^v + \Pi(\alpha_p^v) \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}{\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}} \dot{\alpha}_d^v + \Pi(\alpha_p^v) \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma'(\alpha_d^s)}{\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}} \dot{\alpha}_d^s \right] \quad (3.17)$$

onde substituindo as expressões (3.3), (3.4) e (3.6) obtém-se:

$$\dot{p}_y = p_{y0} \cdot \left[ \Pi'(\alpha_p^v) \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)} \cdot \lambda \cdot 2 \cdot \left( \frac{\chi_p^v - p_y / 2}{r_p^2} \right) + \Pi(\alpha_p^v) \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}{\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}} \cdot \lambda \cdot 2 \cdot \left( \frac{\chi_d^v - R_d^v p_y / 2}{(r_d R_d^v)^2} \right) + \right. \\ \left. \Pi(\alpha_p^v) \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma'(\alpha_d^s)}{\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}} \cdot \lambda \cdot 2 \cdot \frac{\chi_d^s}{(r_d M R_d^s)^2} \right] \quad (3.18)$$

Substituindo-se as expressões dos incrementos de tensão ( $dp$ ,  $dq$  e  $dp_y$ ) dados pelas expressões (3.16) a (3.18) em (3.12) e isolando  $\lambda$  resulta:

$$\lambda = \frac{\left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\bar{\kappa}^*} \cdot \dot{\epsilon}_v + 3\bar{G} \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\epsilon}_s}{\left\{ 2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\bar{\kappa}^*} \cdot \left[ \frac{\chi_p^v - p_y / 2}{r_p^2} + \left( \frac{\chi_d^v - R_d^v p_y / 2}{(r_d R_d^v)^2} \right) \cdot \frac{\bar{\kappa}^*}{(1 - \alpha_d^v)} \cdot \log \left( \frac{p}{p_0} \right) \right] + \right.} \\ \left. \frac{6\bar{G}}{M^2} \cdot q \cdot \left[ \frac{\chi_p^s}{(r_p M)^2} + \frac{\chi_d^s}{(r_d M R_d^s)^2} \cdot \frac{q}{3\bar{G}(1 - \alpha_d^s)} \right] + \right.} \\ \left. p \cdot p_{y0} \cdot \left[ \frac{\Pi'(\alpha_p^v) \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)} \left( \frac{\chi_p^v - p_y / 2}{r_p^2} \right) + \frac{\Pi(\alpha_p^v)}{2} \frac{\Gamma'(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}{\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}} \left( \frac{\chi_d^v - R_d^v p_y / 2}{(r_d R_d^v)^2} \right) + \right. \right.} \\ \left. \left. \frac{\Pi(\alpha_p^v)}{2} \frac{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma'(\alpha_d^s)}{\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}} \cdot \frac{\chi_d^s}{(r_d M R_d^s)^2} \right] \right\} \quad (3.19)$$

Substituindo ainda, as expressões das tensões generalizadas, dadas por (2.202) e (2.203), obtém-se  $\lambda$  expresso em termos de tensões triaxiais ( $p$ ,  $q$ ):

$$\lambda = \frac{\left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\bar{\kappa}^*} \cdot \dot{\epsilon}_v + 3\bar{G} \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\epsilon}_s}{\left\{ 2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 \cdot \frac{p}{\bar{\kappa}^*} \cdot \left[ \frac{1}{r_p^2} + \frac{\log\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\left(\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right)} \cdot \frac{1}{r_d^2} \right] + \frac{6\bar{G}}{M^2} \cdot q \cdot \left[ \frac{q}{(r_p M)^2} + \frac{2q}{(r_d M)^2} \right] + \right.} \\ \left. p \cdot p_{y0} \cdot \left[ \frac{\Pi(\alpha_p^v) \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)} \left( \frac{p - p_y / 2}{r_p^2} \right) + \frac{\Pi(\alpha_p^v)}{2} \cdot \frac{\Gamma'(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}{\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}} \cdot \frac{(p - p_y / 2)}{r_d^2 \frac{\kappa^*}{(1 - \alpha_d^v)^2} \cdot \left(\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right)} + \frac{\Pi(\alpha_p^v)}{2} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma'(\alpha_d^s)}{\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}} \cdot \frac{6G \cdot (1 - \alpha_d^s)^2}{r_d^2 \cdot M^2} \right] \right\}} \quad (3.20)$$

Com a determinação do fator multiplicador  $\lambda$  pode-se então determinar os incrementos de deformação volumétrica e de distorção. Substituindo-se as expressões (3.7) e (3.8) em (3.1) obtém-se:

$$\dot{\epsilon}_v = \bar{\kappa}^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) + \lambda \cdot \left[ \frac{2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)}{r_d^2 \cdot \left[ \log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1 \right]} \right] + \lambda \cdot 2 \cdot \left( \frac{p - p_y / 2}{r_p^2} \right)$$

Ou:

$$\dot{\epsilon}_v = \bar{\kappa}^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) + \lambda \cdot 2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \left[ \frac{1}{r_d^2} \cdot \frac{\log\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\left[ \log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1 \right]} + \frac{1}{r_p^2} \right] \quad (3.21)$$

A parcela associada ao termo  $r_d$  é relacionada ao incremento de deformação induzido por efeito de dano, e a parcela associada ao termo  $r_p$  é relacionada ao incremento de deformação plástica, e, portanto, permanente.

O incremento de deformação de distorção é obtido pela substituição de (3.9) e (3.10) em (3.2):

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{1}{3G} \left[ \dot{q} + \lambda \cdot 2 \cdot \frac{6G(1-\alpha_d^s)^2}{(r_d M)^2} \frac{q}{(1-\alpha_d^s)} \right] + \lambda \cdot 2 \cdot \frac{q}{(r_p M)^2}$$

Equação que pode ser simplificada para:

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G} + \lambda \cdot \frac{4q}{r_d^2 M^2} + \lambda \cdot \frac{2q}{r_p^2 M^2} = \frac{\dot{q}}{3G} + \lambda \cdot \frac{2q}{M^2} \cdot \left[ \frac{2}{r_d^2} + \frac{1}{r_p^2} \right] \quad (3.22)$$

que pode ainda ser reescrita, tendo em vista a condição (2.168), como:

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G} + \lambda \cdot \frac{2q}{M^2} \cdot \left[ \frac{1}{r_d^2} + 1 \right] \quad (3.23)$$

O exame das expressões (3.21) e (3.23) permite concluir que em regime elástico (caso de carregamento sem escoamento, ou de descarregamento) e, portanto, de  $\lambda = 0$ , os incrementos de deformação volumétrica e de distorção são dados por:

$$\dot{\epsilon}_v = \bar{\kappa}^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) \quad (3.24)$$

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G} \quad (3.25)$$

Levando em conta a condição (2.168) ( $1/r_d^2 + 1/r_p^2 = 1$ ), é possível concluir ainda que, com o aumento da pressão média  $p$ , o termo entre colchetes em (3.21) tende a um, e, desta forma, com o aumento da razão ( $p/p_0$ ) o incremento de deformação volumétrica tende a:

$$\dot{\epsilon}_v \rightarrow \dot{\epsilon}_v = \bar{\kappa}^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) + \lambda \cdot 2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \quad (3.26)$$

A expressão (3.23) mostra que para caso de dano desativado, isto é, para  $r_d \rightarrow \infty$ , o incremento de deformação de distorção simplifica-se para:

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G} + \lambda \cdot \frac{2q}{M^2} \quad (3.27)$$

### 3.2 MODELO MCC HIPERELÁSTICO COM DANO

A análise do modelo sob condições limites permite prever propriedades do comportamento sob as condições usuais de ensaios tradicionais em Mecânica de Solos.

Considerando-se o caso limite de modelo hiperelástico com dano, para o qual  $r_d \rightarrow \infty$ , e  $r_d = 1$ , e introduzindo-se a condição de deformações plásticas nulas nas expressões de deformações totais  $\varepsilon_s$  e  $\varepsilon_v$ , dadas por (2.206) e (2.207), obtém-se:

$$\varepsilon_v = \frac{\bar{\kappa}^*}{(1 - \alpha_d^v)} \log\left(\frac{p}{p_0}\right) = \bar{\kappa}^* \log\left(\frac{p}{p_0}\right) \quad (3.28)$$

$$\varepsilon_s = \frac{q}{3G(1 - \alpha_d^s)} = \frac{q}{3G} \quad (3.29)$$

E os incrementos de deformação volumétrica e de distorção dados por (3.21) e (3.23) simplificam-se para:

$$\dot{\varepsilon}_v = \bar{\kappa}^* \cdot \left(\frac{\dot{p}}{p}\right) + \lambda \cdot 2 \cdot \left(p - \frac{p_y}{2}\right) \left[ \frac{\log\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\left[\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right]} \right] \quad (3.30)$$

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G} + \lambda \cdot \frac{4q}{M^2} \quad (3.31)$$

O fator de multiplicação  $\lambda$ , considerando que  $\Pi(\alpha_p^v \equiv 1)$  em (2.214) e (3.20), reduz-se a:

$$\lambda = \frac{\left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\bar{\kappa}^*} \cdot \dot{\epsilon}_v + 3\bar{G} \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\epsilon}_s}{\left\{ 2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 \cdot \frac{p}{\bar{\kappa}^*} \cdot \left[ \frac{\log\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\left(\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right)} \right] + \frac{12\bar{G}}{M^4} \cdot q^2 + \right.} \quad (3.32)$$

$$\left. p \cdot p_{y0} \cdot \left[ \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}{\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}} \cdot \frac{(p - p_y/2)}{\frac{\kappa^*}{(1 - \alpha_d^v)^2} \cdot \left(\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma'(\alpha_d^s)}{\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}} \cdot \frac{6G \cdot (1 - \alpha_d^s)^2}{M^2} \right] \right\}}$$

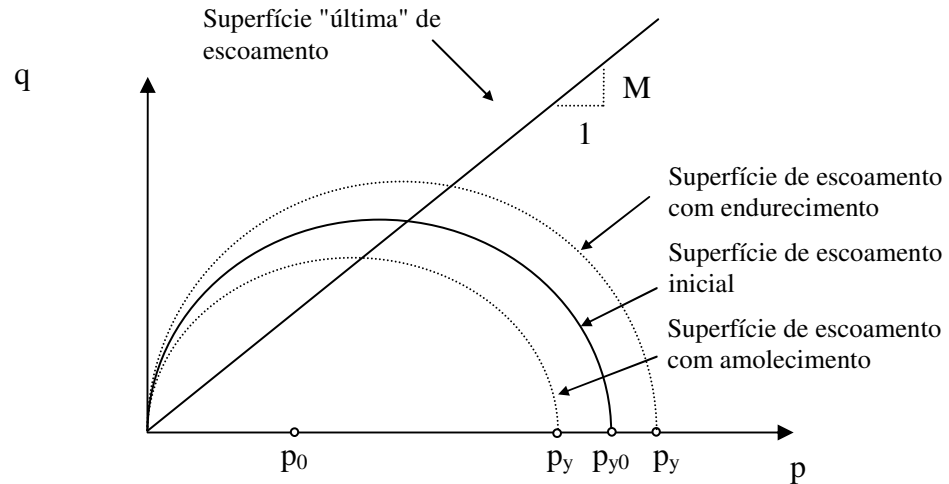
A condição de escoamento é definida por meio das equações:

$$y = \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 + \left( \frac{q}{M} \right)^2 - \left( \frac{p_y}{2} \right)^2 \leq 0 \quad (2.204 - \text{rep.})$$

$$e: \quad y = q - M \cdot p = 0 \quad (3.33)$$

Embora no caso de hiperelasticidade esteja envolvida apenas a primeira superfície de escoamento (2.204), a segunda condição, expressa por (3.33), define a relação entre eixos da superfície elíptica de escoamento. Neste caso a superfície de escoamento única corresponde ao esquema da Figura 3.1.

**Figura 3.1. Superfície de escoamento para MCC hiperelástico com dano.**



A possibilidade de ocorrência de endurecimento ou amolecimento está embutida na função  $p_y$ , que modela o comportamento da resistência isotrópica em função das variáveis internas. Para um material hiperelástico, onde  $I(\alpha_p \equiv 1)$ , pode-se simplificar (2.214) para:

$$p_y(\alpha_d^v, \alpha_d^s) = p_{y0} \cdot \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)} \quad (3.34)$$

### 3.2.1. Carregamento Isotrópico

Para material hiperelástico o carregamento isotrópico ocorre de forma elástica, produzindo deformação volumétrica dada por (3.28):

$$\varepsilon_v = \frac{\kappa^*}{(1 - \alpha_d^v)} \log\left(\frac{p}{p_0}\right) = \bar{\kappa}^* \log\left(\frac{p}{p_0}\right) \quad (3.28 - \text{rep.})$$

No carregamento inicial  $\alpha_d^v = 0$  e a expressão (3.28) toma a forma simplificada:

$$\varepsilon_v = \kappa^* \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right) \quad (\text{para } p_0 \leq p \leq p_y) \quad (3.35)$$

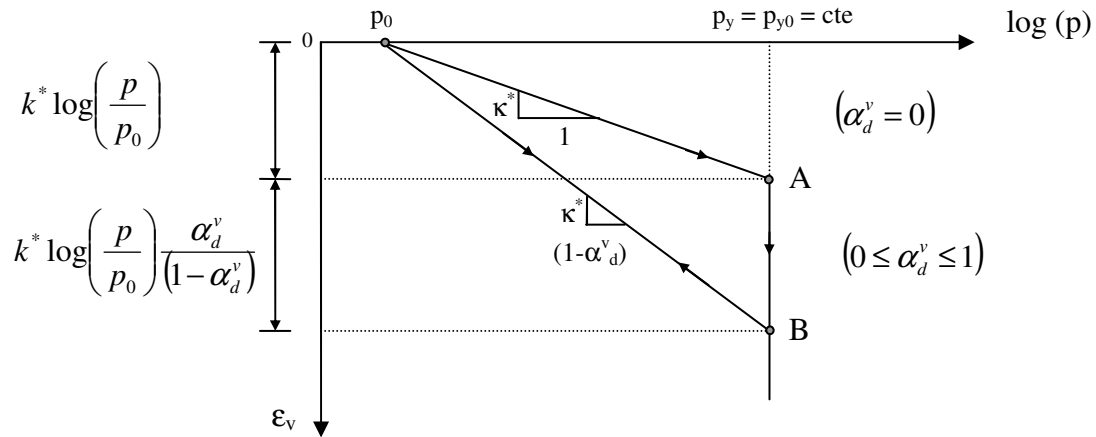
Após ser atingido estado de escoamento, tem início o escoamento por dano e a expressão (3.28) passa a vigorar com a variável interna  $\alpha_d^v$  crescendo monotonicamente de 0 a 1.

Neste primeiro caso em exame assume-se tensão de escoamento de valor constante. Para material com tensão de escoamento constante pode-se escrever que:

$$p_y(\alpha_p^v, \alpha_d^v, \alpha_d^s) = p_{y0} = cte \quad (3.36)$$

A Figura 3.2 ilustra ciclo de carga e descarga. Ao ser atingido o final do trecho elástico inicial, coincidente com o ponto A, o material passa a sofrer escoamento por dano e a variável interna de dano  $\alpha_d^v$  passa a crescer de 0 para 1. O trecho de descarga e de recarregamento segue a reta passando pelos pontos  $(p_0, 0)$  e B, com lei de variação tensão-deformação volumétrica dada por (3.28). O dano afeta somente o módulo de deformabilidade  $\kappa^*$  do material.

**Figura 3.2. MCC hiperelástico com dano e tensão de escoamento constante sob estado de compressão isotrópica.**



### 3.2.2. Carregamento de compressão triaxial convencional

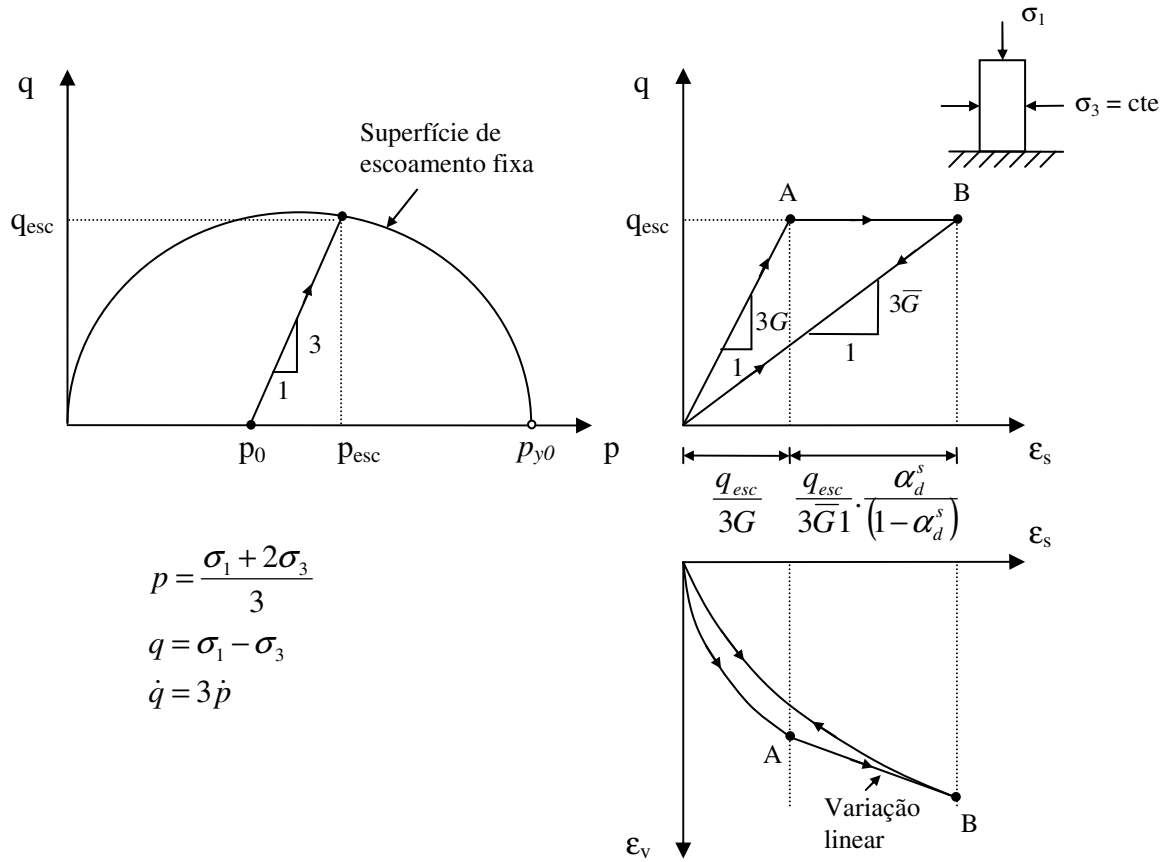
Para material com tensão de escoamento constante, a superfície de escoamento é fixa, como mostra a Figura 3.1. Dentro da superfície de escoamento fixa o material tem comportamento elástico. Quando é atingido ponto sobre a superfície de escoamento tem início processo de dano. Para carregamento correspondente ao ensaio de compressão triaxial ( $\sigma_3 = \text{cte}$  e  $\sigma_1$  crescente) a Figura 3.3 resume os aspectos essenciais do comportamento tensão-deformação, que agora é regulado pela associação das equações (3.28) e (3.29), aqui repetidas.

$$\varepsilon_v = \frac{\kappa^*}{(1-\alpha_d^v)} \log\left(\frac{p}{p_0}\right) = \bar{\kappa}^* \log\left(\frac{p}{p_0}\right) \quad (3.28 - \text{rep.})$$

$$\varepsilon_s = \frac{q}{3G(1-\alpha_d^s)} = \frac{q}{3\bar{G}} \quad (3.29 - \text{rep.})$$

A trajetória de tensões é retilínea. Trajetória que atinge, em gráfico  $p \times q$ , ponto final  $(p_{esc}, q_{esq})$  sobre a superfície de escoamento, na interseção da reta de declividade  $\Delta q / \Delta p = 3/1$ , passando por  $(p_0, 0)$ , com a superfície de escoamento, como mostrado na Figura 3.3.

**Figura 3.3. MCC hiperelástico com dano e tensão de escoamento constante sob estado de compressão triaxial convencional.**



Das expressões (3.8) e (3.10) pode-se obter a relação entre os incrementos das variáveis internas de dano volumétrica e de distorção:

$$\frac{\dot{\alpha}_d^s}{\dot{\alpha}_d^v} = \frac{6G\kappa^* \left[ \log\left(\frac{p_{esc}}{p_0}\right) - 1 \right]}{M^2 \left( p_{esc} - \frac{p_y}{2} \right)} \cdot \frac{(1-\alpha_d^s)^2}{(1-\alpha_d^v)^2} = C_1 \cdot \frac{(1-\alpha_d^s)^2}{(1-\alpha_d^v)^2} \quad (3.37)$$

Expressão que posta na forma de variáveis separadas, por integração<sup>1</sup> conduz a:

$$\int_0^{\alpha_d^s} \frac{\dot{\alpha}_d^s}{(1-\alpha_d^s)^2} = C_1 \cdot \int_0^{\alpha_d^v} \frac{\dot{\alpha}_d^v}{(1-\alpha_d^v)^2} \quad \therefore \quad \frac{\alpha_d^s}{1-\alpha_d^s} = C_1 \cdot \frac{\alpha_d^v}{1-\alpha_d^v} \quad \therefore \quad \alpha_d^s = \frac{C_1 \cdot \alpha_d^v}{1 + (C_1 - 1)\alpha_d^v} \quad (3.38)$$

<sup>1</sup> Utilizou-se aqui o mesmo abuso de notação indicado em nota de rodapé da página 99, onde se substituiu a diferencial da variável, pela expressão de derivada em relação ao tempo.



Os acréscimos de deformação após escoamento, em que o estado de tensão permanece invariável com  $p = p_{esc}$  e  $q = q_{esc}$ , são obtidos por via de integração das expressões (3.1) e (3.2), simplificadas para:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_v &= \kappa^* \cdot \frac{\dot{\alpha}_d^v}{(1-\alpha_d^v)^2} \log\left(\frac{p_{esc}}{p_0}\right) \quad \therefore \quad \Delta\varepsilon_v = \kappa^* \log\left(\frac{p_{esc}}{p_0}\right) \cdot \int_0^{\alpha_d^v} \frac{\dot{\alpha}_d^v}{(1-\alpha_d^v)^2} \\ \Delta\varepsilon_v &= \kappa^* \log\left(\frac{p_{esc}}{p_0}\right) \cdot \left. \frac{1}{(1-\alpha_d^v)} \right|_0^{\alpha_d^v} = \kappa^* \log\left(\frac{p_{esc}}{p_0}\right) \cdot \frac{\alpha_d^v}{(1-\alpha_d^v)}\end{aligned}\quad (3.39)$$

e:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_s &= \frac{1}{3G} \frac{q_{esc} \cdot \dot{\alpha}_d^s}{(1-\alpha_d^s)^2} \quad \therefore \quad \Delta\varepsilon_s = \frac{q_{esc}}{3G} \int_0^{\alpha_d^s} \frac{\dot{\alpha}_d^s}{(1-\alpha_d^s)^2} \quad \therefore \quad \Delta\varepsilon_s = \frac{q_{esc}}{3G} \left. \frac{1}{(1-\alpha_d^s)} \right|_0^{\alpha_d^s} \\ \Delta\varepsilon_s &= \frac{q_{esc}}{3G} \frac{\alpha_d^s}{(1-\alpha_d^s)}\end{aligned}\quad (3.40)$$

A relação entre os incrementos dados por (3.39) e (3.40) produz:

$$\frac{\Delta\varepsilon_s}{\Delta\varepsilon_d} = \frac{\frac{q_{esc}}{3G} \frac{\alpha_d^s}{(1-\alpha_d^s)}}{\kappa^* \log\left(\frac{p_{esc}}{p_0}\right) \cdot \frac{\alpha_d^v}{(1-\alpha_d^v)}} = C_2 \cdot \frac{\frac{\alpha_d^s}{(1-\alpha_d^s)}}{\frac{\alpha_d^v}{(1-\alpha_d^v)}}\quad (3.41)$$

onde substituindo a relação (3.38) para a variável interna  $\alpha_d^s$ , resulta:

$$\frac{\Delta\varepsilon_s}{\Delta\varepsilon_v} = C_2 \cdot \frac{\frac{C_1 \alpha_d^v}{1 + (C_1 - 1) \alpha_d^v}}{\frac{\alpha_d^v}{(1 - \alpha_d^v)}} = C_2 \cdot \frac{\frac{C_1 \alpha_d^v}{1 + (C_1 - 1) \alpha_d^v}}{\frac{\alpha_d^v}{(1 - \alpha_d^v)} \left( \frac{1 - \alpha_d^v}{1 + (C_1 - 1) \alpha_d^v} \right)} = C_2 \cdot C_1\quad (3.42)$$

O resultado de (3.42) mostra que para a compressão triaxial convencional a fase de escoamento ocorre sob incrementos de deformações volumétricas e cisalhantes proporcionais, o que está indicado na Figura 5.3, pelo trecho retilíneo AB, no gráfico  $\varepsilon_s \times \varepsilon_v$ .

### 3.2.3. Carregamento de compressão confinada (ensaio oedométrico)

Nesta forma de carregamento, só há deformação na direção do carregamento axial, e podem-se correlacionar as variáveis triaxiais de deformação do MCC com a deformação axial medida em ensaios de adensamento. De forma incremental pode-se escrever:

$$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon}_1 + 2\dot{\varepsilon}_3 \quad (3.43)$$

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{2}{3}(\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3) \quad (3.44)$$

Como os incrementos de deformação na direção horizontal são nulos ( $\varepsilon_3 = 0$ ), as equações (3.43) e (3.44) se reduzem a:

$$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon}_1 \quad (3.45)$$

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{2}{3}.\dot{\varepsilon}_1 \quad (3.46)$$

e, portanto, para a trajetória de deformações imposta no carregamento confinado:

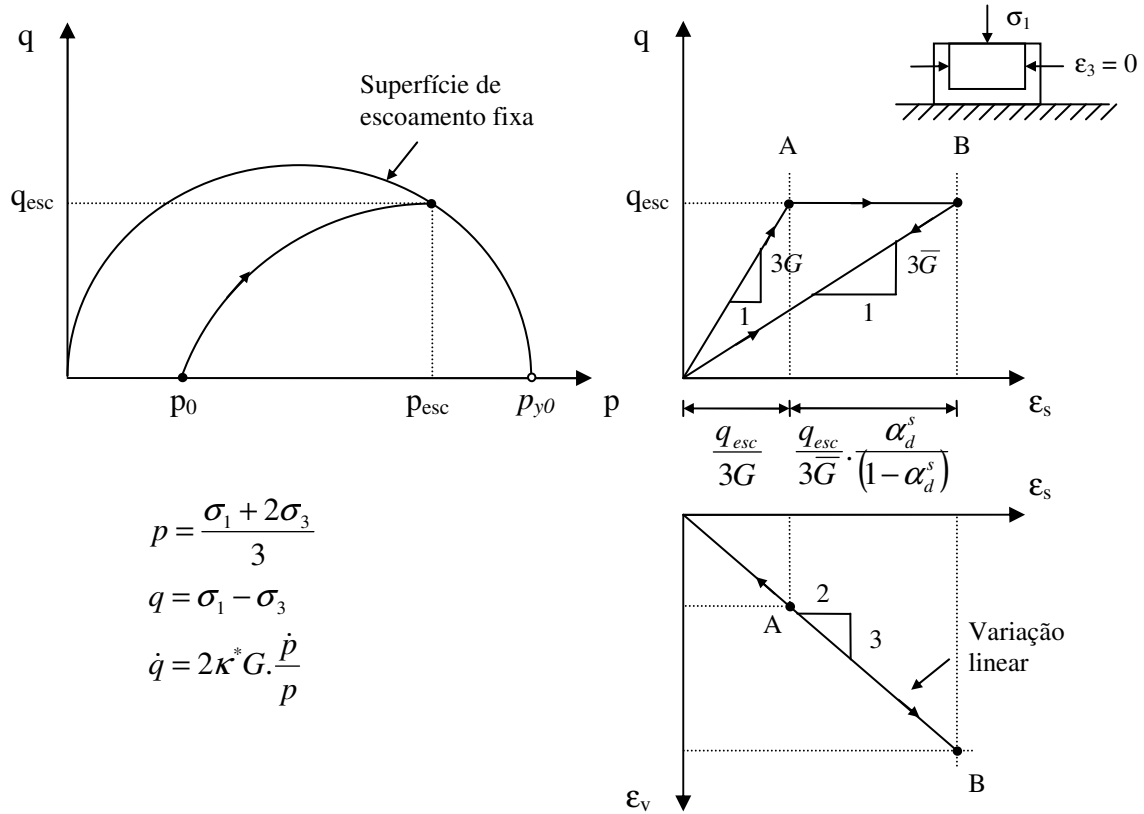
$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{2}{3}.\dot{\varepsilon}_v \quad (3.47)$$

No trecho elástico inicial, sem presença de dano, substituindo-se na relação (3.47) as expressões (3.1) e (3.2) e observando que neste caso as variáveis internas de dano são nulas e não sofrem incremento, e são nulas também as variáveis internas de plasticidade, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3G}.\dot{q} &= \frac{2}{3}.\left(\kappa^*.\frac{\dot{p}}{p}\right) \quad \therefore \quad \dot{q} = 2\kappa^*G.\frac{\dot{p}}{p} \quad \therefore \quad \int_0^q \dot{q} = 2\kappa^*G.\int_{p_0}^p \frac{\dot{p}}{p} \\ q &= 2\kappa^*G.\log\left(\frac{p}{p_0}\right) \end{aligned} \quad (3.48)$$

A Figura 3.4 ilustra a forma genérica da trajetória de tensão correspondente à solicitação de compressão confinada.

**Figura 3.4. MCC hiperelástico com dano e tensão de escoamento constante sob estado de compressão confinada.**



O ponto que representa o estado de tensão de escoamento é encontrado pela interseção da superfície de escoamento elíptica, fixa, dada por (2.204), com a curva definida por (3.48). Ao ser atingido o ponto de escoamento, têm início os incrementos de deformação por efeito de dano, ponto A do gráfico  $\epsilon_s \times \epsilon_v$  da Figura 3.4. Se a partir de um ponto B qualquer, para o qual já ocorreu certo desenvolvimento de dano volumétrico e de distorção, for promovido o descarregamento do material, os incrementos de deformação, no descarregamento deverão continuar a obedecer à relação (3.47), e agora se pode escrever que:

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{2}{3} \cdot \dot{\epsilon}_v \quad \therefore \quad \frac{1}{3\bar{G}} \cdot \dot{q} = \frac{2}{3} \cdot \left( \bar{\kappa}^* \cdot \frac{\dot{p}}{p} \right) \quad \therefore \quad \dot{q} = 2\bar{\kappa}^* \bar{G} \cdot \frac{\dot{p}}{p} \quad \therefore \quad \int_{q_{esc}}^0 \dot{q} = 2\bar{\kappa}^* \bar{G} \cdot \int_{p_{esc}}^{p_0} \frac{\dot{p}}{p}$$

$$q_{esc} = 2\bar{\kappa}^* \bar{G} \cdot \log \left( \frac{p_{esc}}{p_0} \right) \quad (3.49)$$

Deve-se observar que a tensão desviadora de escoamento  $q_{esc}$ , pode ser obtida de (3.48) pela aplicação da pressão normal média de escoamento  $p = p_{esc}$ . Igualando-se a

expressão (3.48), para o estado de tensão de escoamento, com a expressão (3.49) pode-se concluir que os coeficientes dos segundos membros produzem a seguinte equação:

$$2\kappa^*G = 2\bar{\kappa}^*\bar{G} \quad \therefore \quad 2\kappa^*G = 2\left(\frac{\kappa^*}{1-\alpha_d^v}\right)G(1-\alpha_d^s) \Rightarrow \alpha_d^v = \alpha_d^s \quad (3.50)$$

e a evolução da variável de dano volumétrica e de distorção é igual na compressão confinada.

### 3.2.4. Modelo MCC hiperelástico com dano e tensão de escoamento não constante

Para o caso em que a tensão de escoamento sob compressão isotrópica não é constante e que pode ser genericamente expresso pela equação (3.34):

$$p_y(\alpha_d^v, \alpha_d^s) = p_{y0} \cdot \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v)\Gamma(\alpha_d^s)} \quad (3.34 - \text{rep.})$$

onde para  $\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v)\Gamma(\alpha_d^s)} \geq 1$  se tem caso de endurecimento e para  $\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v)\Gamma(\alpha_d^s)} \leq 1$  se tem caso de amolecimento.

Os incrementos de deformação são dados pelas expressões (3.1) e (3.2), sem levar em conta os incrementos de variáveis internas plásticas, na forma:

$$\dot{\varepsilon}_v = \bar{\kappa}^* \cdot \left[ \frac{\dot{\alpha}_d^v}{(1-\alpha_d^v)} \log\left(\frac{p}{p_0}\right) + \left(\frac{\dot{p}}{p}\right) \right] = \kappa^* \cdot \left[ \frac{\dot{\alpha}_d^v}{(1-\alpha_d^v)^2} \log\left(\frac{p}{p_0}\right) + \frac{1}{(1-\alpha_d^v)} \left(\frac{\dot{p}}{p}\right) \right] \quad (3.1 - \text{rep.})$$

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{1}{3G} \left[ \dot{q} + \frac{q \cdot \dot{\alpha}_d^s}{(1-\alpha_d^s)} \right] = \frac{1}{3G} \left[ \frac{1}{(1-\alpha_d^s)} \cdot \dot{q} + \frac{q \cdot \dot{\alpha}_d^s}{(1-\alpha_d^s)^2} \right] \quad (3.2 - \text{rep.})$$

onde, agora, após o escoamento devem ser consideradas todas as parcelas, porque  $p = p_{esc}$  e  $q = q_{esc}$  não são mais constantes.

#### Carregamento de compressão isotrópica

Neste caso ocorrem somente deformações volumétricas. Até o escoamento a deformação volumétrica acumulada obedece à lei linear  $\varepsilon_v = \kappa^* \cdot \log(p/p_0)$ . Com o início do

escoamento, os incrementos de deformação volumétrica seguem a expressão (3.1) simplificada, produzindo uma deformação volumétrica total:

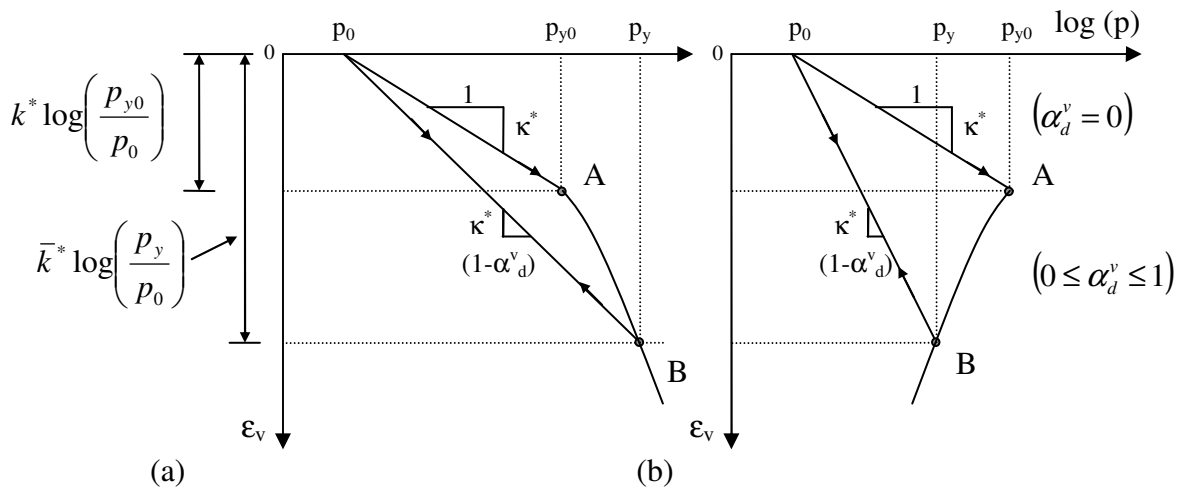
$$\varepsilon_v = \kappa^* \cdot \log\left(\frac{p_{y0}}{p_0}\right) + \kappa^* \cdot \left[ \int_0^{\alpha_d^v} \log\left(\frac{p(\alpha_d^v)}{p_0}\right) \frac{\dot{\alpha}_d^v}{(1-\alpha_d^v)^2} + \int_0^{\alpha_d^v} \frac{1}{(1-\alpha_d^v)} \left( \frac{\dot{p}(\alpha_d^v)}{p(\alpha_d^v)} \right) \right] \quad (3.51)$$

Ao sofrer descarregamento o material se comporta de forma linear, com variável de dano  $\alpha_d^v = \text{cte}$ , e, portanto, com  $\bar{\kappa}^* = \text{cte}$ . A presença de dano implica em redução de rigidez do material. A deformação volumétrica recuperada, tanto em caso de endurecimento como de amolecimento, é expressa por:

$$\varepsilon_v = \bar{\kappa}^* \cdot \log\left(\frac{p_y}{p_0}\right) \quad (3.52)$$

A Figura 3.5 resume os principais aspectos do carregamento de compressão isotrópico para materiais com endurecimento e com amolecimento.

**Figura 3.5. MCC hiperelástico com dano e tensão de escoamento não-constante sob estado de compressão isotrópica, (a) com endurecimento, (b) com amolecimento.**

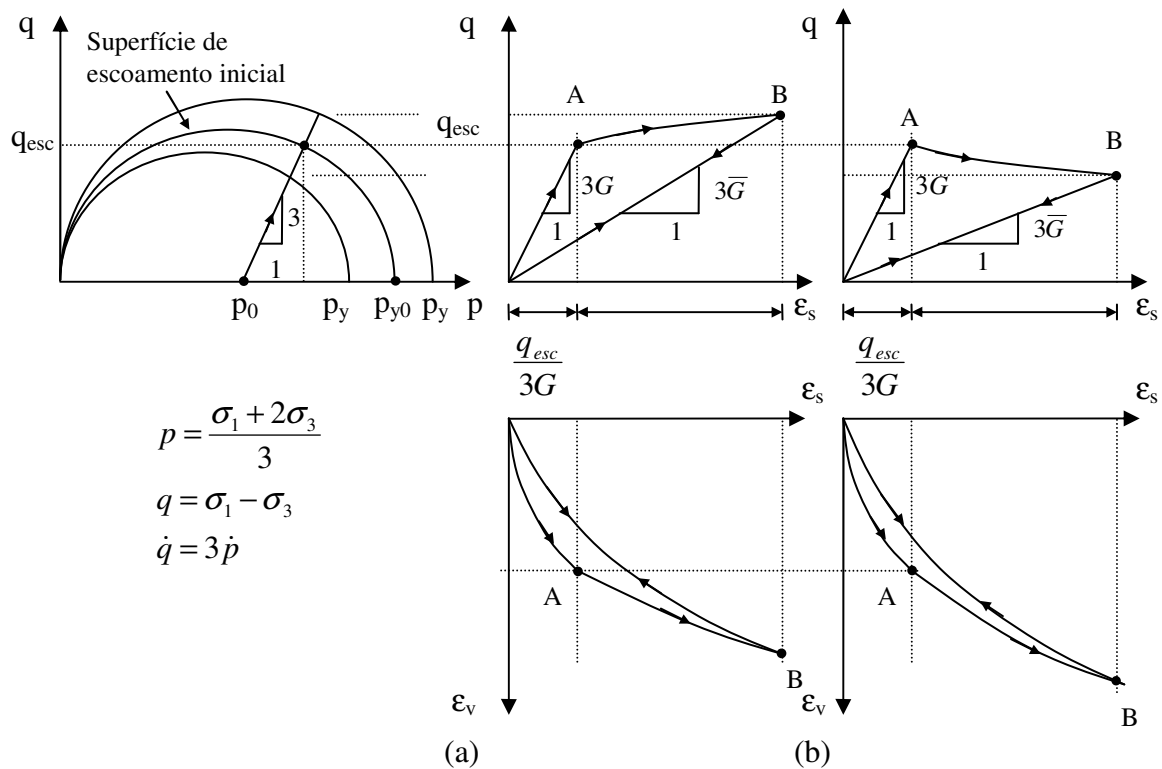


### Carregamento de compressão triaxial convencional (compressão passiva)

O comportamento sob compressão passiva, de material hiperelástico com dano, capaz de sofrer endurecimento ou amolecimento, é idêntico ao de material com pressão de

escoamento constante, até ser atingido o escoamento. A partir daí, o endurecimento ou amolecimento torna a relação  $q \times \varepsilon_s$  não linear, como mostra a Figura 3.6. O descarregamento ocorre com relação  $q \times \varepsilon_s$  linear e as deformações acumuladas seguem as equações (2.206) e (2.207) para o estado de tensão de escoamento atualizado.

**Figura 3.6. MCC hiperelástico com dano e tensão de escoamento não-constante sob estado de compressão passiva, (a) com endurecimento e (b) com amolecimento.**



A relação entre os incrementos das variáveis internas é dada por:

$$\frac{\dot{\alpha}_d^s}{\dot{\alpha}_d^v} = \frac{6\kappa^*G}{M^2} \cdot \left[ \frac{\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1}{p - \frac{p_y(\alpha_d^v, \alpha_d^s)}{2}} \right] \cdot \frac{(1 - \alpha_d^s)^2}{(1 - \alpha_d^v)^2} \quad (3.53)$$

A comparação com a expressão (3.37) mostra que neste caso o termo entre colchetes não é mais constante e sim função das variáveis internas de dano e da forma particular da função de endurecimento / amolecimento  $p_y$ , e, desta forma, deve-se esperar relação não linear

entre  $\varepsilon_s$  x  $\varepsilon_v$  após ser atingido o escoamento. As deformações acumuladas são dadas pelas equações (3.28) e (3.29), para o estado de tensão atingido no escoamento.

### **Carregamento de compressão confinada (ensaio oedométrico)**

O carregamento sob condição de compressão confinada tem trajetória de deformações linear, como mostrado no gráfico  $\varepsilon_s$  x  $\varepsilon_v$  da Figura 3.4, para material com tensão de escoamento constante. A mesma trajetória linear de deformações é válida para materiais que sofrem endurecimento ou amolecimento. A Figura 3.7 mostra o efeito de endurecimento ou amolecimento sobre as curvas  $q$  x  $\varepsilon_s$ .

As relações (3.48) e (3.49) são igualmente válidas para materiais com pressão de escoamento não constante. E, portanto, também para este caso a evolução das variáveis internas de dano volumétrica e de distorção é igual.

### **Carregamento de compressão não-drenada**

Sob condição de compressão não-drenada o material sofre compressão sem variação volumétrica. Sob esta condição os incrementos de deformação volumétrica são nulos e a expressão (3.1) torna-se:

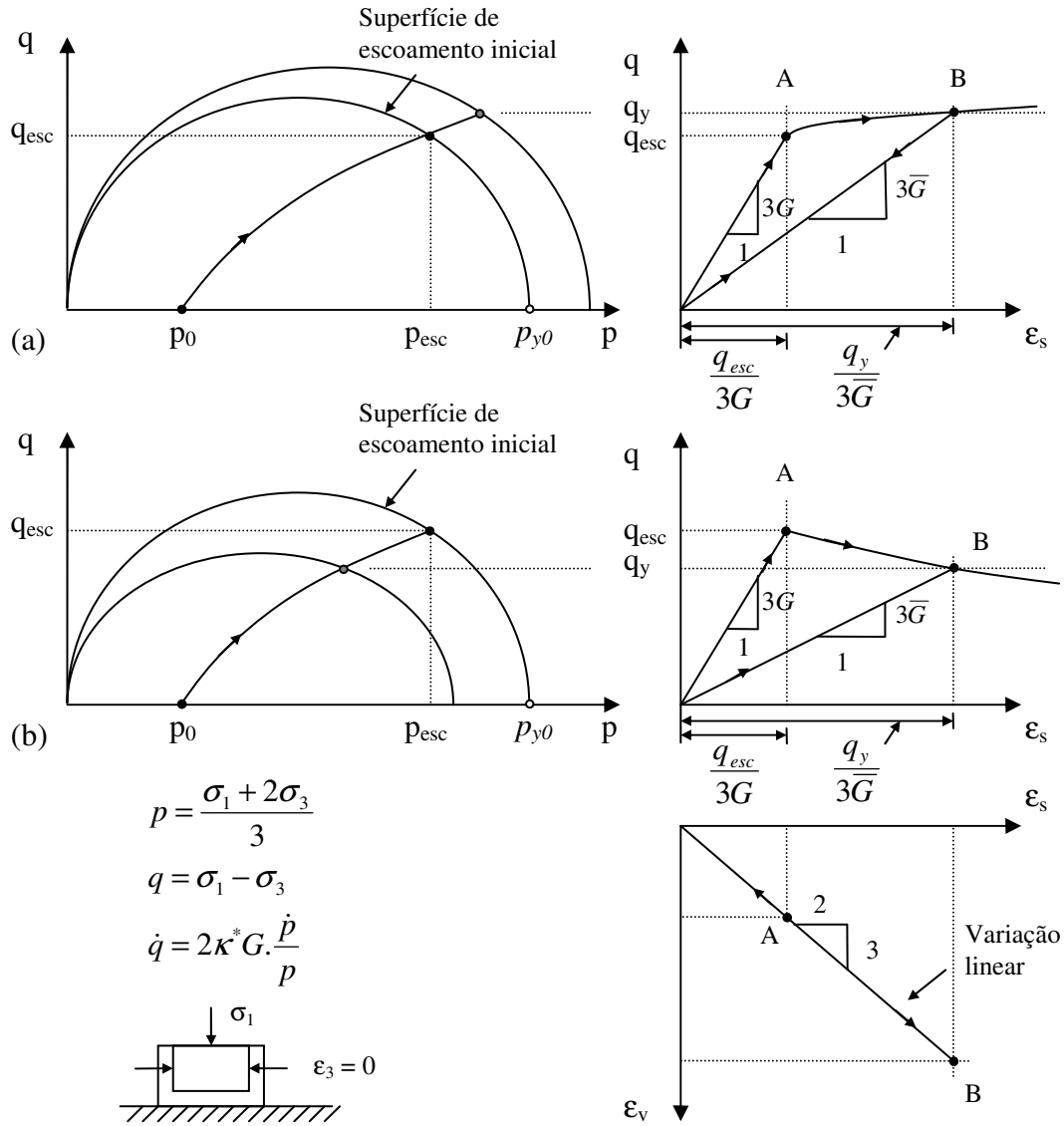
$$\dot{\varepsilon}_v = \kappa^* \left[ \frac{\dot{\alpha}_d^v}{(1 - \alpha_d^v)^2} \log\left(\frac{p}{p_0}\right) + \frac{1}{(1 - \alpha_d^v)} \left(\frac{\dot{p}}{p}\right) \right] = 0 \quad (3.1 - \text{rep.})$$

Os incrementos de deformação de distorção são dados por:

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{1}{3G} \left[ \frac{1}{(1 - \alpha_d^s)} \cdot \dot{q} + \frac{q \cdot \dot{\alpha}_d^s}{(1 - \alpha_d^s)^2} \right] \quad (3.2 - \text{rep.})$$

De (3.1) pode-se concluir que para não haver variação volumétrica, deve ocorrer dano crescente com a variação da tensão hidrostática média  $p$ .

**Figura 3.7. MCC hiperelástico com dano e tensão de escoamento não-constante sob estado de compressão confinada, (a) com endurecimento, (b) com amolecimento.**



Os incrementos das variáveis internas volumétrica e de distorção de (3.1) e (3.2), para o presente caso, em que não há efeito de plasticidade, onde  $r_p \rightarrow \infty$  e  $r_d \rightarrow 1$ , são dados pelas expressões:

$$\dot{\alpha}_d^v = 2\lambda \cdot \frac{\left(p - \frac{p_y}{2}\right)}{\left(\frac{\kappa^*}{(1 - \alpha_d^v)^2} \cdot \left[\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right]\right)} \quad (3.8 - \text{rep.})$$



$$\dot{\alpha}_d^s = 2\lambda \cdot \frac{6G(1-\alpha_d^s)^2}{M^2} \quad (3.10 - \text{rep.})$$

A condição de compressão não-drenada implica em ocorrência de escoamento por dano, para que (3.1) seja sempre identicamente nula. E havendo escoamento por dano, com tensão desviadora diferente de zero, ocorre também variação da variável interna de dano de distorção.

O fator de multiplicação  $\lambda$  é dado por (3.32) com a particularidade da simplificação da expressão do denominador pela imposição de incremento de deformação volumétrica igual a zero, reduzindo-se a:

$$\lambda = \frac{3\bar{G} \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\epsilon}_s}{\left\{ 2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 \cdot \frac{p}{\bar{\kappa}^*} \cdot \left[ \frac{\log\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\left(\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right)} + \frac{12\bar{G}}{M^4} \cdot q^2 + \right. \right.} \quad (3.32 - \text{rep.})$$

$$\left. \left. p \cdot p_{y0} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}{\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}} \cdot \frac{(p - p_y / 2)}{\frac{\kappa^*}{(1 - \alpha_d^v)^2} \cdot \left(\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right)} + \right. \right. \right. \left. \left. \left. \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma'(\alpha_d^s)}{\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}} \cdot \frac{6G(1 - \alpha_d^s)^2}{M^2} \right] \right\}}$$

No Anexo 2, item (a), é apresentado exemplo de simulação de compressão não-drenada com os dados utilizados por Einav et al (2007), e com função de escoamento não constante dada pela expressão (3.34):

$$p_y(\alpha_d^v, \alpha_d^s) = p_{y0} \cdot \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)} \quad (3.34 - \text{rep.})$$

A expressão algébrica da função (3.34) está indicada no exemplo onde foi seguida a formulação de Einav et al (2007) de emprego de expressão simétrica para a variável interna de dano volumétrica e de distorção.

O modelo é capaz de representar efeito de pico de resistência, caso frequentemente observado em ensaios em solos. Na simulação observa-se a redução da pressão de

escoamento  $p_y$  com o aumento do dano. E, ademais, a trajetória de tensão, em gráfico  $q \times p$  converge, como observado por Einav, para ponto sobre a reta  $q = M \cdot p$ , com a deformação.

### 3.3 MODELO MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO

Considerando a outra situação extrema, modelo de comportamento elasto-plástico sem dano pode ser obtido, desativando-se o efeito de dano pela introdução das condições  $r_d \rightarrow \infty$  e  $r_p = 1$ . Com a desativação do dano, as variáveis internas de dano tornam-se  $\alpha'_d = \alpha^s_d = 0 = \text{cte}$ . E as relações tensão-deformação (2.206) e (2.207) estabelecidas por Einav et al (2007) reduzem-se a:

$$\varepsilon_v = \frac{\kappa^*}{(1 - \alpha_d^v)} \log\left(\frac{p}{p_0}\right) + \alpha_p^v = \kappa^* \log\left(\frac{p}{p_0}\right) + \alpha_p^v \quad (3.54)$$

$$\varepsilon_s = \frac{q}{3G(1 - \alpha_d^s)} + \alpha_p^s = \frac{q}{3G} + \alpha_p^s \quad (3.55)$$

onde as variáveis internas de plasticidade ( $\alpha_p^v$  e  $\alpha_p^s$ ) representam as parcelas de deformações plásticas volumétrica e de distorção, respectivamente.

A desativação do dano implica em que os parâmetros elásticos  $\kappa^*$  e  $G$  são constantes neste modelo.

Os incrementos de deformação de (3.54) e (3.55) resultam da simplificação das expressões (3.1) e (3.2), isto é:

$$\dot{\varepsilon}_v = \bar{\kappa}^* \cdot \left[ \frac{\dot{\alpha}_d^v}{(1 - \alpha_d^v)} \log\left(\frac{p}{p_0}\right) + \left(\frac{\dot{p}}{p}\right) \right] + \dot{\alpha}_p^v = \kappa^* \cdot \left(\frac{\dot{p}}{p}\right) + \dot{\alpha}_p^v \quad (3.56)$$

$$\text{e: } \dot{\varepsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G(1 - \alpha_d^s)} + \frac{q \cdot \dot{\alpha}_d^s}{3G(1 - \alpha_d^s)^2} + \dot{\alpha}_p^s = \frac{\dot{q}}{3G} + \dot{\alpha}_p^s \quad (3.57)$$

A condição de escoamento é definida por meio das equações:

$$y = \left(p - \frac{p_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{M}\right)^2 - \left(\frac{p_y}{2}\right)^2 \leq 0 \quad (2.204 - \text{rep.})$$

$$\text{e: } y = q - M \cdot p = 0 \quad (3.33 - \text{rep.})$$

A possibilidade de ocorrência de endurecimento ou amolecimento está embutida na função  $p_y$ , que modela o comportamento da resistência isotrópica em função das variáveis internas. Para um material hiperplástico, onde  $\Pi(\alpha_d^v \equiv I)$  e  $\Pi(\alpha_d^s \equiv I)$ , pode-se simplificar (2.214) para:

$$p_y(\alpha_p^v) = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v) \quad (3.58)$$

O fator de multiplicação  $\lambda$ , associado à superfície elíptica de escoamento dada por (2.204), com a introdução de  $r_p = 1$  e  $r_d \rightarrow \infty$ , e a desconsideração do efeito de dano, reduz-se a:

$$\lambda = \frac{\left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\kappa^*} \cdot \dot{\epsilon}_v + 3G \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\epsilon}_s}{\left\{ 2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 \cdot \frac{p}{\kappa^*} + \frac{6G}{M^4} \cdot q^2 + p \cdot p_{y0} \cdot \Pi'(\alpha_p^v) \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \right\}} \quad (3.59)$$

De maneira similar à procedida para o modelo hiperelástico, inicialmente aborda-se comportamento do modelo para caso de material com pressão de escoamento constante, para o qual,  $\Pi(\alpha_p^v \equiv I)$  e na seqüência examina-se o efeito de endurecimento ou amolecimento, por plasticidade.

### 3.3.1. Carregamento Isotrópico

Para material hiperplástico com pressão de escoamento constante:

$$p_y(\alpha_p^v) = p_{y0} = cte \quad (3.58 - \text{rep.})$$

o carregamento isotrópico ocorre de forma elástica, até ser atingido estado de escoamento, produzindo deformação volumétrica dada por (3.54):

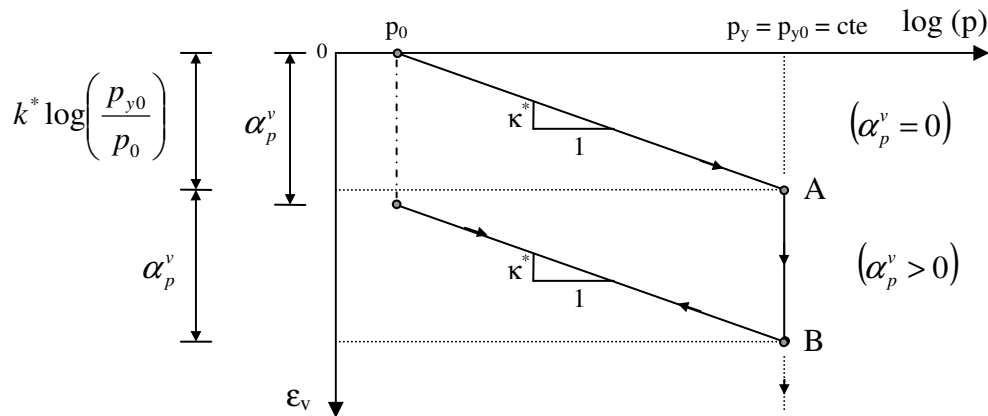
$$\epsilon_v = \kappa^* \log \left( \frac{p}{p_0} \right) \quad (\text{para } p_0 \leq p \leq p_{y0}) \quad (3.54 - \text{rep.})$$

Quando a tensão hidrostática  $p$  iguala a tensão de escoamento  $p_{y0}$ , tem-se a geração de deformação plástica ilimitada, com comportamento de material elasto-plástico perfeito, e com deformação volumétrica expressa por (3.54):

$$\varepsilon_v = \kappa^* \log\left(\frac{p}{p_0}\right) + \alpha_p^v \quad (3.54 - \text{rep.})$$

A Figura 3.8 ilustra ciclo de carga e descarga. O diagrama mostra carregamento levado até a tensão de escoamento, e mantido por certo tempo, no qual se desenvolve deformação volumétrica plástica igual a  $\alpha_p^v$ . Neste caso, de (3.59),  $\lambda = \dot{\varepsilon}_v / (2(p - p_y/2))$  e  $\dot{\alpha}_p^v = 2\lambda(p - p_y/2) = \dot{\varepsilon}_v$ , e todo incremento de deformação volumétrica é plástico.

**Figura 3.8. MCC hiperplástico sem dano e tensão de escoamento constante sob estado de compressão isotrópica.**



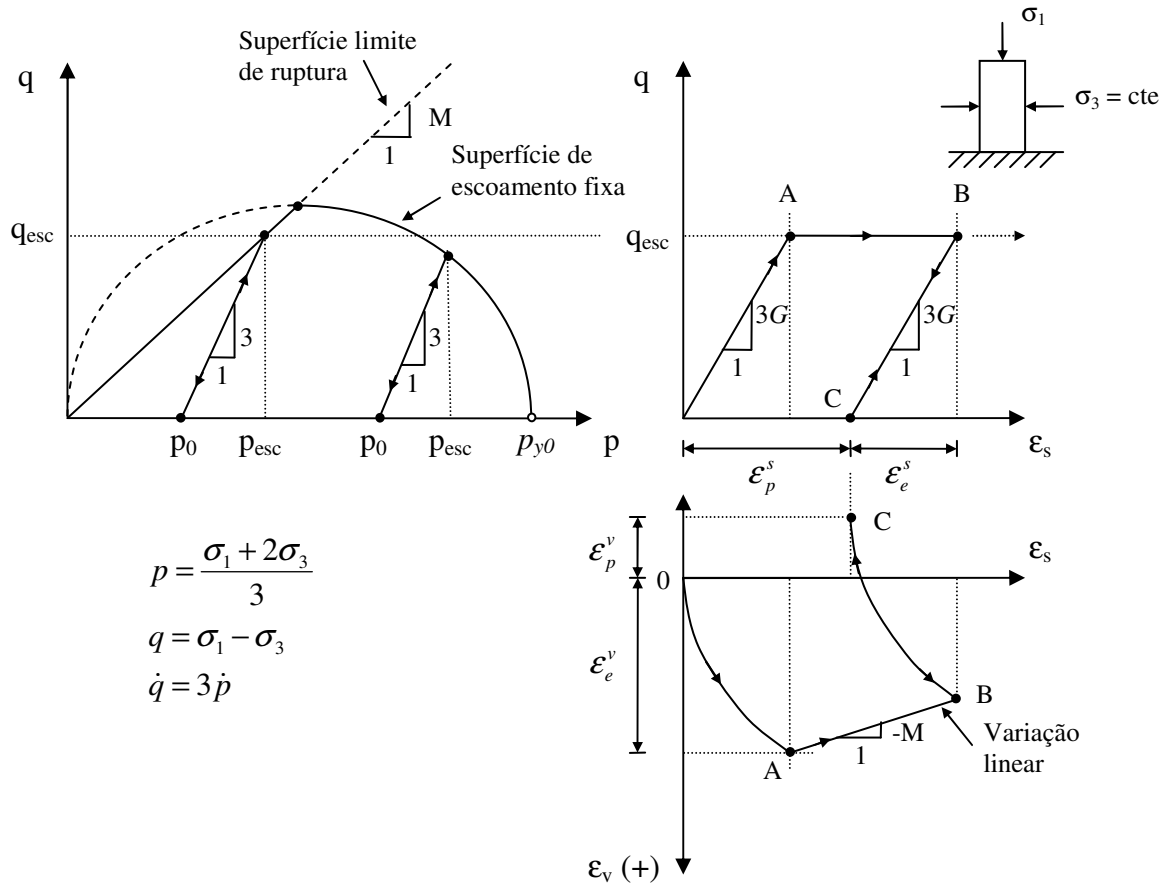
### 3.3.2. Carregamento de compressão triaxial convencional

Para material com tensão de escoamento constante, a superfície de escoamento é fixa. A figura 3.9 mostra a superfície de escoamento fixa e a superfície limite de ruptura. Dentro da superfície de escoamento fixa o material tem comportamento elástico. Quando é atingido ponto sobre a superfície de escoamento tem início processo de desenvolvimento de deformações plásticas. Para carregamento correspondente ao ensaio triaxial de compressão passiva ( $\sigma_3 = \text{cte}$  e  $\sigma_1$  crescente) a Figura 3.9 resume os aspectos essenciais do

comportamento tensão-deformação, que agora é regulado pela associação das equações (3.54) e (3.55) e pelas superfícies de escoamento (2.204) e (3.33). Dois casos podem ocorrer, no primeiro caso a superfície limite de escoamento é atingida em primeiro lugar e no segundo caso é atingida em primeiro lugar a superfície limite de ruptura. Os dois casos estão ilustrados na Figura 3.9, e correspondem a casos de solos pré-adensados.

A trajetória de tensões é retilínea no carregamento de compressão passiva. Trajetória que atinge ponto  $(p_{esc}, q_{esc})$  sobre a superfície de escoamento, na interseção da reta, de declividade  $\Delta q/\Delta p = 3/1$  passando por  $(p_0, 0)$ , com a superfície de escoamento.

**Figura 3.9. MCC hiperplástico sem dano e tensão de escoamento constante sob estado de compressão triaxial convencional.**



No primeiro caso de escoamento, sobre a superfície limite de escoamento, os incrementos de variáveis internas serão dados pela regra de fluxo aplicada sobre a condição (2.15) de escoamento limite de ruptura ( $y^r = q - Mp = 0$ ) que, escrita em termos de tensões generalizadas,  $y^r = q - M.p = \chi_p^s - M.\chi_p^v = 0$ , conduz a:

$$\dot{\alpha}_p^v = \lambda \cdot \frac{\partial y^r}{\partial \chi_p^v} = -\lambda \cdot M \quad (3.60)$$

$$\dot{\alpha}_p^s = \lambda \cdot \frac{\partial y^r}{\partial \chi_p^s} = \lambda \quad (3.61)$$

### Fator de multiplicação $\lambda$ para condição limite de ruptura

O fator de multiplicação  $\lambda$ , de (3.60) e (3.61), pode ser obtido a partir da condição de consistência. Pela condição de consistência quando atingido o escoamento:

$$dy = 0 \Rightarrow dq - M \cdot dp = 0 \quad (3.62)$$

Tomando-se as expressões dos incrementos de tensões  $dp$  e  $dq$ , dados por (3.13) e (3.15), aqui repetidas.

$$\dot{p} = \frac{p}{\bar{K}^*} \cdot \left[ \dot{\epsilon}_v - \dot{\alpha}_p^v - \bar{K}^* \cdot \frac{\dot{\alpha}_d^v}{(1 - \alpha_d^v)} \cdot \log \left( \frac{p}{p_0} \right) \right] \quad (3.13 - \text{rep.})$$

$$\dot{q} = 3\bar{G} \left[ \dot{\epsilon}_s - \dot{\alpha}_p^s - \frac{q}{3\bar{G}(1 - \alpha_d^s)} \cdot \dot{\alpha}_d^s \right] \quad (3.15 \text{ rep.})$$

Aplicando em (3.13) a expressão do incremento da variável interna dada por (3.60) e considerando que o dano não afeta a envoltória de ruptura e, portanto, mesmo para material com dano, sobre a superfície de ruptura,  $\dot{\alpha}_d^v = 0$ . Desta forma (3.13) torna-se:

$$\dot{p} = \frac{p}{\bar{K}^*} \cdot (\dot{\epsilon}_v + \lambda \cdot M) \quad (3.63)$$

Da mesma forma, substituindo-se em (3.15) o incremento de variável interna (3.61), e considerando também que sobre a superfície de ruptura  $\dot{\alpha}_d^s = 0$ , resulta:

$$\dot{q} = 3\bar{G} \cdot (\dot{\epsilon}_s - \lambda) \quad (3.64)$$

Substituindo em (3.62) as expressões dos incrementos de tensão  $dq$  e  $dp$ , dados por (3.63) e (3.64), obtém-se:

$$dq - M.dp = 0 \Rightarrow 3\bar{G}(\dot{\epsilon}_s - \lambda) - M \cdot \frac{P}{\bar{K}^*}(\dot{\epsilon}_v + \lambda M) = 0$$

$$3\bar{G}.\dot{\epsilon}_s - M \cdot \frac{P}{\bar{K}^*}.\dot{\epsilon}_v = \lambda \left( 3\bar{G} + M^2 \cdot \frac{P}{\bar{K}^*} \right) \quad (3.65)$$

$$\lambda = \frac{3\bar{G}.\dot{\epsilon}_s - M \cdot \frac{P}{\bar{K}^*}.\dot{\epsilon}_v}{3\bar{G} + M^2 \cdot \frac{P}{\bar{K}^*}} \quad (3.66)$$

Introduzindo a expressão de  $\lambda$ , de (3.66), nas equações dos incrementos das variáveis internas de plasticidade (3.60) e (3.61), resulta para a regra de fluxo aplicada sobre a função de escoamento de ruptura:

$$\dot{\alpha}_p^v = \lambda \cdot \frac{\partial y^r}{\partial \chi_p^v} = - \left[ \frac{3\bar{G}.\dot{\epsilon}_s - M \cdot \frac{P}{\bar{K}^*}.\dot{\epsilon}_v}{3\bar{G} + M^2 \cdot \frac{P}{\bar{K}^*}} \right] M \quad (3.67)$$

$$\dot{\alpha}_p^s = \lambda \cdot \frac{\partial y^r}{\partial \chi_p^s} = \frac{3\bar{G}.\dot{\epsilon}_s - M \cdot \frac{P}{\bar{K}^*}.\dot{\epsilon}_v}{3\bar{G} + M^2 \cdot \frac{P}{\bar{K}^*}} \quad (3.68)$$

Introduzindo (3.67) e (3.68) nas expressões dos incrementos de deformação volumétrica e de distorção, dados por (3.56) e (3.57), obtém-se:

$$\dot{\epsilon}_v = \kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) - \lambda M = \kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) - \left[ \frac{3\bar{G}.\dot{\epsilon}_s - M \cdot \frac{P}{\bar{K}^*}.\dot{\epsilon}_v}{3\bar{G} + M^2 \cdot \frac{P}{\bar{K}^*}} \right] M \quad (3.69)$$

$$\text{e: } \dot{\epsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G} + \lambda = \frac{\dot{q}}{3G} + \left[ \frac{3\bar{G}.\dot{\epsilon}_s - M \cdot \frac{P}{\bar{K}^*}.\dot{\epsilon}_v}{3\bar{G} + M^2 \cdot \frac{P}{\bar{K}^*}} \right] \quad (3.70)$$

Das expressões (3.69) e (3.70) pode-se obter a relação entre os incrementos de deformação volumétrica e de distorção para escoamento sobre a superfície de escoamento de ruptura. Neste caso, para um estado de tensão mantido constante,  $dp$  e  $dq$  são nulos, e só ocorre aumento de deformações plásticas, e, portanto:

$$\frac{\dot{\epsilon}^v}{\dot{\epsilon}^s} = \frac{\dot{\epsilon}_p^v}{\dot{\epsilon}_p^s} = \frac{\dot{\alpha}_p^v}{\dot{\alpha}_p^s} = \frac{-\lambda M}{\lambda} = -\frac{M}{1} \quad (3.71)$$

que mostra que ao ser atingido estado de escoamento, com componentes  $p$  e  $q$  constantes, a razão entre incrementos das variáveis internas de plasticidade  $(\dot{\alpha}_p^v = \dot{\epsilon}_p^v)$  e  $(\dot{\alpha}_p^s = \dot{\epsilon}_p^s)$  permanece constante, produzindo o trecho linear  $AB$  no gráfico  $\epsilon_s \times \epsilon_v$  da Figura 3.9. Tal comportamento não corresponde à idéia de estado crítico no qual o processo ocorre com distorção contínua sob volume constante. Note-se que a variação volumétrica é de expansão.

No segundo caso de carregamento é atingida a superfície elíptica de escoamento, neste caso, fixa. A Figura 3.10 ilustra o comportamento, tensão-deformação para estado de tensão mantido depois de atingido o ponto de escoamento. Como o ponto de escoamento está sobre a superfície elíptica de escoamento, a relação entre os incrementos de deformação é igual à razão entre as equações (3.56) e (3.57), aqui repetidas:

$$\dot{\epsilon}_v = \kappa^* \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) + \dot{\alpha}_p^v \quad (3.56 - \text{rep.})$$

$$\text{e:} \quad \dot{\epsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G} + \dot{\alpha}_p^s \quad (3.57 - \text{rep.})$$

Considerando ponto sobre a superfície elíptica, em que o estado de tensão é mantido constante e, portanto,  $dp$  e  $dq$  são nulos, a dita razão entre deformações se resume à razão entre os incrementos das variáveis internas de plasticidade, volumétrica e de distorção, respectivamente. Estas são expressas por (3.7) e (3.9), que para  $r_p = 1$  tornam-se:

$$\dot{\alpha}_p^v = \lambda.2. \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \quad (3.7 - \text{rep.})$$

$$\dot{\alpha}_p^s = \lambda.2. \frac{q}{M^2} \quad (3.9 - \text{rep.})$$

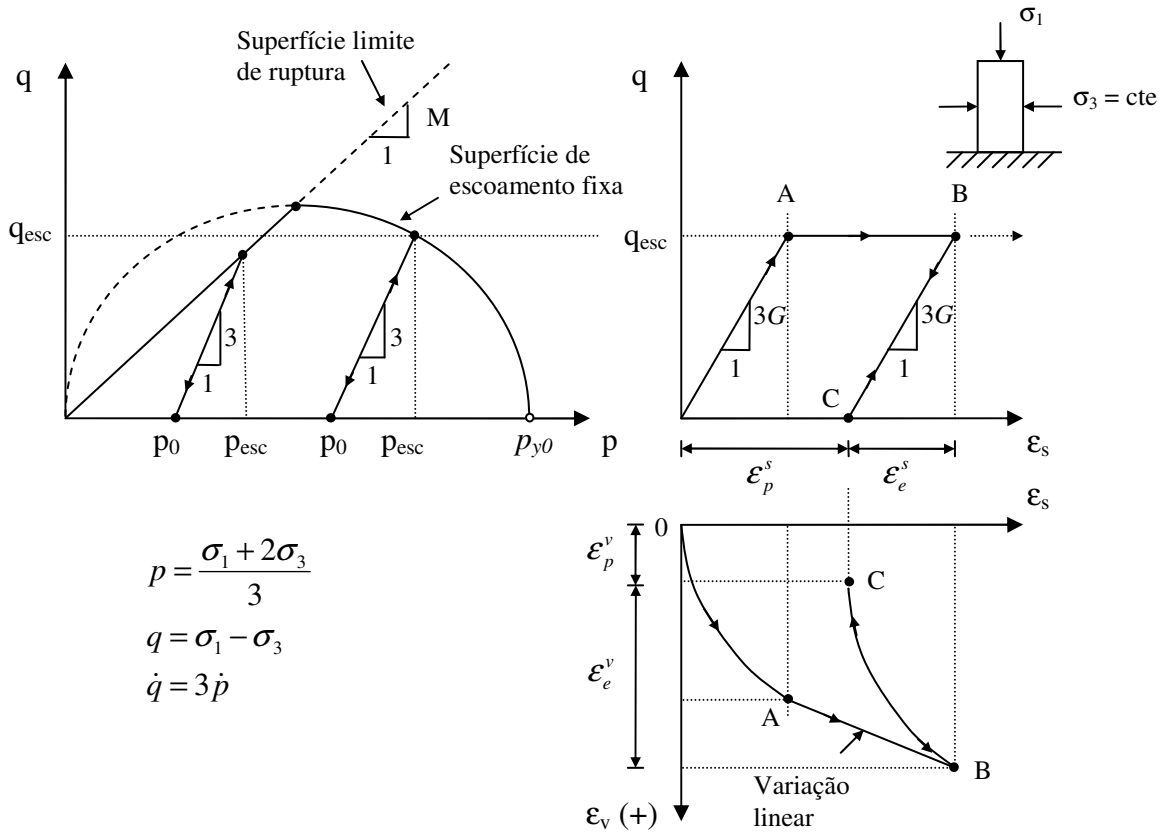
$$\text{e:} \quad \frac{\dot{\epsilon}^v}{\dot{\epsilon}^s} = \frac{\dot{\epsilon}_p^v}{\dot{\epsilon}_p^s} = \frac{\dot{\alpha}_p^v}{\dot{\alpha}_p^s} = \frac{\lambda.2. \left( p - \frac{p_y}{2} \right)}{\lambda.2. \frac{q}{M^2}} = \frac{p - \frac{p_y}{2}}{\frac{q}{M^2}} \quad (3.72)$$

A equação (3.72) mostra que para pontos sobre a superfície de escoamento elíptica, mantidas constantes as componentes de tensão  $p$  e  $q$ , a relação (3.72) é constante, produzindo



deformação volumétrica e de distorção, com relação linear entre elas, como mostra a Figura 3.10. Neste caso o escoamento ocorre sob redução de volume.

**Figura 3.10. MCC hiperplástico sem dano e tensão de escoamento constante sob estado de compressão triaxial convencional.**



### 3.3.3. Carregamento de compressão confinada

O carregamento sob condição de compressão confinada tem trajetória de deformações linear, como mostrado no gráfico  $\epsilon_s \times \epsilon_v$  da Figura 3.4, para material hiperelástico com dano, com tensão de escoamento constante. A mesma trajetória linear de deformações, repetida na Figura 3.11, com observância da relação incremental (3.47), repetida a seguir, é válida para qualquer material.

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_v \quad (3.47 - rep.)$$



Atingido o estado de escoamento e mantido o estado de tensão, com  $p$  e  $q$  constantes, e, portanto, com  $dp$  e  $dq$  nulos, a relação (3.73) indica agora que a relação entre os incrementos das variáveis internas de plasticidade, volumétrica e de distorção, torna-se:

$$\dot{\alpha}_p^s = \frac{2}{3} \cdot \dot{\alpha}_p^v \quad (3.75)$$

Levando-se em conta as expressões para os incrementos das variáveis internas dadas por (3.7) e (3.9), e considerando que para o caso em exame  $r_p = 1$ , a expressão (3.75) resulta em:

$$\frac{\dot{\alpha}_p^v}{\dot{\alpha}_p^s} = \frac{\dot{\epsilon}_p^v}{\dot{\epsilon}_p^s} = \frac{3}{2} \quad (3.76)$$

A expressão (3.76) indica que o escoamento, sob estado de tensão constante, ocorre com razão constante, entre taxas de crescimento das variáveis internas de plasticidade. Aqui aparece uma limitação do modelo de pressão de escoamento constante, pois haverá um único ponto sobre a superfície de escoamento que poderá verificar a relação (3.76). Isto equivale a dizer que, para um único ponto de pressão hidrostática inicial, o modelo será capaz de produzir resposta física correta. Para qualquer outro estado inicial de tensão o estado particular de tensão que provocará escoamento ( $p_{esc}$ ,  $q_{esc}$ ) produzirá razão entre incrementos de deformação plásticos dados pela expressão geral (3.72). Assim, no caso geral:

$$\frac{\dot{\alpha}_p^v}{\dot{\alpha}_p^s} = \frac{\left( p_{esc} - \frac{p_y}{2} \right)}{\frac{q_{esc}}{M^2}} \neq \frac{3}{2} \quad (3.77)$$

que não representará trajetória de deformação uniaxial, ou de compressão confinada.

### 3.3.4. Carregamento de compressão não-drenada ( $\epsilon_v = 0$ )

Para o modelo em exame, de pressão isotrópica de escoamento constante, a aplicação de carregamento sem variação de volume do material, corresponde a carregamento de ensaio triaxial não-drenado, em que se mantém constante a pressão confinante e se aumenta a tensão vertical total. Em termos de tensões efetivas, para material normalmente adensado, este

carregamento corresponde à trajetória de tensões coincidente com a superfície de escoamento elíptica. O ponto inicial da trajetória corresponde ao ponto sobre o eixo  $p$ , como mostra a Figura 3.12 e o ponto final coincide com o ponto crítico, onde o material sofre distorção contínua sem variação de volume.

As deformações específicas  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_3$  podem ser obtidas das deformações  $\varepsilon_v$  e  $\varepsilon_s$ , ou de forma incremental, a partir das expressões (2.13) e (2.14), produzindo:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{3}(\dot{\varepsilon}_v + 3\dot{\varepsilon}_s) \quad (3.78)$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_v - \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_s \quad (3.79)$$

Para trajetória em que os incrementos de deformação volumétrica sejam sempre nulos as relações (3.78) e (3.79) se reduzem a:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_s \quad (3.80)$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = -\frac{\dot{\varepsilon}_s}{2} \quad (3.81)$$

Da expressão geral dos incrementos de deformação volumétrica e de distorção, aqui repetidos:

$$\dot{\varepsilon}_v = \kappa^* \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) + \dot{\alpha}_p^v \quad (3.56 - \text{rep.})$$

$$\text{e:} \quad \dot{\varepsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G} + \dot{\alpha}_p^s \quad (3.57 - \text{rep.})$$

conclui-se, a partir da observação da expressão (3.56), que a condição de incremento de deformação volumétrica igual a zero implica em trajetória de tensão tal que:

$$0 = \kappa^* \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) + \dot{\alpha}_p^v \Rightarrow \dot{\alpha}_p^v = -\kappa^* \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) \quad (3.82)$$

A integração de (3.82) ao longo da trajetória de tensões indicada na Figura 3.12 leva a:

$$\alpha_p^v = -\kappa^* \cdot \log \left( \frac{p}{p_{y0}} \right) \quad (3.83)$$

No caso de compressão não-drenada, além da restrição de deformação volumétrica nula, que implica no surgimento de deformações plásticas volumétricas reversíveis, surgem também deformações plásticas de distorção, pois sendo o fator de proporcionalidade  $\lambda > 0$  e a componente de tensão triaxial  $q \neq 0$ , decorre que  $\dot{\alpha}_p$  também será diferente de zero.

Da expressão (3.83), substituindo a expressão de definição de incremento da variável interna de deformação volumétrica, pode-se retirar expressão simplificada para o fator de proporcionalidade  $\lambda$ , que deve ser equivalente ao valor dado por (3.59), como:

$$\dot{\alpha}_p^v = -\kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) \Rightarrow 2 \cdot \lambda \left( p - \frac{p_y}{2} \right) = -\kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) \Rightarrow \lambda = \frac{-\kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right)}{2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right)} \quad (3.84)$$

E a expressão para cálculo dos incrementos de deformação de distorção (3.57), substituindo-se  $\lambda$  de (3.84) na expressão do incremento da variável interna de distorção, resulta:

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G} + 2 \cdot \lambda \cdot \frac{q}{M^2} \Rightarrow \dot{\epsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G} + 2 \cdot \left[ \frac{-\kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right)}{2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right)} \right] \cdot \frac{q}{M^2} \quad (3.85)$$

Atingido o ponto crítico de escoamento, ponto  $P_c$  na Figura 3.12, mantido o estado de tensão constante, não há evolução nem de incrementos de deformações volumétricas elásticas nem plásticas, e conseqüentemente não há variação de volume, pois neste caso os incrementos das variáveis internas de plasticidade dados por (3.7) e (3.9), considerando que  $r_p = 1$ , e  $p = p_y/2$ , são relacionados por:

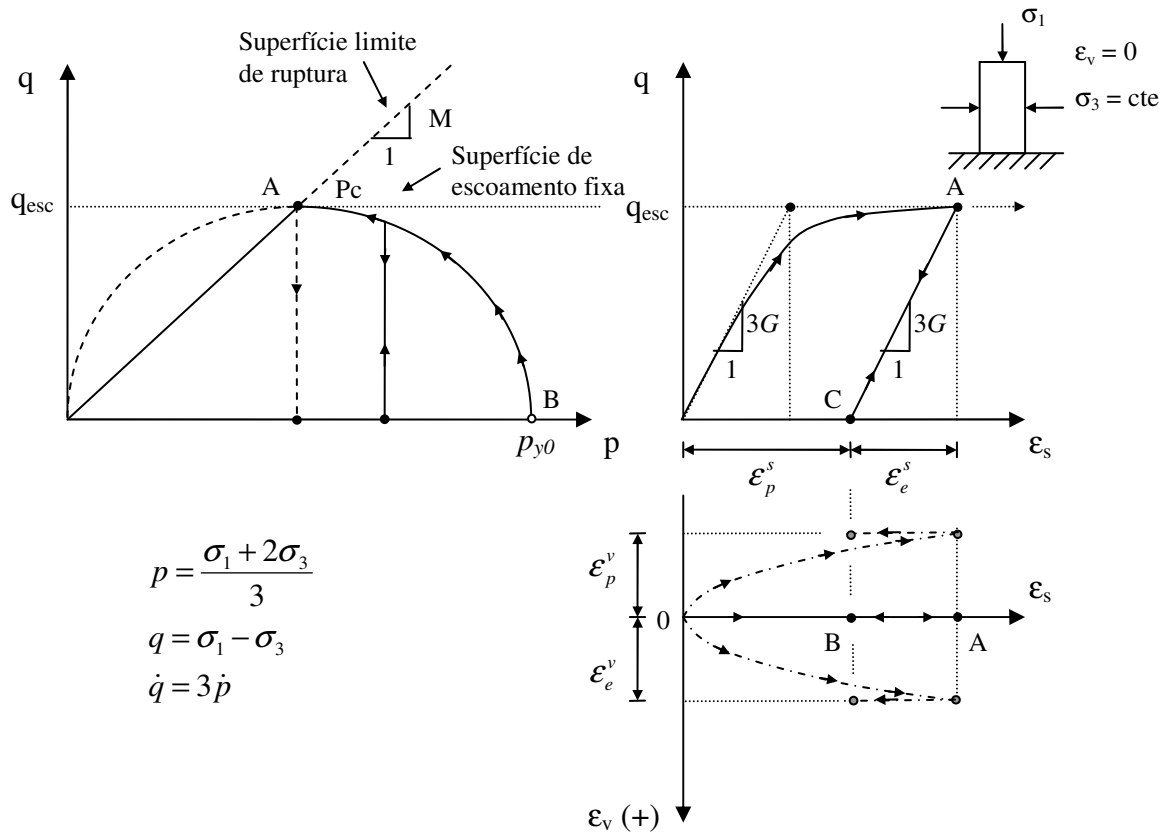
$$\frac{\dot{\alpha}_p^v}{\dot{\alpha}_p^s} = \frac{p - \frac{p_y}{2}}{\frac{q}{M^2}} = 0 \quad (3.86)$$

Como o incremento de deformação volumétrico é nulo no estado crítico a relação (3.86) é atendida para qualquer taxa de incremento de deformação plástica de distorção.

Para determinar a taxa de variação do incremento de distorção, note-se que o fator de proporcionalidade  $\lambda$ , dado por (3.20), neste caso onde  $r_p = 1$ ,  $r_d \rightarrow \infty$  e a pressão de escoamento é constante, se reduz a:

$$\lambda = \frac{\left(p - \frac{p_y}{2}\right) \cdot \frac{p}{\bar{K}^*} \cdot \dot{\epsilon}_v + 3\bar{G} \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\epsilon}_s}{2 \cdot \left(p - \frac{p_y}{2}\right)^2 \cdot \frac{p}{\bar{K}^*} + \frac{6\bar{G}}{M^4} \cdot q^2} \quad (3.87)$$

**Figura 3.12. MCC hiperplástico sem dano e tensão de escoamento constante sob estado de compressão triaxial não-drenada.**



Para o estado de carregamento em exame, em que o escoamento último ocorre sob pressão média  $p = p_y/2$ , o fator de proporcionalidade  $\lambda$  dado por (3.87) se reduz ainda para:

$$\lambda = \frac{M^2}{2q} \cdot \dot{\epsilon}_s \quad (3.88)$$

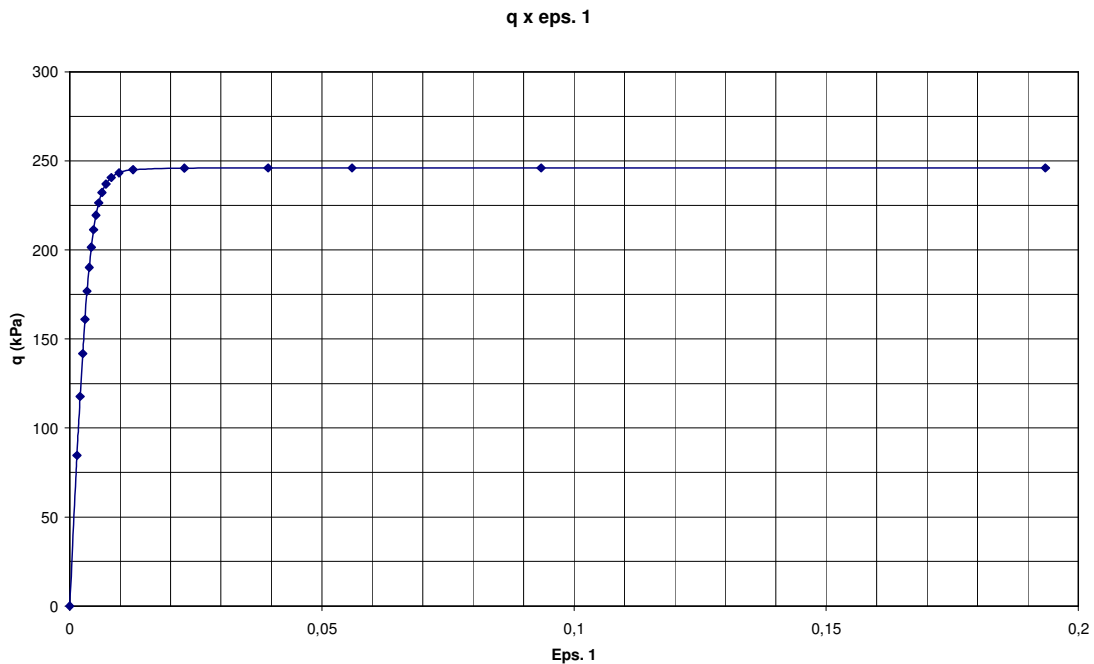
E, portanto, a taxa de incremento da variável interna de plasticidade de distorção, dada por (3.9), levando em conta que  $r_p = 1$ , e a expressão do fator de proporcionalidade de (3.88), resulta:

$$\dot{\alpha}_p^s = \lambda \cdot 2 \cdot \frac{q}{(r_p M)^2} = \frac{M^2}{2q} \cdot \dot{\epsilon}_s \cdot 2 \cdot \frac{q}{M^2} = \dot{\epsilon}_s \quad (3.89)$$

A relação (3.89) espelha o fato de que no estado crítico, neste caso, todo o incremento de deformação cisalhante é plástico.

A Figura 3.13 mostra exemplo numérico com uso de parâmetros utilizados por Einav et al (2007) ( $k^* = 0,005$ ,  $G = 20.000$  kPa,  $p_{y0} = 410$  kPa e  $M = 1,2$ ), e emprego das equações (3.84) e (3.85). Os valores de coordenadas ( $p$ ,  $q$ ) de pontos sobre a superfície elíptica de escoamento foram obtidos com emprego da expressão (2.204). Os valores de tensão desviadora  $q$  estão plotados contra a deformação vertical  $\epsilon_l = \epsilon_s$ , pela relação (3.80) para compressão não-drenada. A tabela A.2 do anexo 2 apresenta o resumo do cálculo. A tensão desviadora máxima tende ao valor  $M \cdot (p_{y0} / 2) = 1,2 \cdot 410 / 2 = 246$  kPa. O gráfico resultante pode ser comparado ao de Einav et al, reproduzido na Figura 2.40(b), para  $r_p = 1$ .

**Figura 3.13. Simulação de carregamento não-drenado para MCC hiperplástico sem dano e tensão de escoamento constante.**



### 3.4. **MODELO MCC HIPERPLÁSTICO SEM DANO: modelo com endurecimento ou amolecimento**

Examina-se na sequência o comportamento de materiais com pressão de escoamento isotrópica não-constante, esta característica permite representar efeito de endurecimento ou amolecimento em função de variável interna de deformação volumétrica plástica. Tal condição foi expressa pela equação (3.58), aqui repetida:

$$p_y(\alpha_p^v) = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v) \quad (3.58 - \text{rep.})$$

Admitem-se para o modelo examinado as mesmas hipóteses aplicadas para o modelo descrito no item 3.3. E, da mesma forma, examinam-se carregamentos isotrópicos, de compressão passiva, compressão confinada e compressão não-drenada, para identificar as propriedades do modelo.

#### 3.4.1. Carregamento Isotrópico

Para material hiperplástico com pressão de escoamento não-constante:

$$p_y(\alpha_p^v) = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v) \quad (3.58 - \text{rep.})$$

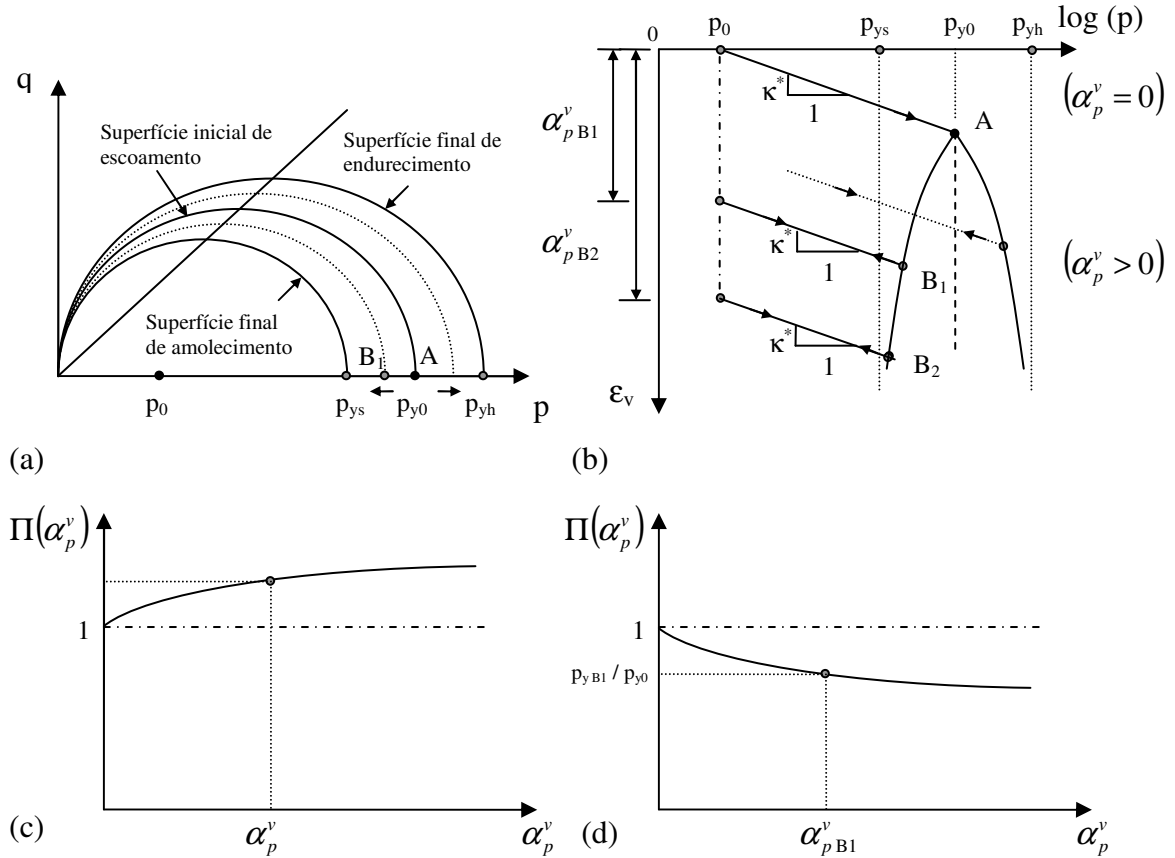
o carregamento isotrópico ocorre de forma elástica, até ser atingido estado de escoamento, produzindo deformação volumétrica que obedece à lei de variação dada por (3.54):

$$\varepsilon_v = \kappa^* \log\left(\frac{p}{p_0}\right) \quad (\text{para } p_0 \leq p \leq p_{y0}) \quad (3.54 - \text{rep.})$$

Quando a tensão hidrostática  $p$  iguala a tensão de escoamento  $p_{y0}$ , o material escoando podendo sofrer endurecimento ou amolecimento, de acordo com a forma particular da função (3.58). A Figura 3.14(b) ilustra ciclo de carga e descarga para carregamento isotrópico. O diagrama mostra carregamento levado até a tensão de escoamento, e após escoamento com endurecimento ou amolecimento, no qual se desenvolve deformação volumétrica plástica igual a  $\alpha_p^v$ . A Figura 3.14 ilustra casos em que a resistência cresce ou decresce até valores limitados.



**Figura 3.14. MCC hiperplástico sem dano e tensão de escoamento não-constante sob estado de compressão isotrópica (a) superfícies móveis de escoamento, (b) carregamento isotrópico, (c) função de endurecimento, e (d) função de amolecimento.**



As pressões  $p_{ys}$  e  $p_{yh}$  representam pressões limites de amolecimento (softening) e de endurecimento (hardening), respectivamente.

O ensaio de compressão isotrópica é meio de caracterização essencial do material. As Figuras 3.14. (b), (c) e (d) mostram como construir a função de endurecimento/amolecimento de (3.58).

Note-se que para este caso de carregamento, em que o escoamento ocorre sob o par de componentes de tensão triaxiais  $p = p_y$  e  $q = 0$ , o fator de proporcionalidade  $\lambda$  de (3.59) toma a forma:

$$\lambda = \frac{\left(p - \frac{p_y}{2}\right) \cdot \frac{p}{\kappa^*} \cdot \dot{\epsilon}_v + 3G \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\epsilon}_s}{\left\{ 2 \cdot \left(p - \frac{p_y}{2}\right)^2 \cdot \frac{p}{\kappa^*} + \frac{6G}{M^4} \cdot q^2 + p \cdot p_{y0} \cdot \Pi'(\alpha_p^v) \cdot \left(p - \frac{p_y}{2}\right) \right\}} = \frac{\dot{\epsilon}_v}{2 \cdot \left(p - \frac{p_y}{2}\right) + \kappa^* \cdot p_{y0} \cdot \Pi'(\alpha_p^v)} \quad (3.90)$$

Para o caso de pressão de escoamento isotrópica constante  $\Pi'(\alpha_p^v) = 0$  e  $\lambda = \dot{\epsilon}_v / p_y$ , e, portanto, o incremento da variável interna de plasticidade volumétrica torna-se igual a:

$$\dot{\alpha}_p^v = \lambda \cdot 2 \left( p - \frac{p_y}{2} \right) = \frac{\dot{\epsilon}_v}{2 \cdot (p - p_y / 2)} \cdot 2 \left( p - \frac{p_y}{2} \right) = \dot{\epsilon}_v \quad (3.91)$$

A expressão (3.91) mostra o que está representado na Figura 3.8, que no escoamento de um material com  $p_y = p_{y0} = \text{cte}$ , todo incremento de deformação volumétrica é plástico.

Para material com endurecimento a expressão (3.90) mostra que, à medida que  $\Pi'(\alpha_p^v) \rightarrow 0$  e  $\lambda \rightarrow \dot{\epsilon}_v / [2 \cdot (p - p_y / 2)]$ , os incrementos de deformação volumétrica tendem aos incrementos de um material com pressão de escoamento isotrópica constante. Ou seja, quando o carregamento atinge a superfície final de endurecimento, o material se comporta como material com pressão de escoamento constante, isto é, tal como o material descrito no item 3.3.

Para material com amolecimento, embora durante o escoamento ocorra redução da pressão isotrópica  $p$ , o processo ocorre com redução de volume, como se pode inferir da Figura 3.14. Desta forma, se  $\dot{\epsilon}_v > 0$  implica que  $\lambda > 0$ , tendendo a  $\lambda \rightarrow \dot{\epsilon}_v / [2 \cdot (p - p_y / 2)]$  à medida que o processo de escoamento tende à superfície final de escoamento, com  $\Pi'(\alpha_p^v) \rightarrow 0$  e  $p_y \rightarrow p_{ys}$ . Além disto, do exame da equação de incremento de deformação volumétrica (3.56), repetida a seguir, pode-se concluir que, para que o incremento de deformação volumétrica total seja positivo, o incremento plástico de deformação volumétrica deve ser maior, em valor absoluto, do que o incremento elástico de expansão volumétrica provocado pela redução da pressão isotrópica, com o encolhimento da superfície de escoamento.

$$\dot{\epsilon}_v = \kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) + \dot{\alpha}_p^v = \kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) + 2 \cdot \lambda \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \quad (3.56 - \text{rep.})$$

### 3.4.2. Carregamento de compressão triaxial convencional

Para carregamento que atinge a superfície limite de ruptura em primeiro lugar, trajetória AB na Figura 3.15, recai-se no mesmo caso já examinado para material com tensão isotrópica de escoamento constante. E, como já visto, no escoamento, o material deve sofrer

distorção e expansão volumétrica contínua, como mostrado na Figura 3.9. O que equivale dizer que a condição limite de ruptura controla o processo de deformação do material.

Para carregamento que atinge a superfície de escoamento em primeiro lugar, trajetória CDEF na Figura 3.15, pode ocorrer caso de endurecimento ou amolecimento, de acordo com a forma específica da função (3.58), com a continuação do carregamento.

### Caso de endurecimento

Para carregamento que atinge em primeiro lugar a superfície de escoamento, ponto  $D$  na Figura 3.15, tem início processo de endurecimento, com crescimento de resistência que pode ir até a superfície de escoamento de ruptura, trajetória  $CDEF$  na Figura 3.15, ou até a superfície final de escoamento, trajetória  $ABCD$  na Figura 3.16.

Para trajetória que atinge a superfície de escoamento de ruptura, ponto  $F$  na Figura 3.15, é alcançado o estado crítico e o material passa a se deformar sob volume constante. No ponto  $F$  a componente hidrostática de tensão  $p = p_y/2$  e o fator de proporcionalidade  $\lambda$  de (3.59) se reduz a:

$$\lambda = \frac{\left(p - \frac{p_y}{2}\right) \cdot \frac{p}{\kappa^*} \cdot \dot{\epsilon}_v + 3G \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\epsilon}_s}{\left\{ 2 \cdot \left(p - \frac{p_y}{2}\right)^2 \cdot \frac{p}{\kappa^*} + \frac{6G}{M^4} \cdot q^2 + p \cdot p_{y0} \cdot II'(\alpha_p^v) \left(p - \frac{p_y}{2}\right) \right\}} = \frac{3G \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\epsilon}_s}{\frac{6G}{M^4} \cdot q^2} = \frac{M^2}{2q} \cdot \dot{\epsilon}_s \quad (3.92)$$

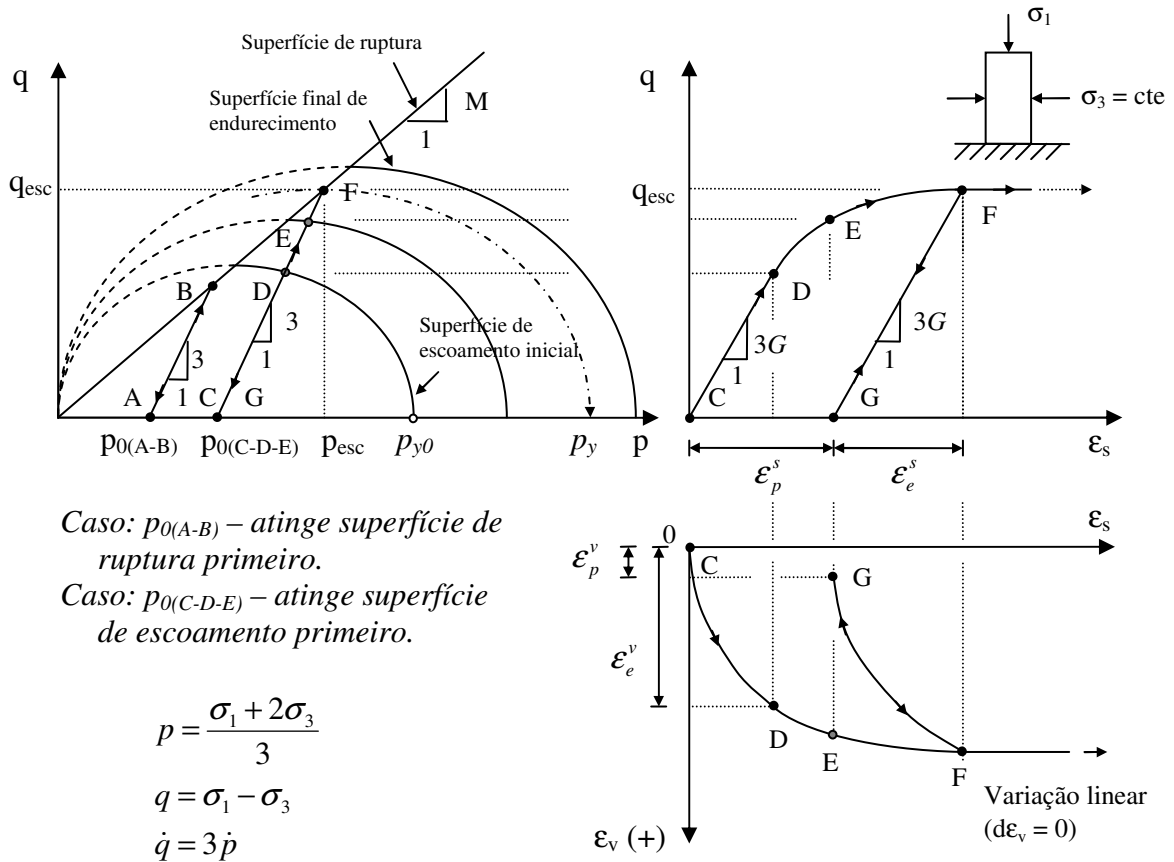
e os incrementos das variáveis internas de plasticidade (3.7) e (3.9), para  $p = p_y/2$ , tornam-se:

$$\dot{\alpha}_p^v = \lambda \cdot 2 \cdot \left(p - \frac{p_y}{2}\right) = \frac{M^2}{2q} \cdot \dot{\epsilon}_s \cdot \left(\frac{p_y}{2} - \frac{p_y}{2}\right) = 0 \quad (3.93)$$

$$\dot{\alpha}_p^s = \lambda \cdot 2 \cdot \frac{q}{M^2} = \frac{M^2}{2q} \cdot \dot{\epsilon}_s \cdot 2 \cdot \frac{q}{M^2} = \dot{\epsilon}_s \quad (3.94)$$

As expressões (3.93) e (3.94) representam condição de estado crítico, pois indicam que o material escoou sob volume constante e distorção contínua, onde todo o incremento de deformação de distorção é plástico. Na Figura 3.15 está representada também trajetória de descarregamento FG.

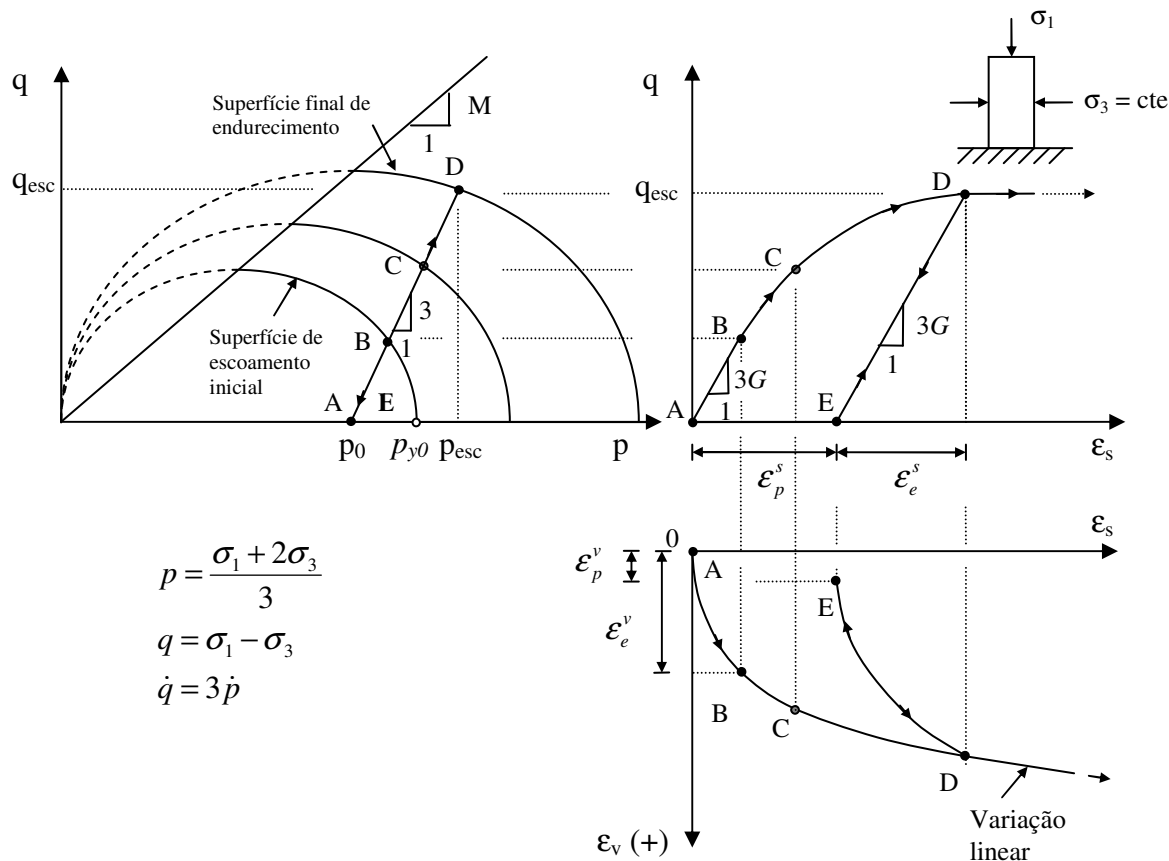
**Figura 3.15. MCC hiperplástico sem dano e tensão de escoamento não-constante sob estado de compressão triaxial convencional atingindo superfície limite de ruptura.**



Por outro lado, se for atingida a superfície final de escoamento de endurecimento o material continuará a se deformar por distorção e redução de volume, de forma contínua, como mostra a Figura 3.16.

Lembrando que o fator de proporcionalidade  $\lambda = \lambda(p, q, \alpha_p^v)$ , e os incrementos das variáveis internas de plasticidade  $\dot{\alpha}_p^v = 2\lambda(p - p_y/2)$  e  $\dot{\alpha}_p^s = 2\lambda q/M^2$ , são funções do estado de tensão sobre a superfície de escoamento. Desta forma a relação  $\dot{\alpha}_p^v / \dot{\alpha}_p^s$  é variável até ser atingido ponto sobre a superfície final de escoamento, a partir do qual o estado de tensão ( $p_{esc}$ ,  $q_{esc}$ ) permanece constante, ponto D na Figura 3.16. A continuação do processo de escoamento ocorre sob incrementos de deformação de distorção e de contração volumétrica contínuos, sob razão  $\dot{\alpha}_p^v / \dot{\alpha}_p^s$  constante. Neste estado último de escoamento,  $\dot{\varepsilon}_v = \dot{\alpha}_p^v$  e  $\dot{\varepsilon}_s = \dot{\alpha}_p^s$ .

**Figura 3.16. MCC hiperplástico sem dano e tensão de escoamento não-constante sob estado de compressão triaxial convencional atingindo superfície final de escoamento – caso de endurecimento.**



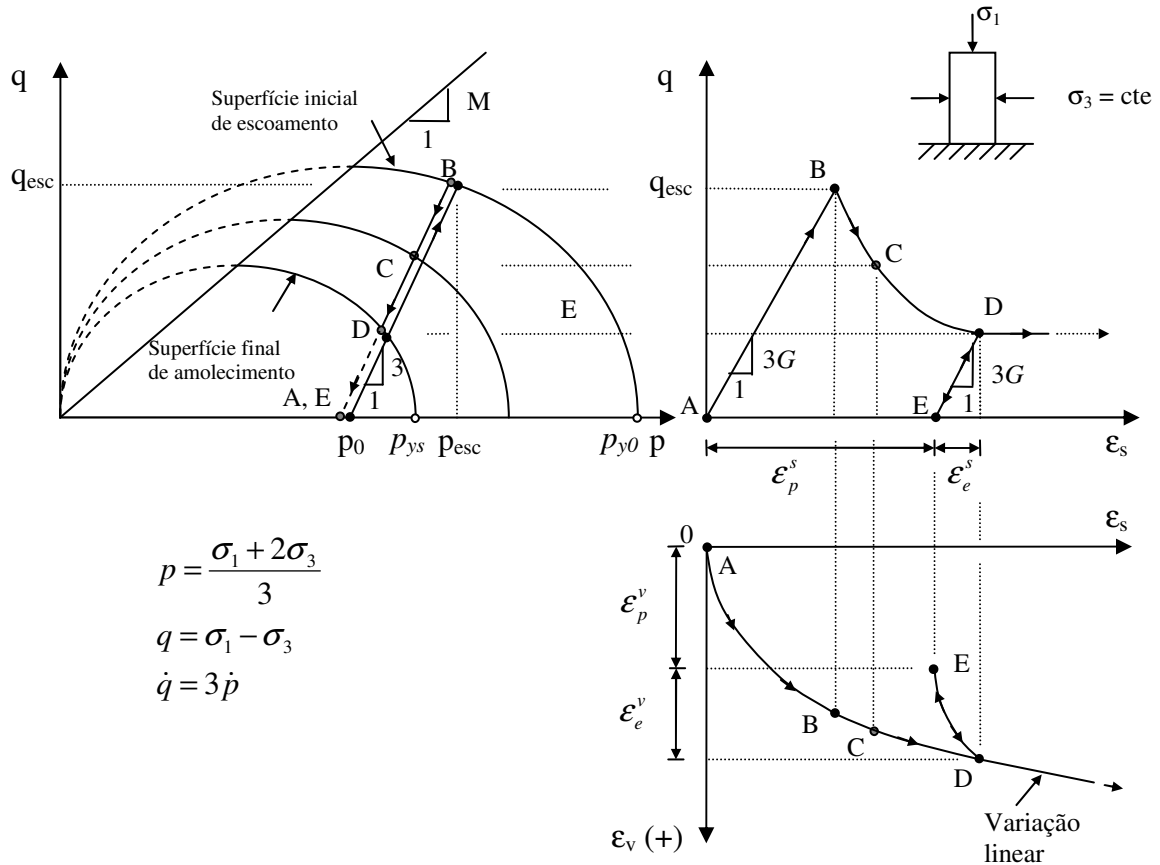
### Caso de amolecimento

Para material passível de sofrer amolecimento existem duas possibilidades. A primeira possibilidade é de a trajetória de tensões atingir a superfície limite de ruptura em primeiro lugar. Este caso é idêntico ao descrito no item 3.3 para material com tensão isotrópica de escoamento constante. Ver Figura 3.9 no item 3.3.2. O escoamento ocorre sob estado de tensão constante, com distorção e expansão volumétrica contínuas.

A segunda possibilidade é que a trajetória de tensões atinja a superfície de escoamento de amolecimento em primeiro lugar. A Figura 3.17 ilustra o comportamento tensão-deformação para este caso. Durante o processo de amolecimento o ponto representativo do estado de tensão permanece sempre sobre a superfície de escoamento em contração.

Ao ser atingido o ponto sobre a superfície final de escoamento, ponto  $D$  na Figura 3.17, mantido o estado de tensão constante, o escoamento ocorre sob razão  $\dot{\alpha}_p^v / \dot{\alpha}_p^s$  constante, razão esta que é igual à razão entre os incrementos totais de deformação  $\dot{\epsilon}_v / \dot{\epsilon}_s$ , que são completamente plásticos. Este comportamento final de escoamento corresponde ao trecho linear após o ponto  $D$ , no gráfico  $\epsilon_v \times \epsilon_s$ . Atingida a superfície final de amolecimento o material se comporta como material com pressão de escoamento isotrópica constante, conforme descrito no item 3.3. O trecho  $DE$  representa trecho final de descarga.

**Figura 3.17. MCC hiperplástico sem dano e tensão de escoamento não-constante sob estado de compressão triaxial convencional atingindo superfície de escoamento de amolecimento – caso de amolecimento.**



Apesar da superfície de escoamento sofrer contração o fator de multiplicação  $\lambda$ , dado por (3.59), deve continuar positivo, pois se mantendo o denominador positivo, onde apenas o fator  $\Pi'(\alpha_p^v)$  pode ser menor do que zero, o numerador tem fatores dependentes do estado de tensão, e constantes todos positivos.

$$\lambda = \frac{\left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\kappa^*} \cdot \dot{\epsilon}_v + 3G \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\epsilon}_s}{\left\{ 2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 \cdot \frac{p}{\kappa^*} + \frac{6G}{M^4} \cdot q^2 + p \cdot p_{y0} \cdot \Pi'(\alpha_p^v) \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \right\}} \quad (3.59 - \text{rep.})$$

e, os incrementos de deformação total  $\dot{\epsilon}_v$  e  $\dot{\epsilon}_s$  com a progressão do carregamento só devem crescer, já que o material perde resistência com a deformação, sendo, portanto, maiores do que zero. O exame das expressões dos incrementos de deformação (3.56) e (3.57), adiante repetidas, mostra então que os incrementos das variáveis internas plásticas têm que ser maiores do que os incrementos elásticos (negativos) devidos às variações negativas de  $p$  e  $q$ , para que os incrementos totais de deformação sejam positivos.

$$\dot{\epsilon}_v = \kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) + \dot{\alpha}_p^v = \kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) + \lambda \cdot 2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \quad (3.56 - \text{rep.})$$

$$\text{e:} \quad \dot{\epsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G} + \dot{\alpha}_p^s = \frac{\dot{q}}{3G} + \lambda \cdot 2 \cdot \frac{q}{M^2} \quad (3.57 - \text{rep.})$$

Além disto, os incrementos das variáveis internas de plasticidade têm que ter mesmo sinal, pois da razão entre os ditos incrementos estabelecida em (3.86) e aqui reescrita como:

$$\frac{\dot{\alpha}_p^v}{\dot{\alpha}_p^s} = \frac{p - \frac{p_y}{2}}{\frac{q}{M^2}} \quad (3.86 - \text{rep.})$$

correspondente a pontos situados sobre a superfície final de escoamento, tais como o ponto  $D$  na Figura 3.17, tanto  $(p - p_y/2)$  como  $q$  são positivos.

Uma vez atingida a superfície final de amolecimento e mantido o estado de tensão aplicado, os incrementos de deformação de distorção e de redução de volume passam a ser completamente plásticos, e ocorrem com razão constante definida por (3.86).

### 3.4.3. Carregamento de compressão confinada

#### *Caso de endurecimento*

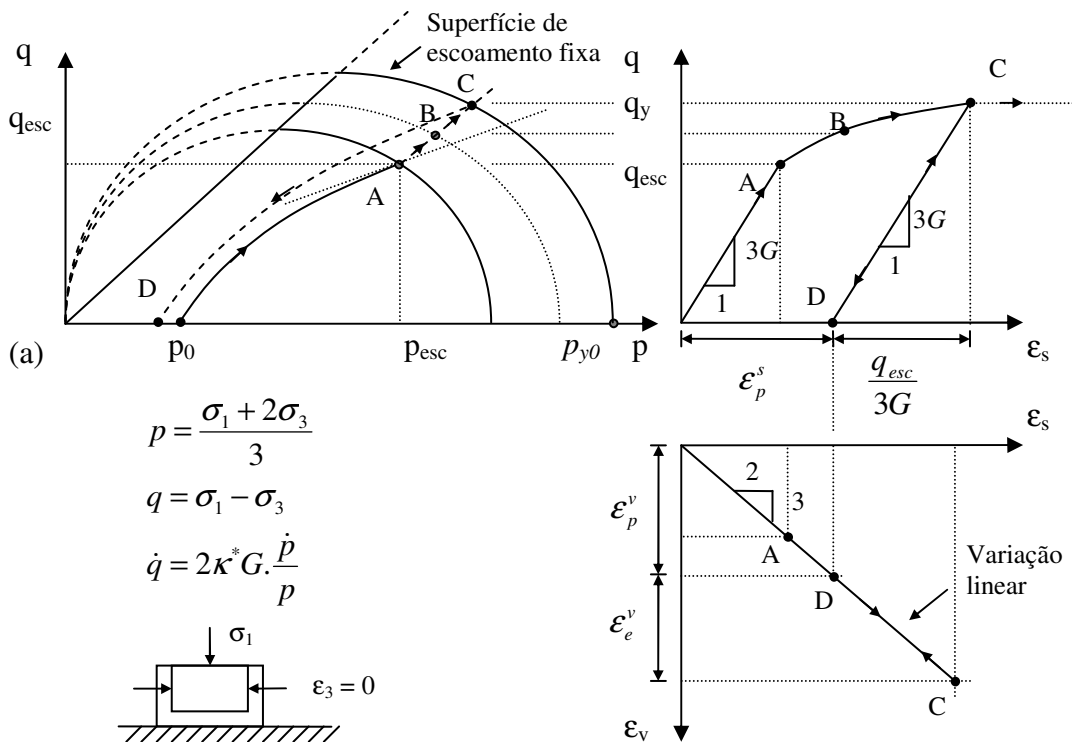
O carregamento sob condição de compressão confinada, como já mencionado anteriormente, tem trajetória de deformações linear, como mostrado no gráfico  $\varepsilon_s \times \varepsilon_v$  da Figura 3.11, para material hiperplástico sem dano, com tensão de escoamento constante. A trajetória linear de deformações ocorre com observância da relação incremental (3.47):

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_v \quad (3.47 - \text{rep.})$$

Da relação (3.47), que é válida também após escoamento, decorre a relação (3.73):

$$\frac{\dot{q}}{3G} + \dot{\alpha}_p^s = \frac{2}{3} \left( \kappa^* \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) + \dot{\alpha}_p^v \right) \quad (3.73 - \text{rep.})$$

**Figura 3.18. MCC hiperplástico sem dano e tensão de escoamento não-constante sob estado de compressão confinada – caso de endurecimento.**



No trecho elástico a relação (3.73) simplifica-se para:



$$\frac{\dot{q}}{3G} = \frac{2}{3} \cdot \kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) \quad (3.74 - \text{rep.})$$

que conduz à mesma relação (3.48) obtida para material hiperelástico e repetida a seguir:

$$q = 2\kappa^* G \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right) \quad (3.48 - \text{rep.})$$

Atingido o estado de escoamento as componentes do estado de tensão,  $p$  e  $q$ , passam a crescer com o processo de endurecimento, e agora ocorrem incrementos de deformação elástica e plástica. A relação (3.47) permite a determinação de expressão alternativa para o fator de multiplicação. Substituindo-se em (3.47) as expressões dos incrementos das variáveis internas obtém-se:

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{3}{2} \cdot \dot{\varepsilon}_s \Rightarrow \kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) + \lambda \cdot 2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) = \frac{3}{2} \cdot \left[ \frac{\dot{q}}{3G} + \lambda \cdot 2 \cdot \frac{q}{M^2} \right] \quad (3.95)$$

$$\text{e: } \lambda = \frac{\kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) - \frac{\dot{q}}{2G}}{\frac{3q}{M^2} - 2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right)} \quad (3.96)$$

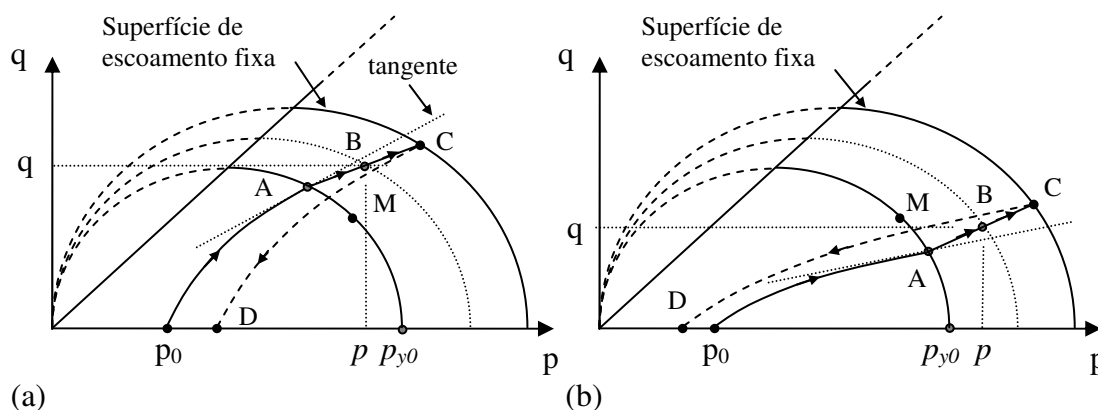
As componentes de tensão  $p$  e  $q$ , em (3.95) e (3.96), representam estados de tensão sobre superfície de escoamento de endurecimento. Do exame da expressão do denominador de (3.96) observa-se que este muda de sinal para valor de  $q$  igual a:

$$q = \frac{2}{3} \cdot M^2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \quad (3.97)$$

Como o fator de multiplicação  $\lambda$  deve ser sempre positivo, se o denominador resultar negativo, o numerador de (3.96) também deve ser negativo. Isto ocorre para o trecho entre o ponto  $M$  e o eixo  $p$ , da Figura 3.19. O ponto  $M$  tem coordenadas  $p$  e  $q$ , relacionadas pela equação (3.97). Por outro lado, se o denominador resultar positivo, o numerador também deverá ser positivo, o que ocorre para pontos entre o ponto  $M$  e a reta  $q = Mp$ . Na Figura 3.19 estão mostrados os vetores de incremento de tensão, de componentes  $(dp, dq)$ , que atendem a esta condição. Isso equivale a dizer que, o efeito de endurecimento produz uma mudança da

trajetória de tensão, que em simulação numérica no exemplo apresentado a seguir foi seguida de forma linear.

**Figura 3.19. MCC hiperplástico sem dano e tensão de escoamento não-constante sob estado de compressão confinada – mudança da trajetória de tensão com endurecimento.**

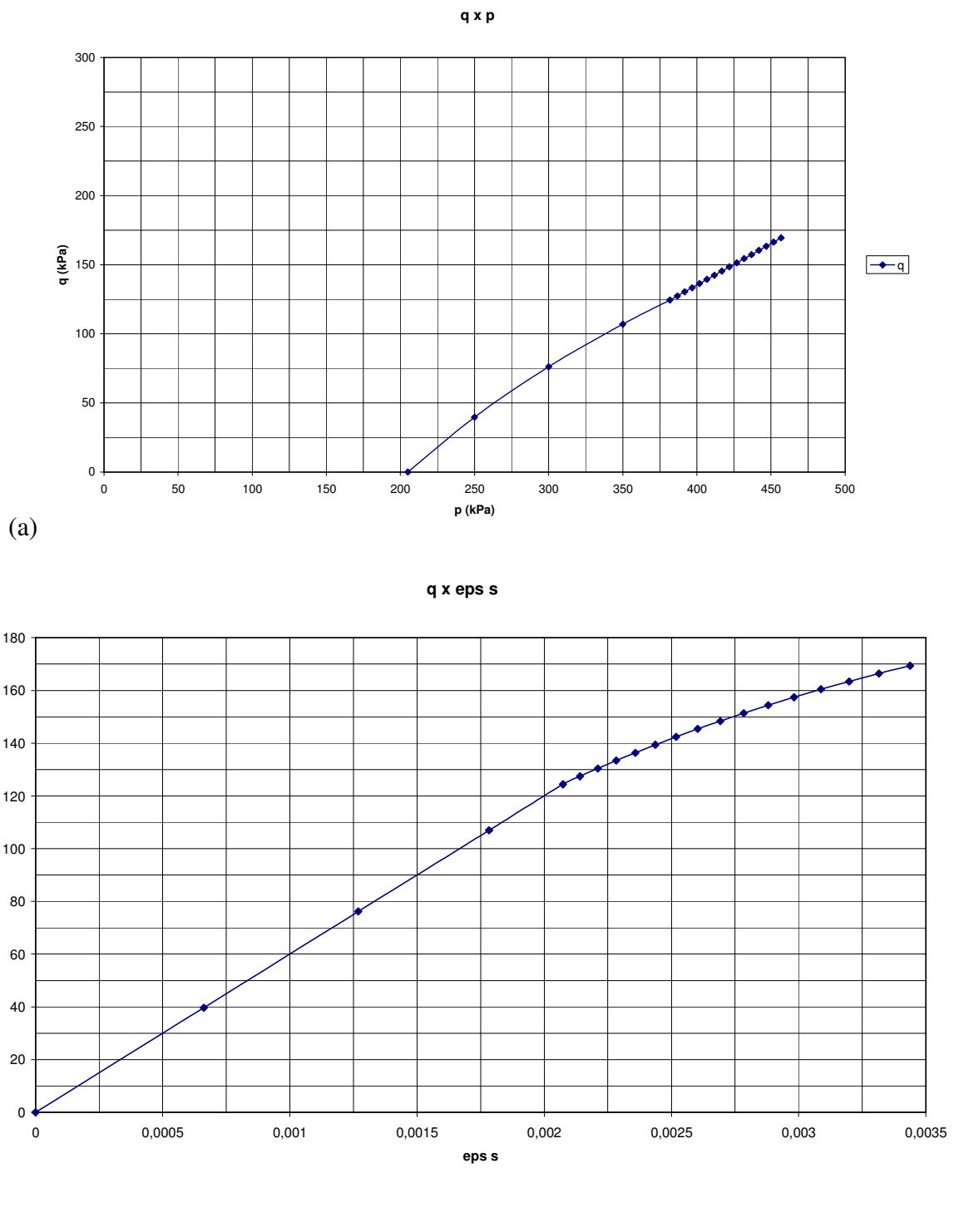


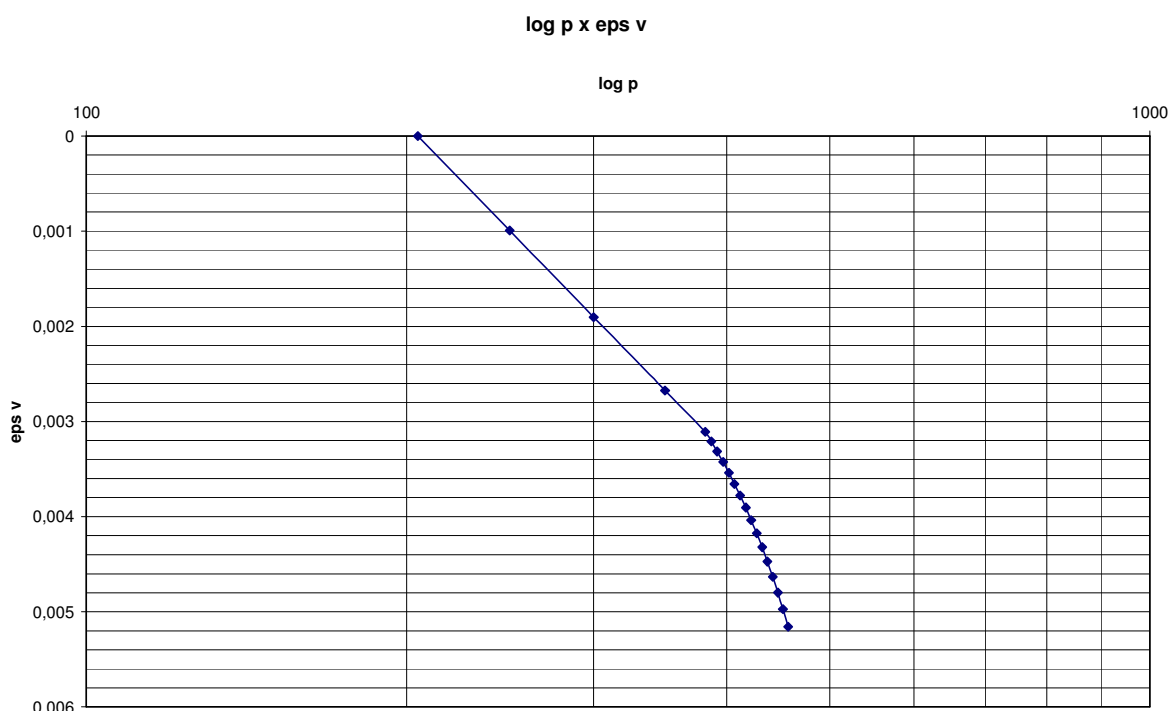
Seja agora uma simulação de carregamento de compressão confinada, para material com endurecimento e parâmetros:  $k^* = 0,005$ ,  $G = 20000$  kPa,  $p_{y0} = 410$  kPa,  $M = 1,2$ , e  $p_0 = 205$  kPa. O ponto de escoamento inicial tem coordenadas  $p_{esc} = 381,85$  kPa e  $q_{esc} = 124,41$  kPa. A Tabela A.3, do Anexo 2, resume os resultados obtidos com o uso das expressões para o cálculo dos incrementos de  $\varepsilon_v$  dados por (3.56),  $\varepsilon_s$  dados por (3.57) e  $\lambda$ , por (3.96), com acréscimos de tensão  $dp = 5$  kPa e  $dq = 3$  kPa, que mostraram observância exata à condição  $\varepsilon_v = 3/2 \cdot \varepsilon_s$ . Os resultados estão apresentados na Figura 3.20.

Observou-se, entretanto, que o atendimento da condição de deformação *não mostra unicidade de trajetória de tensões*. Qualquer trajetória retilínea de tensões que tenha inclinação superior à derivada da relação  $q \times p$ , no ponto de escoamento inicial, para pontos abaixo do ponto  $M$ , na Figura 3.19, ou qualquer trajetória retilínea de tensões que tenha inclinação inferior à derivada relação  $q \times p$ , no ponto de escoamento inicial, para pontos acima do ponto  $M$ , na Figura 3.19, atende à condição de deformação sob compressão confinada!

Explicação para tal fato é apresentada à frente, em simulação de ensaios com diferentes tensões iniciais de consolidação isotrópica. Independentemente do estado inicial, após o início do escoamento sob compressão confinada, todas as trajetórias elásticas iniciais tendem para uma única trajetória de tensões pós-escoamento. As simulações mostraram esta inversão de declividades em relação a um ponto de separação na superfície de escoamento.

**Figura 3.20. MCC hiperplástico sem dano e tensão de escoamento não-constante.**  
**Simulação de carregamento sob estado de compressão confinada – caso de**  
**endurecimento, (a) trajetória  $p \times q$ , (b)  $q \times \epsilon_s$  e (c)  $\log p \times \epsilon_s$ .**





(c)

A Figura 3.20 (c) mostra trecho linear inicial, que corresponde ao trecho de recompressão inicial, comumente observado em ensaios de adensamento, e a continuação mostra a transição para a "reta virgem", de compressão nova, o trecho de endurecimento.

### ***Caso de amolecimento***

Em caso de material sujeito a amolecimento, ao ser atingido estado de escoamento, a progressão de carregamento exige, para que o fator de multiplicação  $\lambda$  seja positivo, que ocorra a inversão do comportamento mostrado na Figura 3.19, para material com endurecimento. Isto é, para pontos atingidos sobre a superfície de escoamento inicial abaixo do ponto  $M$ , a trajetória de tensões de progressão do carregamento, agora com incrementos negativos, deve ter declividade inferior à derivada da relação  $q \times p$ , no ponto de escoamento inicial. E, inversamente, para pontos atingidos acima do ponto  $M$ , a trajetória de progressão do carregamento deve ter declividade superior à derivada relação  $q \times p$ , no ponto de escoamento inicial. Tal situação se repete para os novos pontos atingidos sobre as sucessivas superfícies de escoamento.

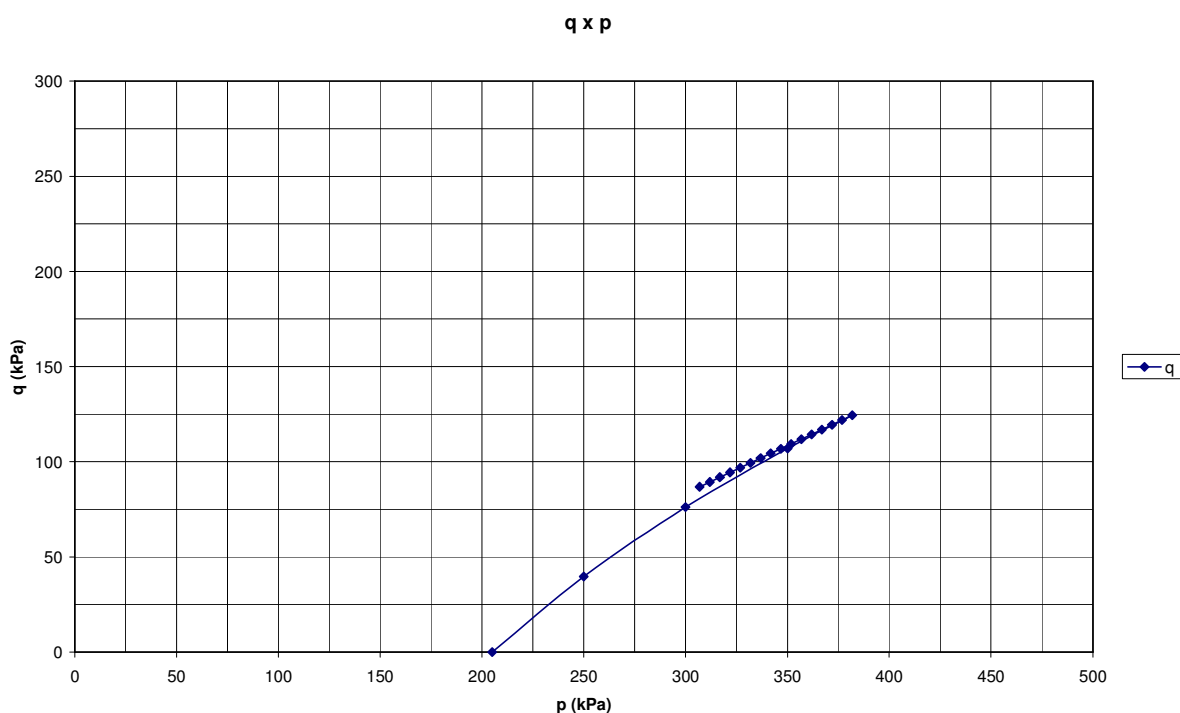
Da mesma forma que foi observada para material com endurecimento, *não há unicidade da trajetória* após ter sido atingido o ponto inicial de escoamento! Qualquer

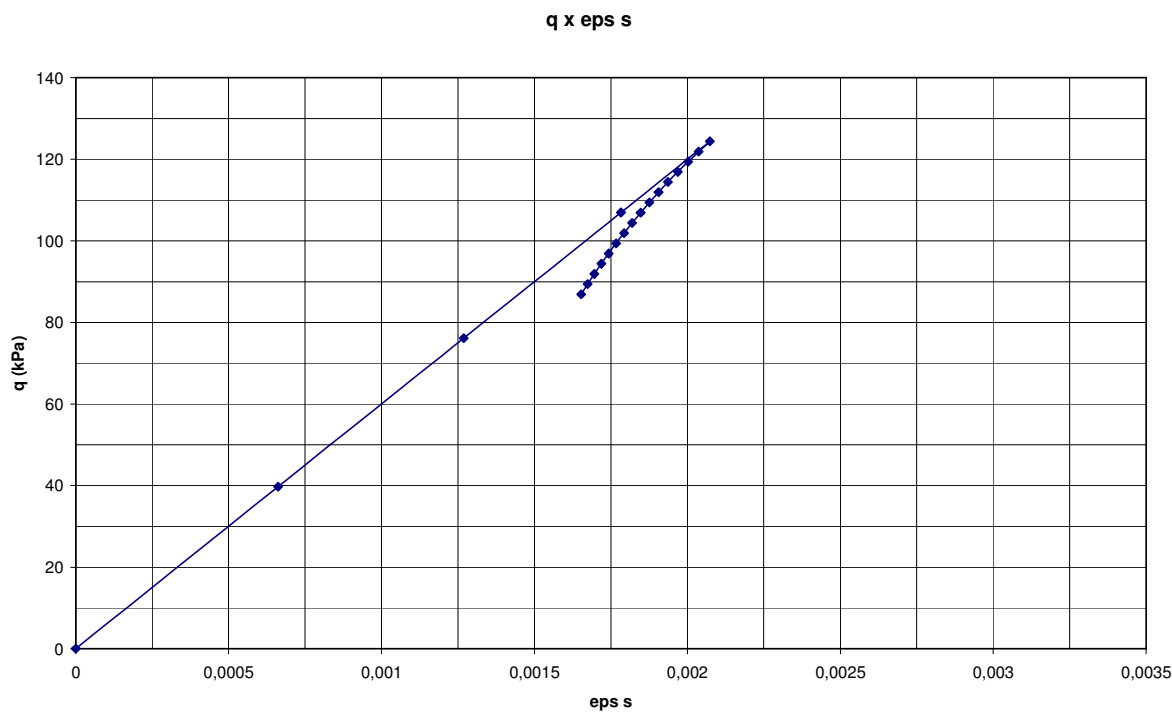
trajetória retilínea de tensões, com derivada inferior, ou superior, à observada no ponto inicial de escoamento, para pontos atingidos abaixo do ponto  $M$ , ou acima do ponto  $M$ , respectivamente, atende à condição de compressão confinada.

Exemplo numérico com os mesmos dados iniciais utilizados para o caso com endurecimento, e no qual foi seguida trajetória linear de incrementos (negativos:  $dp = -5$  kPa e  $dq = -2,5$  kPa) de tensão está apresentado no Anexo 2, e resumido na Tabela A.3. Gráficos de trajetória de tensão  $p \times q$ , e de tensão-deformação  $q \times \varepsilon_s$  e  $\log p \times \varepsilon_v$  estão reproduzidos na Figura 3.21. No presente exemplo numérico o ponto de escoamento é atingido abaixo do ponto  $M$  na Figura 3.19. A Figura 3.21(a) mostra que a trajetória de tensões está acima da trajetória de carregamento elástico.

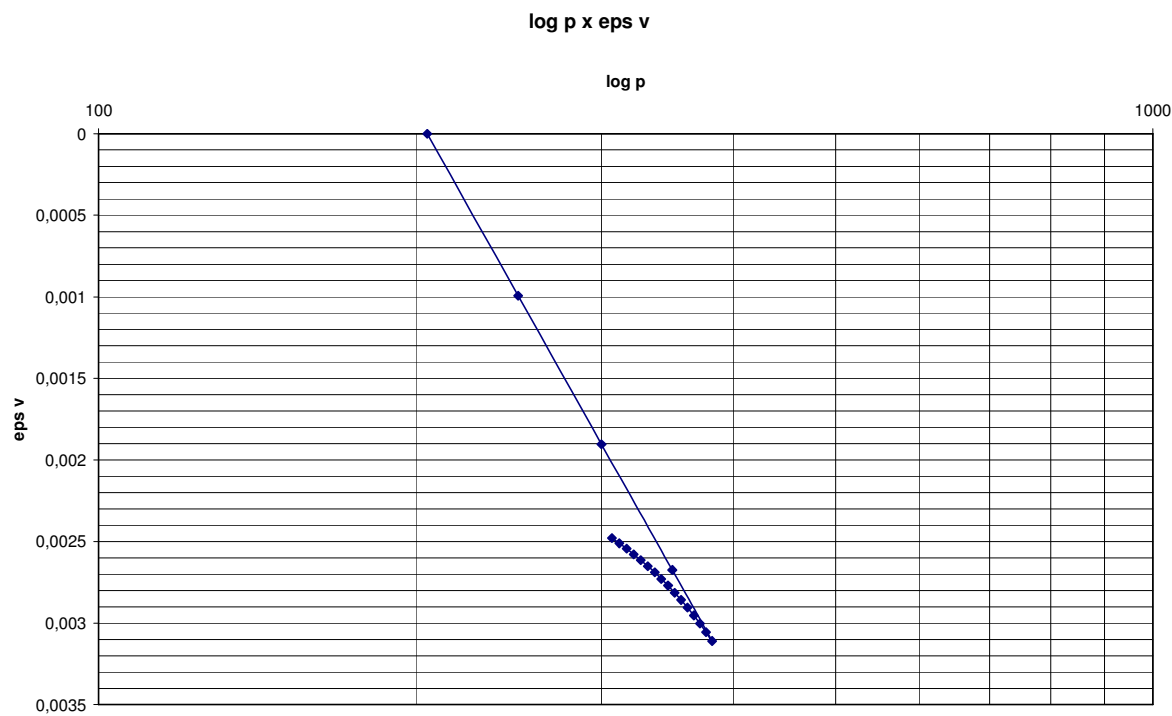
**Figura 3.21. MCC hiperplástico sem dano e tensão de escoamento não-constante.**

**Simulação de carregamento sob estado de compressão confinada – caso de amolecimento, (a) trajetória  $p \times q$ , (b)  $q \times \varepsilon_s$  e (c)  $\log p \times \varepsilon_v$ .**





(b)



(c)

### 3.4.4. Carregamento de compressão confinada – caminho direto

#### *Caso de endurecimento*

O carregamento sob condição de compressão confinada, como já mencionado anteriormente, tem trajetória de deformações linear, como mostrado no gráfico  $\varepsilon_s \times \varepsilon_v$  da Figura 3.11, para material hiperplástico sem dano, com tensão de escoamento constante. A trajetória linear de deformações ocorre com observância da relação incremental (3.47):

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{2}{3} \cdot \dot{\varepsilon}_v \quad (3.47 - \text{rep.})$$

Os incrementos de deformação volumétrica e de distorção são expressos pelas equações (3.56) e (3.57), aqui repetidas:

$$\dot{\varepsilon}_p^v = \kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) + \dot{\alpha}_p^v = \kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) + 2 \cdot \lambda \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \quad (3.56 - \text{rep.})$$

$$\dot{\varepsilon}_p^s = \frac{\dot{q}}{3G} + \dot{\alpha}_p^s = \frac{\dot{q}}{3G} + 2 \cdot \lambda \cdot \frac{q}{M^2} \quad (3.57 - \text{rep.})$$

O fator de multiplicação, para caso de material hiperplástico com endurecimento, sem dano, é dado por:

$$\lambda = \frac{\left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\kappa^*} \cdot \dot{\varepsilon}_v + 3G \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\varepsilon}_s}{\left\{ 2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 \cdot \frac{p}{\kappa^*} + \frac{6G}{M^4} \cdot q^2 + p \cdot p_{y0} \cdot \Pi'(\alpha_p^v) \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \right\}} \quad (3.59 - \text{rep.})$$

Colocando  $A^*$  igual ao denominador do fator de multiplicação  $\lambda$ :

$$A^* = \left\{ 2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 \cdot \frac{p}{\kappa^*} + \frac{6G}{M^4} \cdot q^2 + p \cdot p_{y0} \cdot \Pi'(\alpha_p^v) \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \right\} \quad (3.98)$$

Então:

$$\lambda = \frac{1}{A^*} \cdot \left[ \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\kappa^*} \cdot \dot{\varepsilon}_v + 3G \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\varepsilon}_s \right] \quad (3.99)$$

Substituindo (3.99) nas equações dos incrementos de deformação resultam:

$$\dot{\varepsilon}_v = \kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) + 2\lambda \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) = \kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) + 2 \cdot \frac{1}{A^*} \cdot \left[ \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\kappa^*} \cdot \dot{\varepsilon}_v + 3G \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\varepsilon}_s \right] \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \quad (3.100)$$

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G} + 2\lambda \cdot \frac{q}{M^2} = \frac{\dot{q}}{3G} + 2 \cdot \frac{1}{A^*} \cdot \left[ \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\kappa^*} \cdot \dot{\varepsilon}_v + 3G \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\varepsilon}_s \right] \cdot \frac{q}{M^2} \quad (3.101)$$

Estas duas últimas equações formam um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas, que podem ser reescritas como:

$$\left[ 1 - \frac{2}{A^*} \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 \cdot \frac{p}{\kappa^*} \right] \cdot \dot{\varepsilon}_v - \left[ \frac{6G}{A^*} \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{q}{M^2} \right] \cdot \dot{\varepsilon}_s = \kappa^* \cdot \frac{\dot{p}}{p} \quad (3.102)$$

$$\left[ -\frac{2}{A^*} \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\kappa^*} \cdot \frac{q}{M^2} \right] \cdot \dot{\varepsilon}_v + \left[ 1 - \frac{6G}{A^*} \cdot \frac{q^2}{M^4} \right] \cdot \dot{\varepsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G} \quad (3.103)$$

cuja solução para os incrementos de deformação deve atender à condição de compressão confinada, para a trajetória correta. Reescrevendo ainda as equações anteriores, em forma mais simples, de maneira a explicitar as deformações em função unicamente dos incrementos de tensões, resulta:

$$\left\{ \left[ 1 - \frac{2}{A^*} \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 \cdot \frac{p}{\kappa^*} \right] \cdot \frac{p}{\kappa^*} \right\} \cdot \dot{\varepsilon}_v - \left\{ \left[ \frac{6G}{A^*} \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{q}{M^2} \right] \cdot \frac{p}{\kappa^*} \right\} \cdot \dot{\varepsilon}_s = \dot{p} \quad (3.104)$$

$$\left\{ \left[ -\frac{2}{A^*} \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\kappa^*} \cdot \frac{q}{M^2} \right] \cdot 3G \right\} \cdot \dot{\varepsilon}_v + \left\{ \left[ 1 - \frac{6G}{A^*} \cdot \frac{q^2}{M^4} \right] \cdot 3G \right\} \cdot \dot{\varepsilon}_s = \dot{q} \quad (3.105)$$

Que pode ser colocada em forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \left\{ \left[ 1 - \frac{2}{A^*} \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 \cdot \frac{p}{\kappa^*} \right] \cdot \frac{p}{\kappa^*} \right\} & \left\{ \left[ -\frac{6G}{A^*} \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{q}{M^2} \right] \cdot \frac{p}{\kappa^*} \right\} \\ \left\{ \left[ -\frac{2}{A^*} \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\kappa^*} \cdot \frac{q}{M^2} \right] \cdot 3G \right\} & \left\{ \left[ 1 - \frac{6G}{A^*} \cdot \frac{q^2}{M^4} \right] \cdot 3G \right\} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_v \\ \dot{\varepsilon}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \quad (3.106)$$

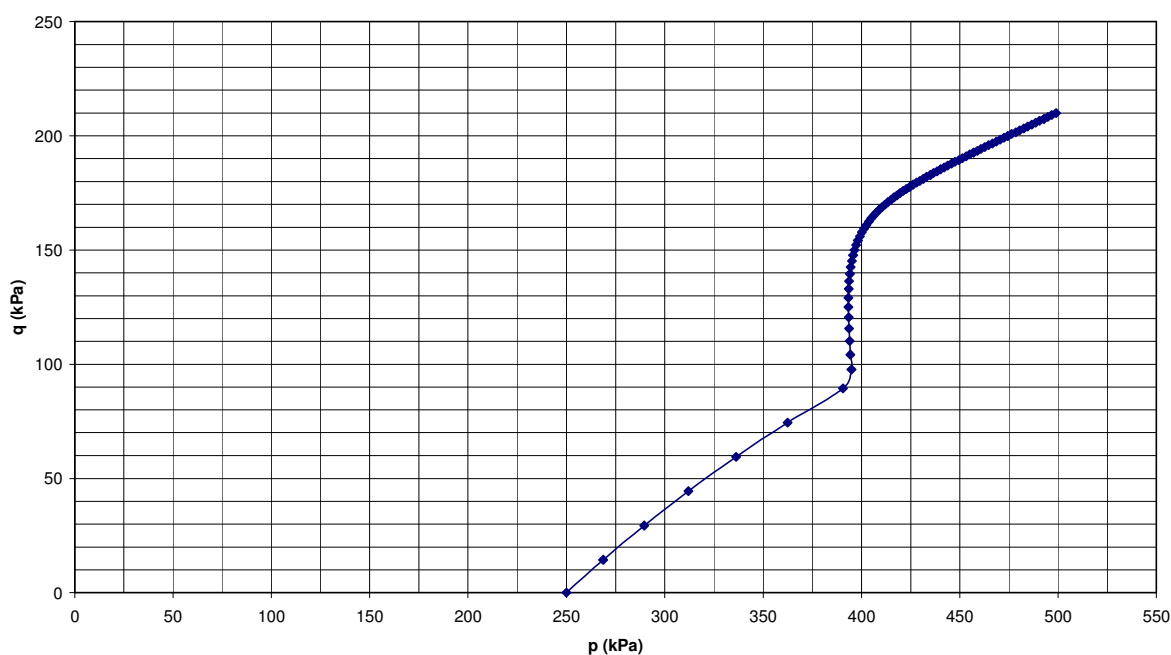


Na Figura 3.22 estão representados os resultados de simulação de carregamento de compressão confinada, para material com endurecimento e parâmetros:  $k^* = 0,005$ ,  $\lambda^* = 0,090$ ,  $G = 20000$  kPa,  $p_{y0} = 410$  kPa,  $M = 1,2$ , e  $p_0 = 50$  kPa. O material é pré-adensado, com ponto inicial de carregamento com coordenadas  $p_{ini} = 250$  kPa e  $q_{ini} = 0$  kPa. A Tabela A.5, do Anexo 2, resume os resultados obtidos com o uso das expressões citadas e com relação entre incrementos de deformação  $d\varepsilon_v = 1,5.d\varepsilon_s$ . Foram utilizados incrementos de deformação vertical  $d\varepsilon_v = 0,000015$  e de distorção  $d\varepsilon_s = 0,00001$ .

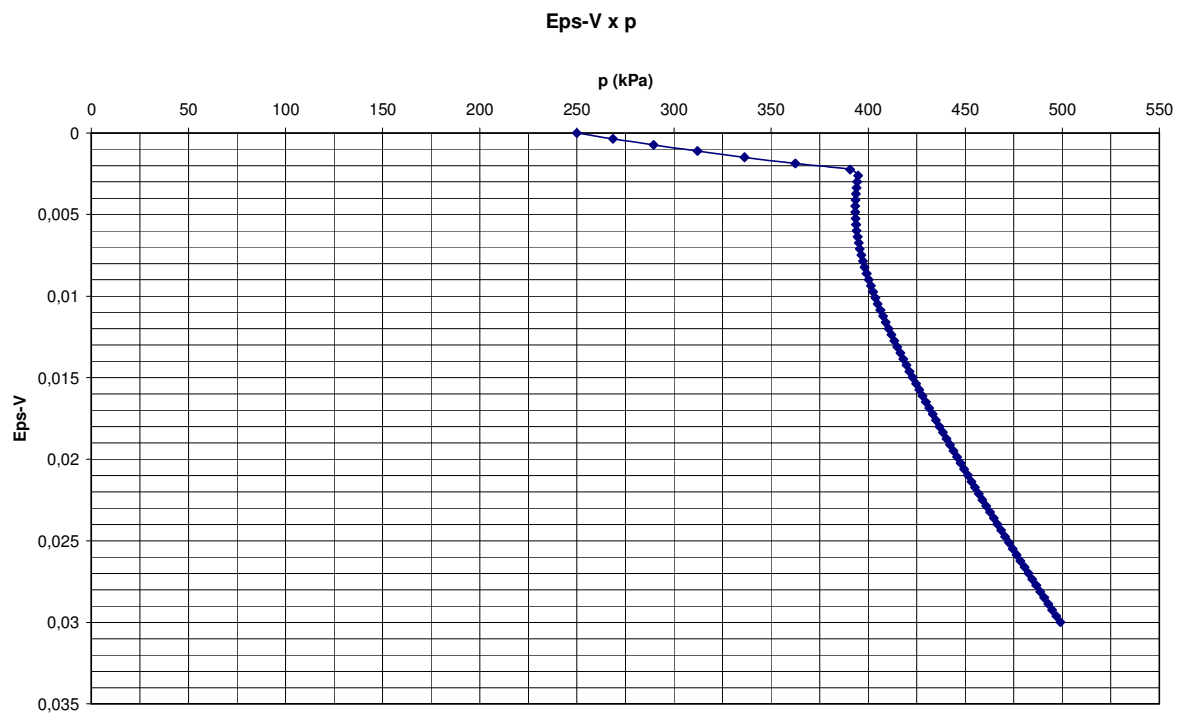
**Figura 3.22. MCC hiperplástico sem dano e tensão de escoamento não-constante.**

**Simulação de carregamento sob estado de compressão confinada – caso de endurecimento, (a) trajetória  $p \times q$  (b)  $\varepsilon_v \times p$  e (c)  $\varepsilon_v \times \log p$**

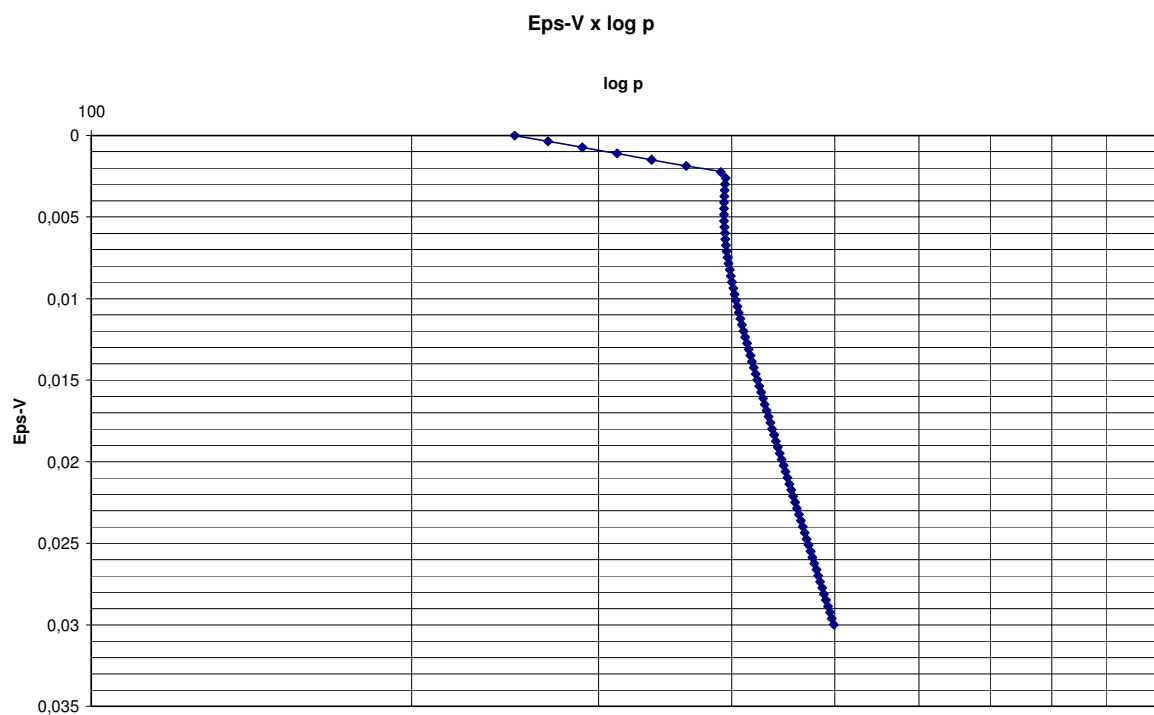
q x p (Compressão confinada - p0 = 250 kPa, py0 = 410 kPa)



(a)



(b)



(c)

A Figura 3.22(c) mostra comportamento semelhante ao de curva de ensaio de adensamento (oedométrico). O trecho elástico corresponde ao trecho de recompressão e a reta seguinte corresponde à reta virgem, de compressão no trecho elasto-plástico.

### 3.4.5. Carregamento de compressão não-drenada ( $\epsilon_v = 0$ )

#### *Caso de endurecimento*

O carregamento sob condição de compressão não-drenada, para material hiperplástico sem dano, com endurecimento, pode ser representado pelo uso das equações do item anterior, modificando-se a condição definida por (3.47–rep.), de compressão confinada. Carregamento de compressão não-drenada é processo controlado por condição de deformação, isto é, de deformação volumétrica nula. Tal pode ser simulado pela imposição de acréscimos de deformação:

$$\dot{\epsilon}_v = 0 \quad (3.106)$$

$$\dot{\epsilon}_s = \delta \quad (3.107)$$

A imposição destes incrementos de deformação permite determinar o fator de multiplicação  $\lambda = \lambda(\dot{\epsilon}_v, \dot{\epsilon}_s)$ , por meio de (3.59 – rep.) e os incrementos das variáveis internas de plasticidade, por meio de (3.7) e (3.9). Os incrementos de tensão ( $dp, dq$ ), por sua vez, são determinados pelo sistema de equações (3.106).

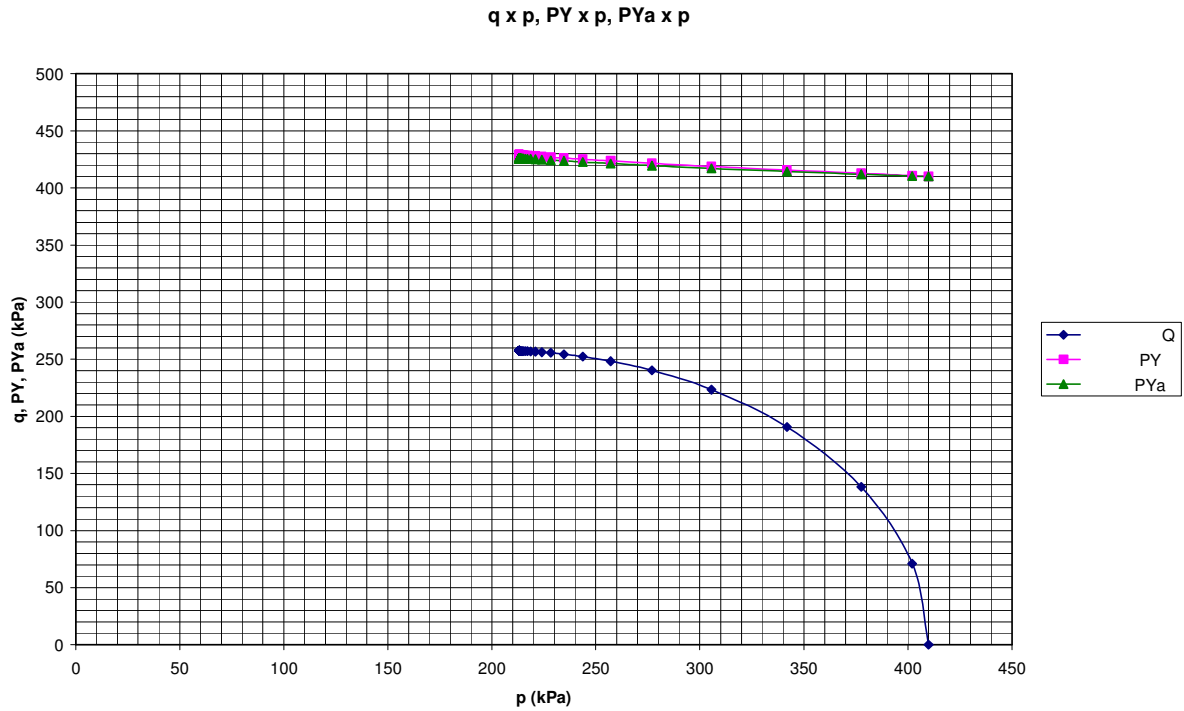
Na Figura 3.23 estão representados os resultados de simulação de carregamento de compressão não-drenada, para material com endurecimento e parâmetros:  $k^* = 0,005$ ,  $\lambda^* = 0,090$ ,  $G = 20000$  kPa,  $p_{y0} = 410$  kPa,  $M = 1,2$ , e  $p_0 = 205$  kPa. O material é normalmente adensado, com ponto inicial de carregamento com coordenadas  $p_{ini} = p_{y0} = 410$  kPa e  $q_{ini} = 0$  kPa. A Tabela A.6, do Anexo 2, resume os resultados obtidos com o uso das expressões citadas e com incremento de deformação de distorção  $\delta = 0,00005$ .

Estes resultados são semelhantes aos obtidos por Einav et al (2007), apresentados na Figura 3.24.

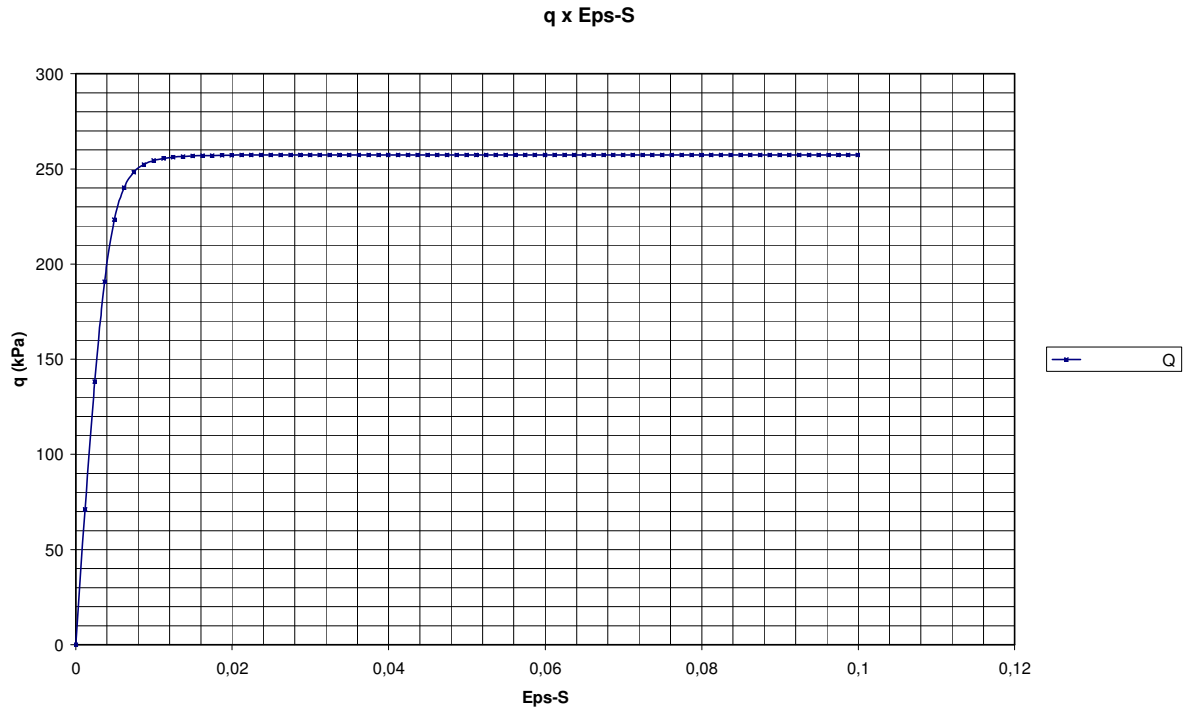
Na Figura 3.23(a)  $PY$  corresponde à tensão de escoamento para ponto sobre elipse de escoamento, calculada a partir dos incrementos de tensão ( $dp, dq$ ), acumulados a partir do ponto inicial de tensão de consolidação ( $p_{y0}, 0$ ) e  $PYa$  à tensão de escoamento calculada pela função de endurecimento  $Py(\alpha_p^v)$ , adiante repetida, que é função da deformação volumétrica plástica acumulada até o estado de tensão corrente. Tais valores devem ser coincidentes, se o processo de cálculo é convergente.

$$p_y(\alpha_p^v) = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v) \quad (3.58 - \text{rep.})$$

**Figura 3.23. MCC hiperplástico sem dano e tensão de escoamento não-constante.**  
**Simulação de carregamento sob estado de compressão não-drenada – caso de**  
**endurecimento, (a) trajetória  $p \times q$ ,  $p_y \times p$  e  $p_{ya} \times p$ , (b)  $q \times \epsilon_s$ .**



(a)

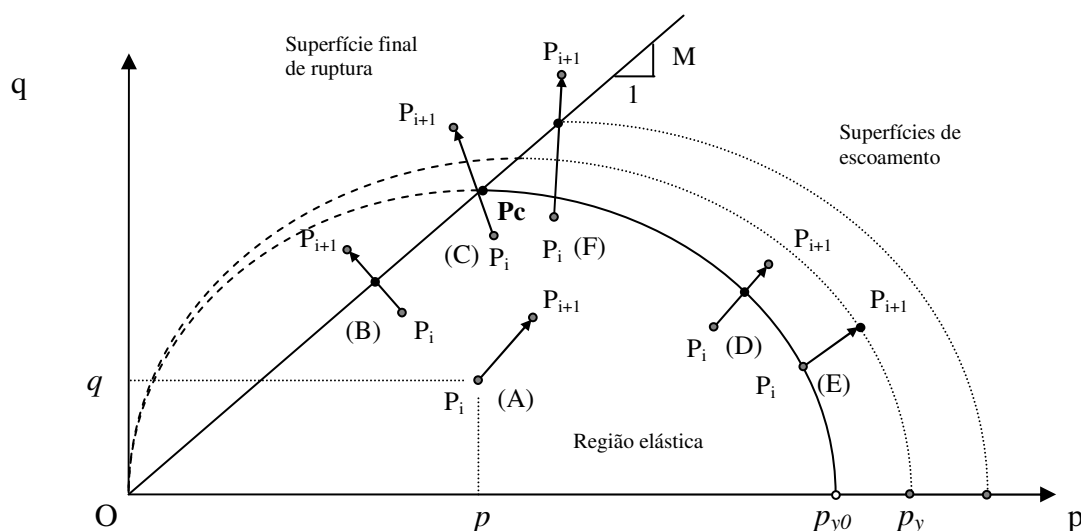


(b)

### 3.5. MODELO MCC HIPERPLÁSTICO COM DANO ACOPLADO

O algoritmo aplicado ao modelo em exame e descrito a seguir, permite representar as trajetórias de tensão (e deformação) dos ensaios triaxiais usuais de Mecânica dos Solos. Para a construção do mesmo partiu-se da consideração de um estado geral de tensão, representado pelo ponto  $P_i$  de coordenadas triaxiais  $(p_i, q_i)$ , ao qual é aplicado um incremento qualquer de tensões  $(dp, dq)$ . O novo ponto  $P_{i+1}$  pode cair dentro da região elástica, limitada pela superfície elíptica de escoamento e pela reta limite de ruptura, sobre as superfícies limites, ou mesmo, ultrapassar as superfícies limites de escoamento e de ruptura. A Figura 3.24 ilustra as situações indicadas.

**Figura 3.24. MCC hiperplástico com dano acoplado – casos de incremento de tensão.**



A situação do ponto (A) representa incremento de tensão situado dentro de região de comportamento elástico. Os incrementos de deformação correspondentes são também elásticos. O ponto (B) indica situação em que o incremento de tensão viola a superfície de ruptura. Neste caso o incremento de tensão é limitado a um acréscimo correspondente à intersecção da reta definida pelo incremento de tensão com a reta da superfície limite de ruptura. Os incrementos de deformação correspondentes são elásticos, e a manutenção do estado de tensão, sobre a superfície de ruptura, produz incrementos contínuos de deformação plástica volumétrica de expansão e de distorção. O ponto (C) representa situação em que o incremento de tensão intercepta ponto crítico. Neste caso os incrementos de deformação

correspondentes ao incremento de tensão até o ponto crítico, são elásticos, e a manutenção do estado de tensão, sobre o ponto crítico, ocorre com incrementos contínuos de deformação plástica de distorção e nulos de deformação volumétrica. A incidência sobre o ponto crítico é aceita dentro de uma tolerância de erro, de forma a melhorar condição de convergência para o ponto crítico. O ponto (D) reflete situação de ponto inicial na região elástica, que atinge ponto além da superfície de escoamento. Neste caso é determinado ponto de intersecção da reta de incremento de tensão com a elipse de escoamento. Os incrementos de deformação são elásticos e correspondem ao incremento de tensão até o ponto de intersecção. O ponto (E) se refere a estado inicial representado por ponto sobre superfície de escoamento, e incremento de tensão que produz endurecimento. Neste caso é determinada nova tensão de escoamento, correspondente à elipse passante pelo ponto  $P_{i+1}$ , e são determinados incrementos de deformação elasto-plásticos. Finalmente, para o ponto (F), que representa ponto de tensão atingido além da superfície de ruptura, e com ponto de intersecção, da reta correspondente ao incremento de tensão com a superfície de ruptura, situado acima do ponto crítico, é gerado *novo ponto crítico*. É determinada nova tensão de escoamento correspondente ao endurecimento até o *novo ponto crítico*. Os incrementos de deformação correspondentes são elasto-plásticos e a manutenção do estado de tensão produz incrementos contínuos de deformação plástica de distorção e nulos de deformação volumétrica.

A possibilidade de amolecimento envolve uma consideração adicional referida à frente.

### ***Algoritmo de tensão controlada***

As condições e equações utilizadas no algoritmo são as seguintes. Novo ponto de tensão  $P_{i+1}$  é buscado por tentativa, a partir de ponto inicial  $P_i$ , por meio das coordenadas:

$$p_{i+1} = p_i + dp_i \quad (3.109)$$

$$q_{i+1} = q_i + dq_i \quad (3.110)$$

Se o aumento de tensão é elástico, e, portanto, não ultrapassa nenhuma das superfícies limites de escoamento (elipse de escoamento) e de ruptura (reta limite), isto é:

$$\left(p_{(i+1)} - p_y\right)^2 + \left(\frac{q_{i+1}}{M}\right)^2 - \left(\frac{p_y}{2}\right)^2 \leq 0 \quad (3.111)$$

$$e: \quad q_{i+1} \leq M \cdot p_{i+1} \quad (3.112)$$

os incrementos de deformação serão elásticos e dados por:

$$\dot{\epsilon}_v = \bar{\kappa}^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) \quad (3.24 - \text{rep.})$$

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G} \quad (3.25 - \text{rep.})$$

Quando é ultrapassada a superfície de escoamento, caso do ponto (D) na Figura 3.23, e são atendidas as condições:

$$p_{y(i+1)} = \frac{(p_{(i+1)})^2 + \left( \frac{q_{i+1}}{M} \right)^2}{p_{(i+1)}} > p_{y(i)} \quad (3.113)$$

$$q_{i+1} \leq M \cdot p_{i+1} \quad (3.112 - \text{rep.})$$

determina-se o ponto de intersecção  $P_{int}$  entre a reta do incremento de tensão e a superfície de escoamento correspondente a  $p_{y(i)}$ , com coordenadas  $(p_{int}, q_{int})$ . O acréscimo de tensão elástico, para o incremento  $(i + 1)$  é determinado então como:

$$dp_i = p_{int} - p_i \quad (3.111)$$

$$dq_i = q_{int} - q_i \quad (3.112)$$

e os incrementos de deformação elástica são determinados pelas expressões (3.24) e (3.25).

Para incremento de tensão  $(dp, dq)$ , com ponto inicial sobre superfície de escoamento elíptica, caso do ponto (E) na Figura 3.23, os incrementos totais de deformação volumétrica e de distorção são dados pelas expressões gerais:

$$\dot{\epsilon}_v = \kappa^* \cdot \left[ \frac{\dot{\alpha}_d^v}{(1 - \alpha_d^v)^2} \log \left( \frac{p}{p_0} \right) + \frac{1}{(1 - \alpha_d^v)} \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) \right] + \dot{\alpha}_p^v \quad (3.1 - \text{rep.})$$

$$e: \quad \dot{\epsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G(1 - \alpha_d^s)} + \frac{q \cdot \dot{\alpha}_d^s}{3G(1 - \alpha_d^s)^2} + \dot{\alpha}_p^s \quad (3.2 - \text{rep.})$$

onde:

$$\dot{\alpha}_p^v = \lambda \cdot 2 \cdot \left( \frac{p - p_y / 2}{r_p^2} \right) \quad (3.7 - \text{rep.})$$

$$\dot{\alpha}_d^v = \lambda.2. \frac{\left(p - \frac{p_y}{2}\right)}{r_d^2 \cdot \left(\frac{\kappa^*}{(1 - \alpha_d^v)^2} \cdot \left[\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right]\right)} \quad (3.8 - \text{rep.})$$

$$\dot{\alpha}_p^s = \lambda.2. \frac{q}{(r_p M)^2} \quad (3.9 - \text{rep.})$$

$$\dot{\alpha}_d^s = \lambda.2. \frac{6G(1 - \alpha_d^s)^2}{(r_d M)^2} \quad (3.10 - \text{rep.})$$

A função de endurecimento, ou amolecimento, é usada com expressão geral:

$$p_y(\alpha_p^v, \alpha_d^v, \alpha_d^s) = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v) \cdot \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)} \quad (2.214 - \text{rep.})$$

E o fator multiplicador é representado pela expressão geral:

$$\lambda = \frac{\left(p - \frac{p_y}{2}\right) \cdot \frac{p}{\bar{\kappa}^*} \cdot \dot{\epsilon}_v + 3\bar{G} \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\epsilon}_s}{\left\{ 2 \cdot \left(p - \frac{p_y}{2}\right)^2 \cdot \frac{p}{\bar{\kappa}^*} \cdot \left[ \frac{1}{r_p^2} + \frac{\log\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\left(\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right)} \cdot \frac{1}{r_d^2} \right] + \frac{6\bar{G}}{M^2} \cdot q \cdot \left[ \frac{q}{(r_p M)^2} + \frac{2q}{(r_d M)^2} \right] + \right. \\ \left. p \cdot p_{y0} \cdot \left[ \frac{\Pi(\alpha_p^v)}{2} \cdot \frac{\Gamma'(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}{\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}} \cdot \frac{(p - p_y / 2)}{r_p^2 \frac{\kappa^*}{(1 - \alpha_d^v)^2} \cdot \left(\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right)} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\Pi(\alpha_p^v)}{2} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma'(\alpha_d^s)}{\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}} \cdot \frac{6G(1 - \alpha_d^s)^2}{r_d^2 \cdot M^2} \right] \right\}} \quad (3.20 - \text{rep.})$$

$$\text{Onde: } \bar{G} = G(1 - \alpha_d^s). \quad (2.208 - \text{rep.})$$

$$\text{e: } \bar{\kappa}^* = \kappa^* / (1 - \alpha_d^v). \quad (2.209 - \text{rep.})$$



Por meio de procedimento similar ao empregado no item 3.4.4, substituindo em (3.1) e (3.2) as expressões dos incrementos das variáveis internas, obtém-se:

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{\kappa^*}{(1-\alpha_d^v)} \left( \frac{\dot{p}}{p} \right) + \lambda \cdot 2 \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \left[ \frac{1}{r_d^2} \cdot \frac{\log\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\left[ \log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1 \right]} + \frac{1}{r_p^2} \right] \quad (3.21 - \text{rep.})$$

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G(1-\alpha_d^s)} + \lambda \cdot \frac{2q}{M^2} \cdot \left[ \frac{2}{r_d^2} + \frac{1}{r_p^2} \right] \quad (3.22 - \text{rep.})$$

Colocando o fator de multiplicação como:

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{D}} \cdot \left[ \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\bar{\kappa}^*} \cdot \dot{\epsilon}_v + 3\bar{G} \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\epsilon}_s \right] \quad (3.116)$$

onde:  $\mathbf{D}$  = denominador da expressão do fator multiplicador  $\lambda$ , reproduzida na página anterior, como expressão (3.20). O denominador  $\mathbf{D}$  tem valor dependente: do estado corrente de tensão ( $p$ ,  $q$ ), da tensão de consolidação inicial  $p_0$ , da tensão de escoamento corrente  $p_y$ , e das variáveis internas acumuladas até o instante considerado.

Substituindo (3.116) em (3.21) e (3.22) e separando os termos obtém-se o seguinte sistema de equações lineares, relacionando incrementos totais de deformação e incrementos de tensão:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_v \\ \dot{\epsilon}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \quad (3.117)$$

onde:

$$A_{11} = \frac{p}{\bar{\kappa}^*} \left\{ 1 - \frac{2}{\mathbf{D}} \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 \frac{p}{\bar{\kappa}^*} \left[ \frac{1}{r_d^2} \cdot \frac{\log\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\left[ \log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1 \right]} + \frac{1}{r_p^2} \right] \right\} \quad (3.118)$$

$$A_{12} = -\frac{6\bar{G}}{\mathbf{D}} \frac{p}{\bar{\kappa}^*} \frac{q}{M^2} \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \left[ \frac{1}{r_d^2} \cdot \frac{\log\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\left[ \log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1 \right]} + \frac{1}{r_p^2} \right] \quad (3.119)$$

$$A_{21} = -\frac{6\bar{G}}{\mathbf{D}} \frac{p}{\bar{K}^*} \frac{q}{M^2} \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \left[ \frac{1}{r_d^2} + 1 \right] \quad (3.120)$$

$$A_{22} = 3\bar{G} \left[ 1 - \frac{6\bar{G}}{\mathbf{D}} \frac{q^2}{M^4} \left( \frac{1}{r_d^2} + 1 \right) \right] \quad (3.121)$$

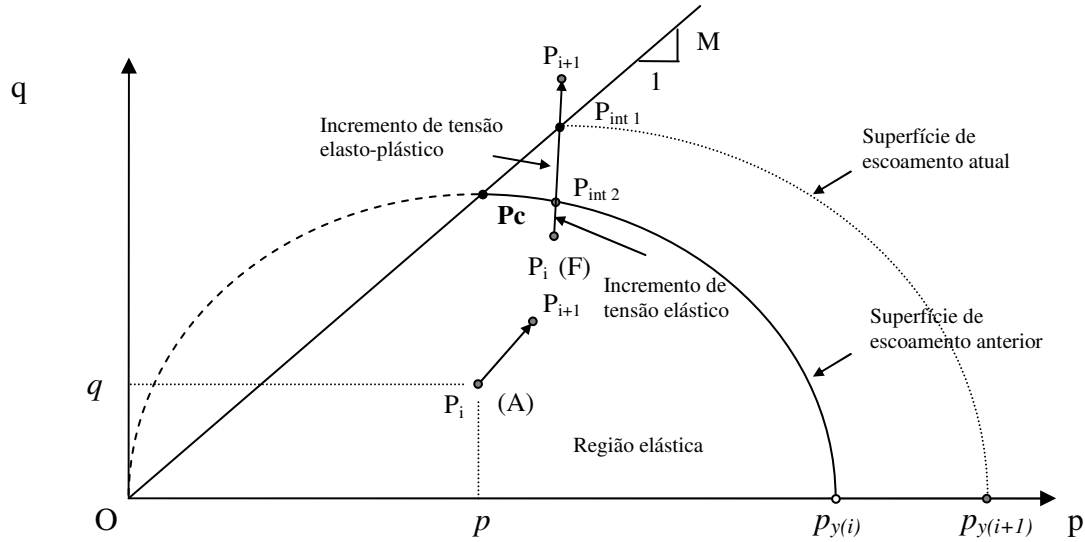
Os coeficientes do sistema de equações de (3.117), dados pelas expressões (3.118) a (3.120) dependem do estado de tensão  $(p_i, q_i)$ , da tensão de escoamento  $PY_i$  corrente, e das variáveis internas acumuladas:  $\alpha_p^v, \alpha_p^s, \alpha_d^v$  e  $\alpha_d^s$ , até o ponto anterior  $P_i$ .

Para o caso do ponto (F), reproduzido na Figura 3.25, em que o acréscimo de tensão atinge ponto além da superfície limite de ruptura e à direita do ponto crítico atual, novo ponto crítico é estabelecido sobre a superfície limite de ruptura, e o correspondente incremento de tensão é definido pelas equações:

$$dp_i = p_{int} - p_i \quad (3.114 - \text{rep.})$$

$$dq_i = q_{int} - q_i \quad (3.115 - \text{rep.})$$

**Figura 3.25. MCC hiperplástico com dano acoplado – casos de incremento de tensão.**

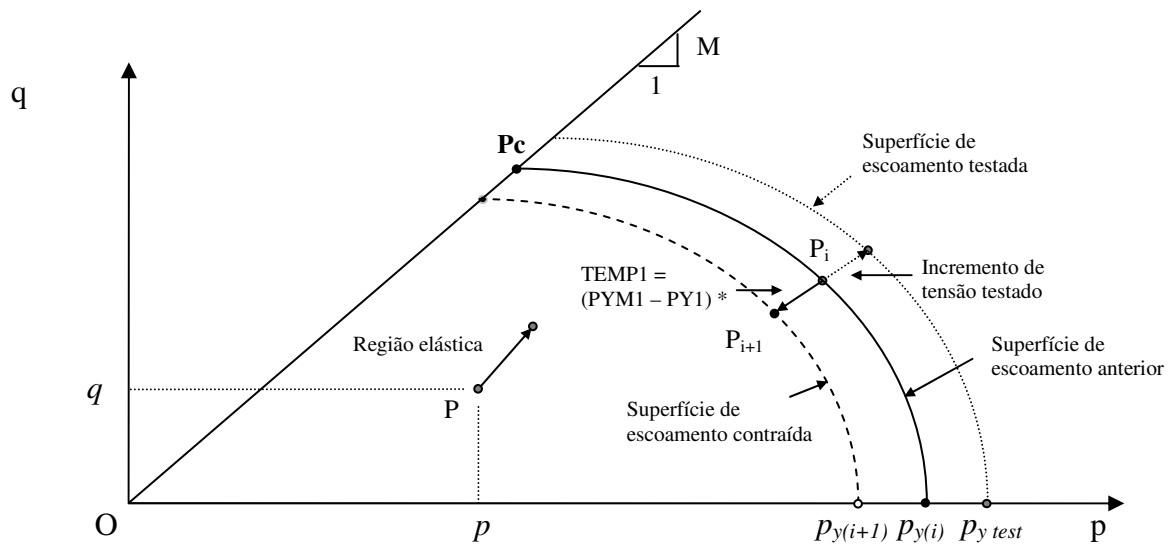


Tal incremento de tensão é separado em parcela elástica e parcela plástica. Ocorrerá incremento puramente elástico, caso o ponto inicial  $P_i$  esteja no interior da região elástica. A parcela elástica será definida pelo incremento do ponto  $P_i$  até a intersecção com a superfície de escoamento anterior, ponto  $P_{int 2}$  na Figura 3.25. O incremento de tensão elasto-plástico

será determinado pelo segmento entre os pontos de intersecção sobre a superfície de escoamento atual, ponto  $P_{int\ 1}$ , e sobre a anterior, ponto  $P_{int\ 2}$ .

No programa, uma vez atingida a superfície de escoamento, é tentado incremento de tensão ( $dp$ ,  $dq$ ), de avanço além da superfície anterior de escoamento. A ocorrência de endurecimento ou amolecimento é definida por meio do fator multiplicador  $\lambda$ . Se este resulta positivo ocorre plastificação com endurecimento. Se, por outro lado,  $\lambda$  resulta negativo indica ocorrência de amolecimento e impossibilidade de aumento da tensão de escoamento hidrostática  $P_{Y\ (i+1)}$ . No programa, para simular a contração da superfície de escoamento, novo fator multiplicador  $\lambda$  é calculado com inversão do incremento de tensão. E novo valor de tensão de escoamento, correspondente ao estado final das variáveis internas é calculado. A Figura 3.26 mostra o que ocorre com a retração da superfície de escoamento.

**Figura 3.26. MCC hiperplástico com dano acoplado – caso de amolecimento.**



A consideração de proporção entre plastificação e dano para um modelo em particular é determinada por meio das variáveis de distribuição  $r_p$  e  $r_d$ . Estas variáveis estão relacionadas entre si por meio da equação:

$$\frac{1}{r_p^2} + \frac{1}{r_d^2} = 1 \quad (2.168 - \text{rep.})$$

Estas variáveis têm domínio ( $1 \leq r_p < \infty$ ) e ( $1 \leq r_d < \infty$ ) e variação em sentido inverso.

Caso onde  $r_p = 1$  e  $r_d \rightarrow \infty$  representa condição de modelo hiperplástico sem dano. O efeito de dano é zerado e as variáveis internas de dano permanecem sempre nulas e, por conseguinte, também é nula a influência do dano sobre a função de escoamento  $p_y(\alpha_p^v, \alpha_d^v, \alpha_d^s) = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v) \cdot \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}$ , que pode ser reescrita como:

$$p_y(\alpha_p^v) = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v) \quad (3.58 - \text{rep.})$$

Caso onde  $r_p \rightarrow \infty$  e  $r_d = 1$  representa condição de modelo hiperelástico com dano. O efeito de plastificação é zerado e as variáveis internas de plastificação permanecem sempre nulas e, por conseguinte, também é nula a influência da plastificação sobre a função de escoamento  $p_y(\alpha_p^v, \alpha_d^v, \alpha_d^s) = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v) \cdot \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}$ , que pode agora ser reescrita como:

$$p_y(\alpha_d^v, \alpha_d^s) = p_{y0} \cdot \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)} \quad (3.34 - \text{rep.})$$

Casos intermediários de  $r_p$  e  $r_d$ , atendendo á condição (2.168), permitem definir modelos hiperplásticos com dano acoplado, com variação contínua entre os modelos hiperplásticos sem dano até os hiperelásticos com dano.

### ***Algoritmo de deformação controlada***

Para simular ensaios de compressão não-drenada e de compressão confinada (ensaio oedométrico) foi desenvolvido programa capaz de representar trajetórias de deformação controlada. Para simular solicitação de compressão não-drenada devem-se impor incrementos de deformação volumétrica nulos e de distorção diferentes de zero. E para simular ensaio de compressão confinada devem-se impor incrementos de deformação volumétrica e de distorção com relação entre si igual a  $d\varepsilon_v = 1,5 \times d\varepsilon_s$ . O fluxograma do Anexo 3(b) mostra o esquema utilizado para a determinação das curvas tensão-deformação.

Sendo impostos os incrementos de deformação, os incrementos de tensão correspondentes serão elásticos enquanto a tensão de escoamento isotrópica, correspondente à elipse passante pelo ponto de coordenadas  $(p, q)$  for menor ou igual a  $p_{y0}$ . Uma vez atingida a tensão de escoamento, aplicado novo incremento de deformação, produz comportamento

elasto-plástico. Os incrementos de tensão podem ser obtidos das equações (3.117), ou alternativamente, por meio de inversão das equações (3.21) e (3.22), adiante reescritas:

$$\dot{p} = \frac{p \cdot (1 - \alpha_d^v)}{\kappa^*} \cdot \left\{ \dot{\epsilon}_v - \lambda \cdot 2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \left[ \frac{1}{r_d^2} \cdot \frac{\log\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\left[ \log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1 \right]} + \frac{1}{r_p^2} \right] \right\} \quad (3.21 - \text{inv.})$$

$$\dot{q} = 3G(1 - \alpha_d^s) \cdot \left\{ \dot{\epsilon}_s - \lambda \cdot \frac{2q}{M^2} \cdot \left[ \frac{2}{r_d^2} + \frac{1}{r_p^2} \right] \right\} \quad (3.22 - \text{inv.})$$

Nestas equações invertidas os parâmetros elásticos foram transcritos de forma desenvolvida como:  $\bar{\kappa}^* = \kappa^* / (1 - \alpha_d^v)$  e  $\bar{G} = G \cdot (1 - \alpha_d^s)$ .

No programa foram utilizadas as duas formas de cálculo, por meio do sistema de equações (3.117) e por meio das equações (3.21 – inv.) e (3.22 – inv.). Observou-se diferença de valores no terceiro dígito significativo, para os valores calculados de tensões em kPa. Considera-se que o uso das expressões (3.21– inv.) e (3.22–inv.) propiciem melhor resultado por envolverem menor número de operações de arredondamento.

Nas simulações feitas, apresentadas à frente, geralmente foram utilizados incrementos de tensão  $dp = 0,05$  kPa e  $dq = 0,15$  kPa. Foram feitos alguns testes com incrementos de tensão  $dp = 0,02$  kPa e  $dq = 0,06$  kPa. As diferenças observadas foram insignificantes, menores do que 0,01 Kpa, para os estados finais de tensão ( $p$ ,  $q$ ), em simulações que utilizaram até 10.000 ciclos de incrementos de tensão ou de deformação.

## 4. RESULTADOS

Apresenta-se na seqüência, na primeira parte deste capítulo, aplicação do modelo hiperplástico com dano acoplado para simulação de ensaios usuais de Mecânica de Solos. E na parte final deste capítulo aplicação é feita de ajuste do modelo a resultados de ensaios reais com solos residuais.

Foram desenvolvidas neste trabalho rotinas para simulação de ensaios sob tensão controlada e sob deformação controlada. As rotinas, cujos fluxogramas encontram-se no Anexo 4, foram feitas em Linguagem FORTRAN (Fortran PowerStation4.0). As ditas rotinas simulam de forma incremental as curvas de ensaios de Mecânica de Solos. Os programas calculam os incrementos de deformação  $d\varepsilon_v$  e  $d\varepsilon_s$ , correspondentes aos incrementos de tensão triaxial  $dp$  e  $dq$ , ou vice-versa, fixados os incrementos de deformação  $d\varepsilon_v$  e  $d\varepsilon_s$ , são obtidos os correspondentes incrementos de tensão  $dp$  e  $dq$ . O cálculo recai em simples solução de um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas (Equações 3.117). A cada incremento de tensão (ou deformação) é verificado o caso em que recai o dito acréscimo: incremento elástico, incremento que ultrapassa a superfície corrente de plastificação ou incremento que atinge a superfície final de ruptura, isto é, um ponto de estado crítico.

Para teste das rotinas de simulação de ensaios de tensão controlada e de deformação controlada, foram empregados valores semelhantes aos utilizados por Einav et al (2007), isto é: módulo de recompressão  $k^* = 0,005$ , módulo de compressão virgem  $\lambda^* = 0,090$ , módulo cisalhante  $G = 20.000$  kPa,  $p_{y0} = 400$  kPa e  $M = 1,2$ . Para as trajetórias de tensão de compressão triaxial convencional, de compressão sob tensão hidrostática constante e de extensão axial, foram determinadas as curvas de tensão-deformação, para quatro tensões hidrostáticas iniciais,  $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa. Foram também determinadas as curvas tensão-deformação para compressão não-drenada e compressão confinada (ensaio oedométrico). Para verificar a influência da proporção plasticidade / dano, definida pela relação entre os parâmetros  $r_p$  e  $r_d$ , que obedecem à equação (2.168), adiante repetida, foram consideradas três funções de pressão de escoamento hidrostáticas.

$$\frac{1}{r_p^2} + \frac{1}{r_d^2} = 1 \quad (2.168 - \text{rep.})$$

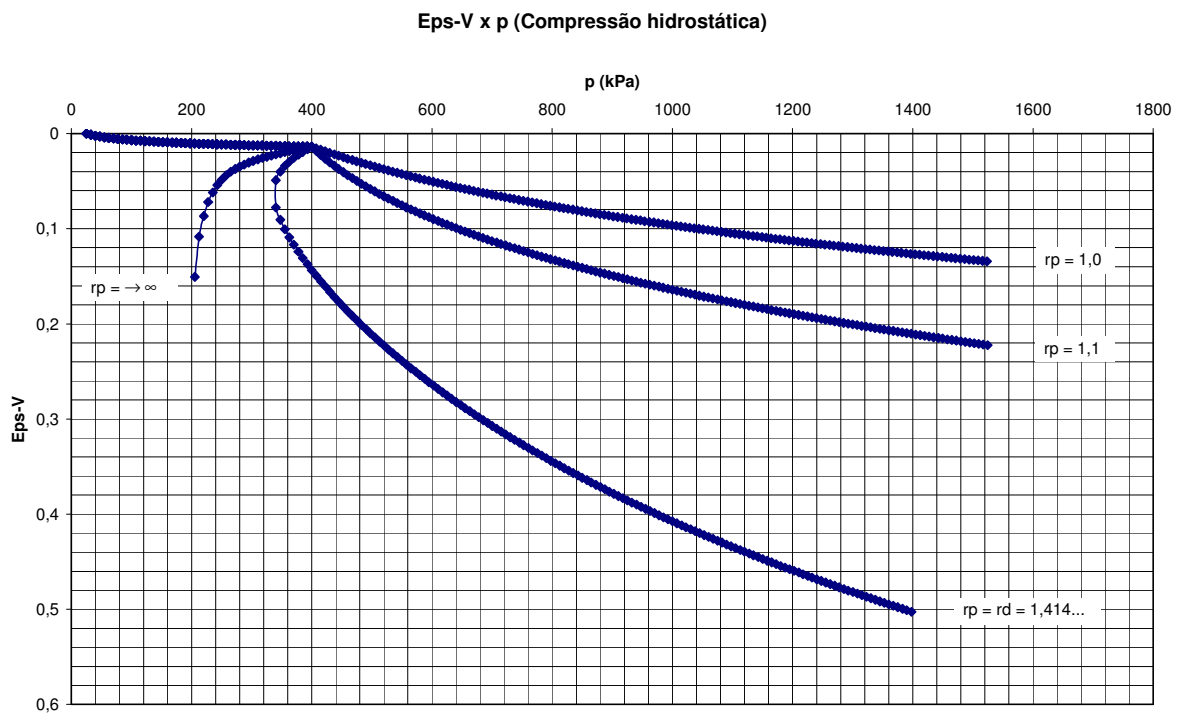
A expressão da função de escoamento tem forma geral:

$$p_y(\alpha_p^v, \alpha_d^v, \alpha_d^s) = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v) \cdot \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)} \quad (2.214 - \text{rep.})$$

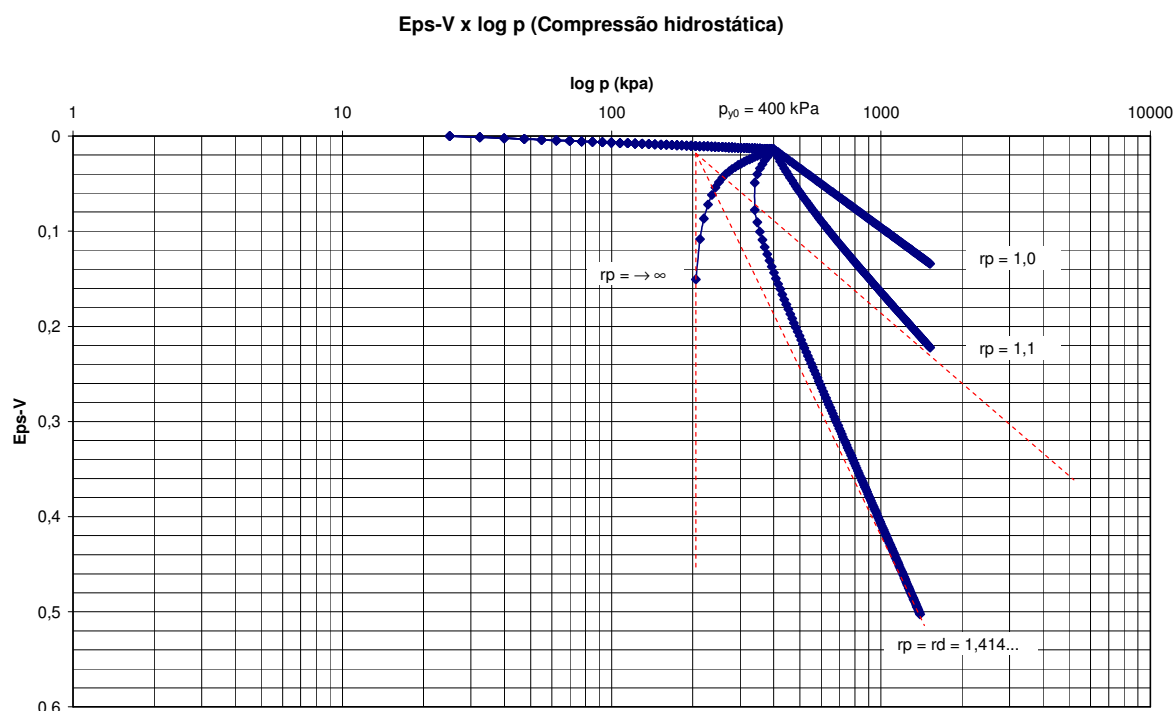
A Figura 4.1 ilustra as curvas de compressão hidrostática obtidas com o programa de tensão-controlada, para quatro valores de  $r_p$ , com a função de escoamento apresentada por Einav et al (2007). Para  $r_p = 1$  obtém-se a "curva", comumente observada em ensaios de adensamento, composta por trecho de recompressão e de compressão virgem. Para valores de  $r_p > 1$  ocorre dano, e todas as curvas passam a ter assíntota do trecho de compressão virgem convergente para a tensão  $p_y = p_{y0} \cdot d_{rem}$ . Nas simulações foram utilizados valores de tensão  $p_0 = 25$  kPa e de fator  $d_{rem} = 0,5$ . Ou seja, assumiu-se redução da tensão de pré-adensamento  $p_{y0}$  para metade do valor inicial, em função do crescimento do dano.

Nos gráficos apresentados à frente os pontos das curvas estão plotados a cada 50 ciclos de incrementos de tensão ou de deformação. Nos trechos finais das curvas, para melhor visualização do processo de convergência para condição de estado crítico, foram plotados pontos a cada ciclo de incremento de tensão ou de deformação.

**Figura 4.1. Funções de escoamento para MCC hiperplástico com dano (a)  $\epsilon_v \times p$  e (b)  $\epsilon_v \times \log_{10} p$ .**



(a)



(b)

As curvas indicadas nas Figuras 4.1(a) e (b) têm trecho de recompressão coincidente e trechos de compressão virgem distintos, caracterizados pelo parâmetro  $r_p$ .

## 4.1 SIMULAÇÃO DE ENSAIOS

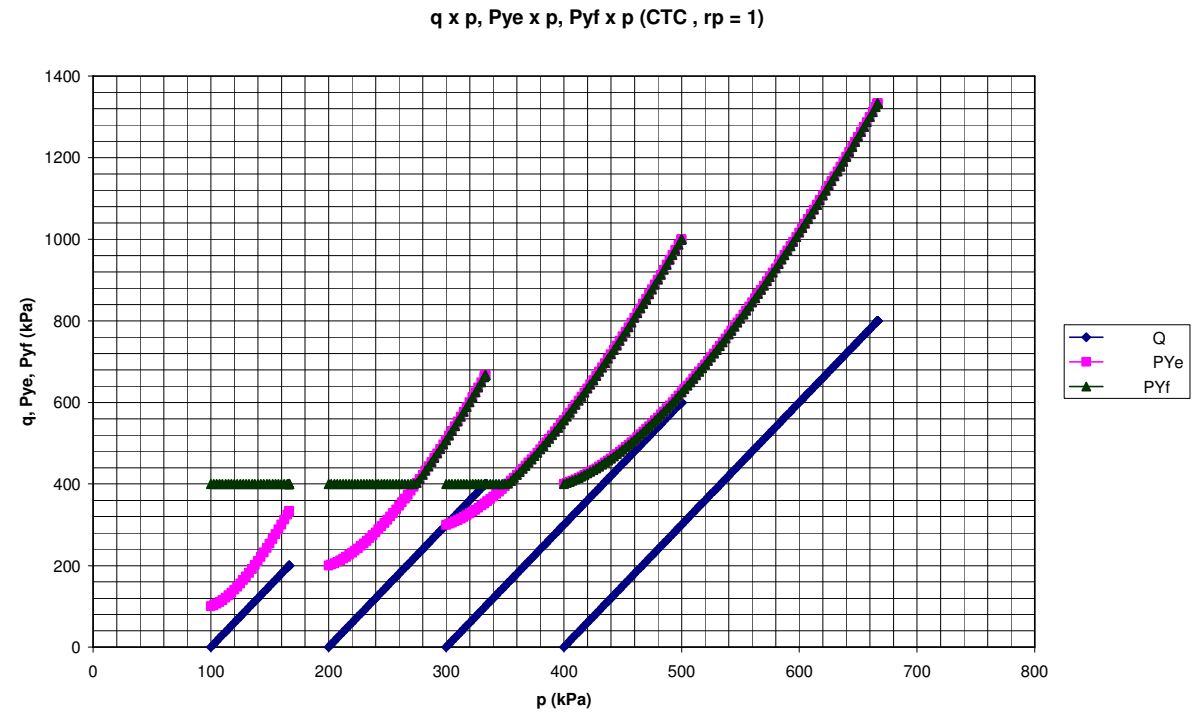
A utilização dos programas de tensão-controlada e de deformação controlada forneceu os dados para a construção dos diagramas adiante apresentados.

### 4.1.1. Simulação de Ensaio de Compressão Triaxial Convencional (CTC)

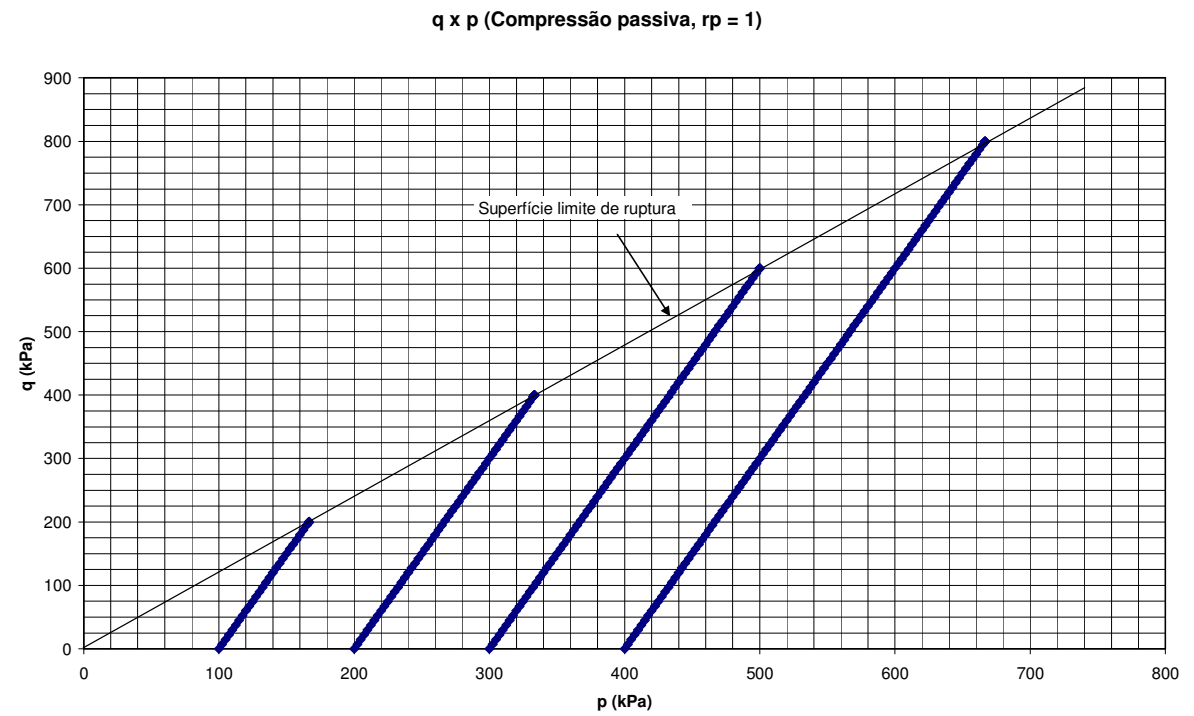
Nos ensaios CTC é mantida constante a tensão confinante ( $\sigma_c = \sigma_2 = \sigma_3$ ) e é aumentada a tensão vertical ( $\sigma_v = \sigma_1$ ). A Figura 4.2 mostra as trajetórias de ensaio e a variação da tensão de escoamento ao longo do cálculo. As tensões  $P_{ye}$  e  $P_{yf}$ , referem-se às tensões de escoamento correspondentes ao novo diâmetro maior da elipse após o incremento de tensão ( $dp$ ,  $dq$ ) e à tensão de escoamento calculada por (2.214) para os valores das variáveis internas acumuladas até o ponto, respectivamente.



Figura 4.2. Trajetórias de tensões para simulação de ensaios CTC, (a) Curvas múltiplas e (b) curva  $q \times p$  ( $r_p = 1$ ).

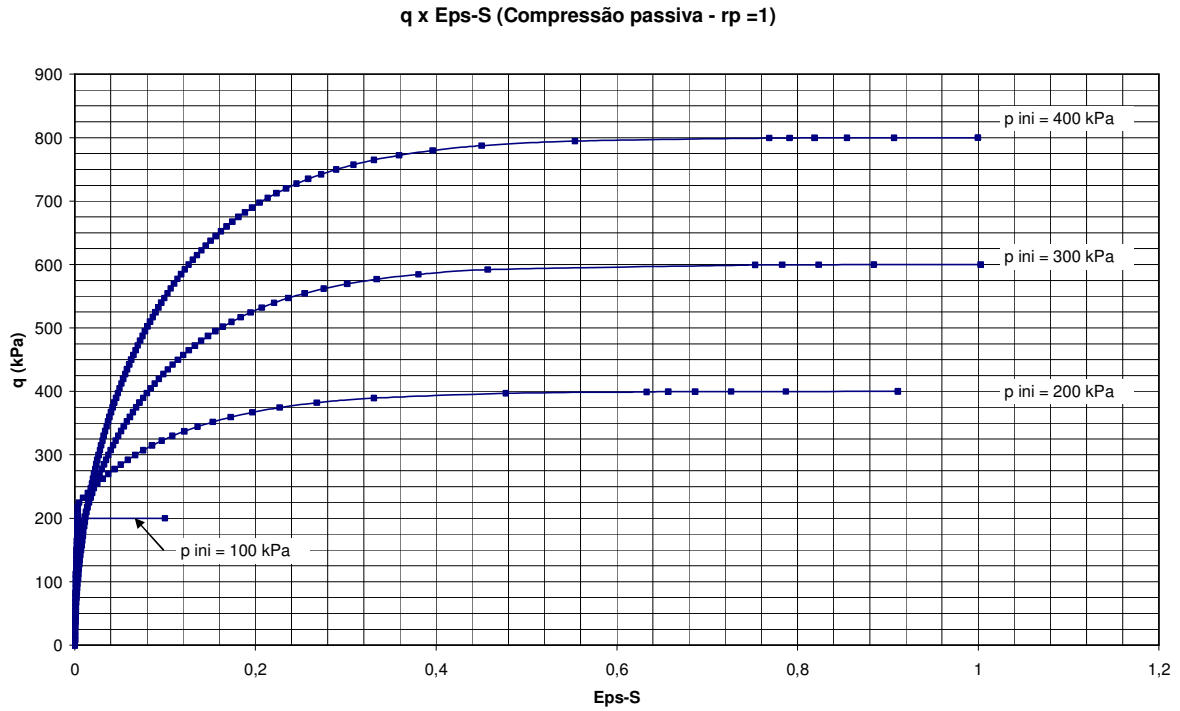


(a)

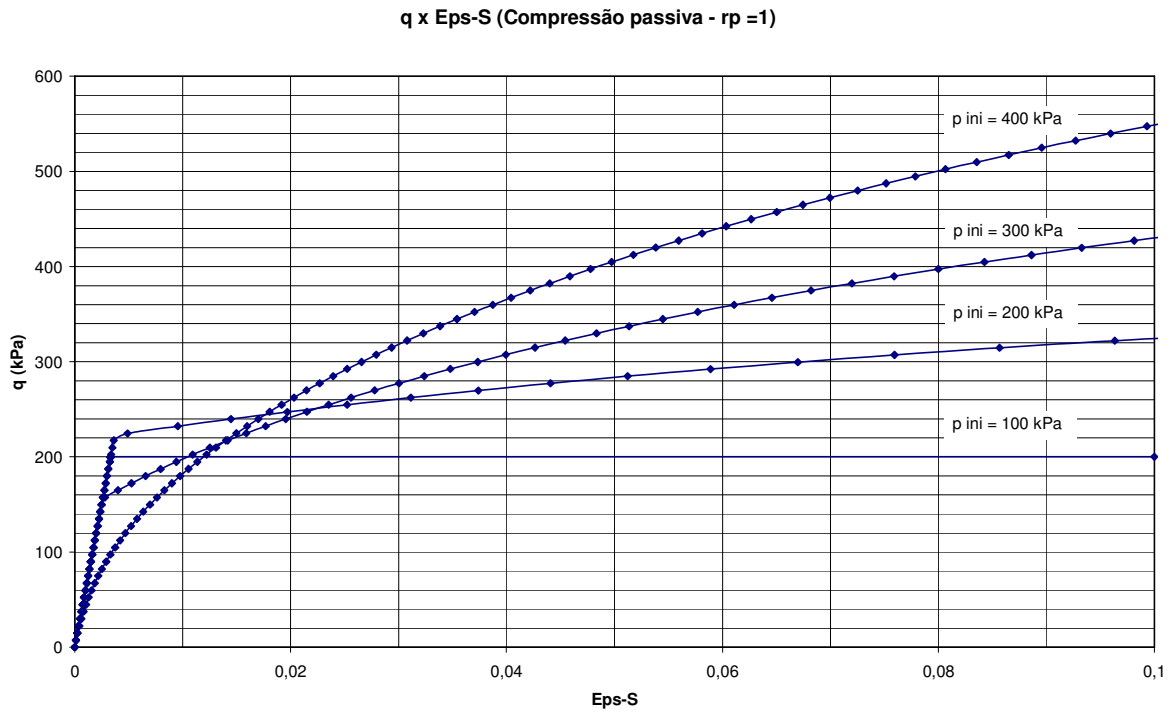


(b)

**Figura 4.3. Curvas tensão-deformação para simulação de ensaios CTC, (a) Curvas  $q \times \epsilon_s$  e (b) Curvas  $q \times \epsilon_s$ , para  $\epsilon_s$  limitado a 0,1, ou 10% ( $r_p = 1$ ).**

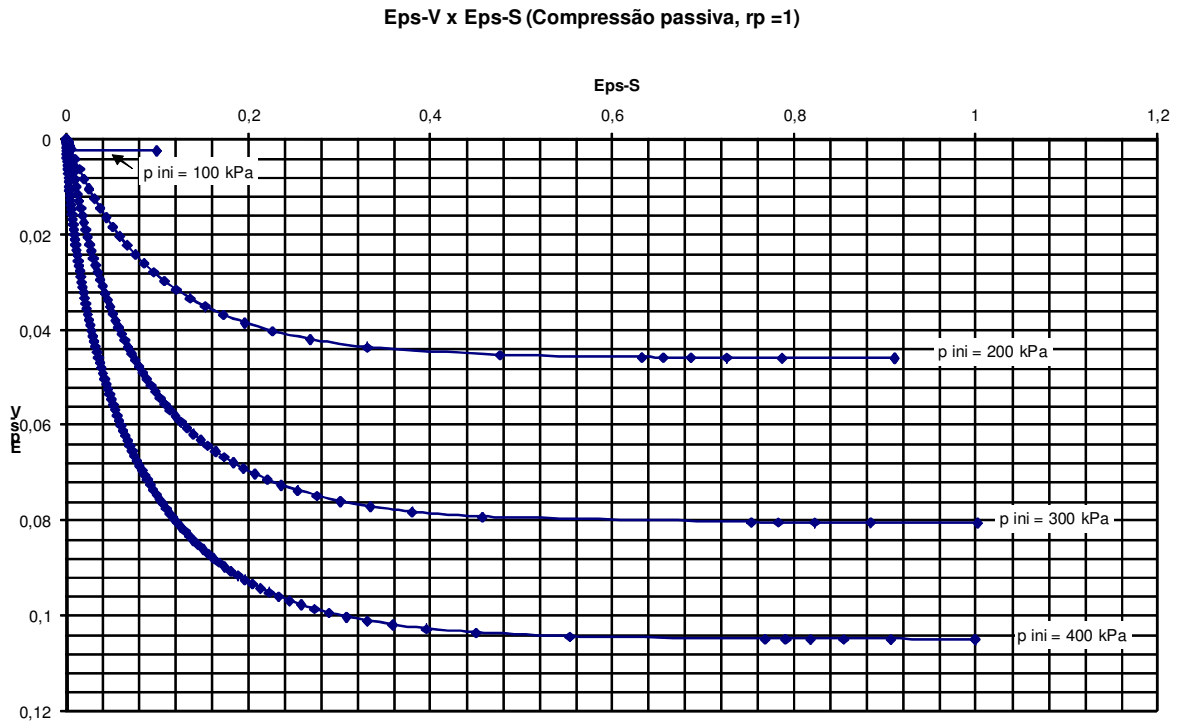


(a)

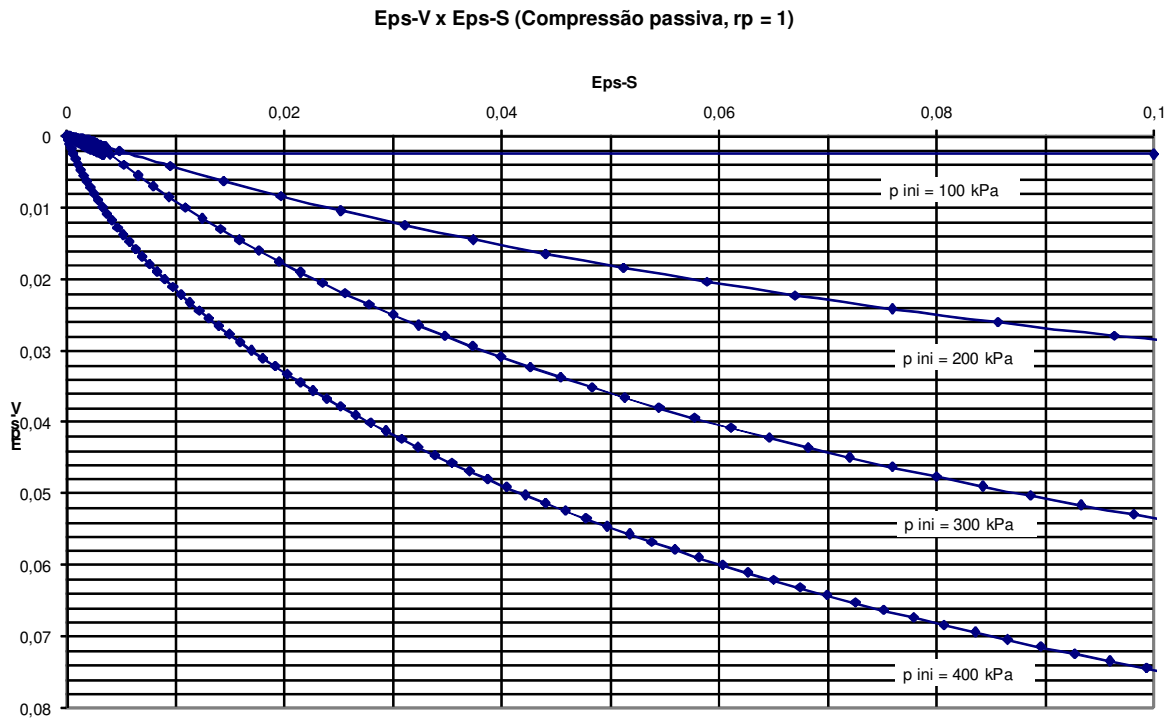


(b)

**Figura 4.4. Curvas  $\epsilon_v$  x  $\epsilon_s$ , para simulação de ensaios CTC, (a) Curvas para grandes deformações e (b) Curvas para  $\epsilon_s$ , limitado a 0,1, ou 10% ( $r_p = 1$ ).**

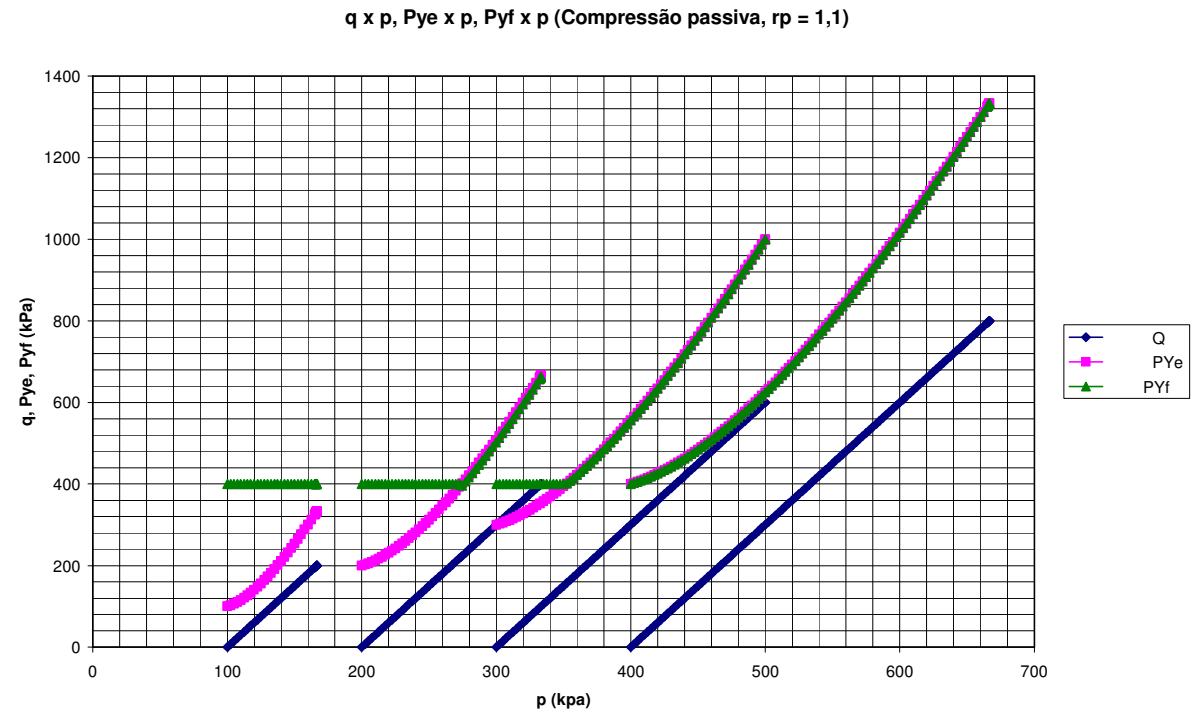


(a)

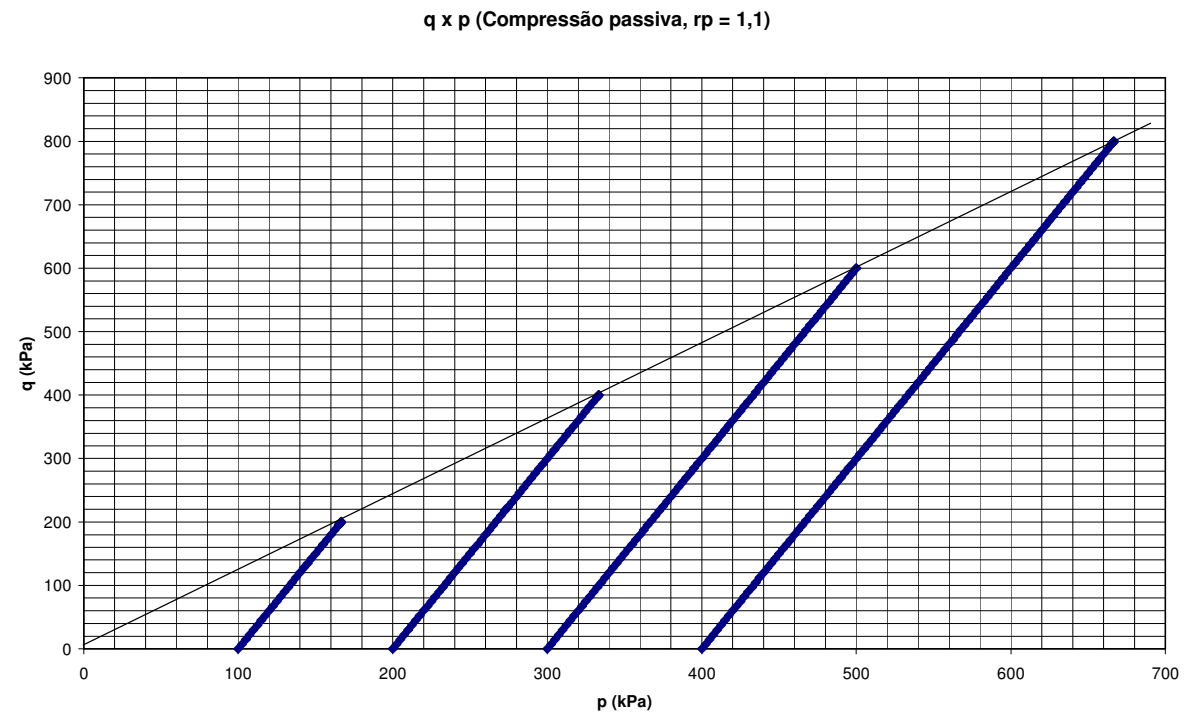


(b)

**Figura 4.5. Trajetórias de tensões para simulação de ensaios CTC, (a) Curvas múltiplas e (b) curva  $q \times p$  ( $r_p = 1,1$ ).**

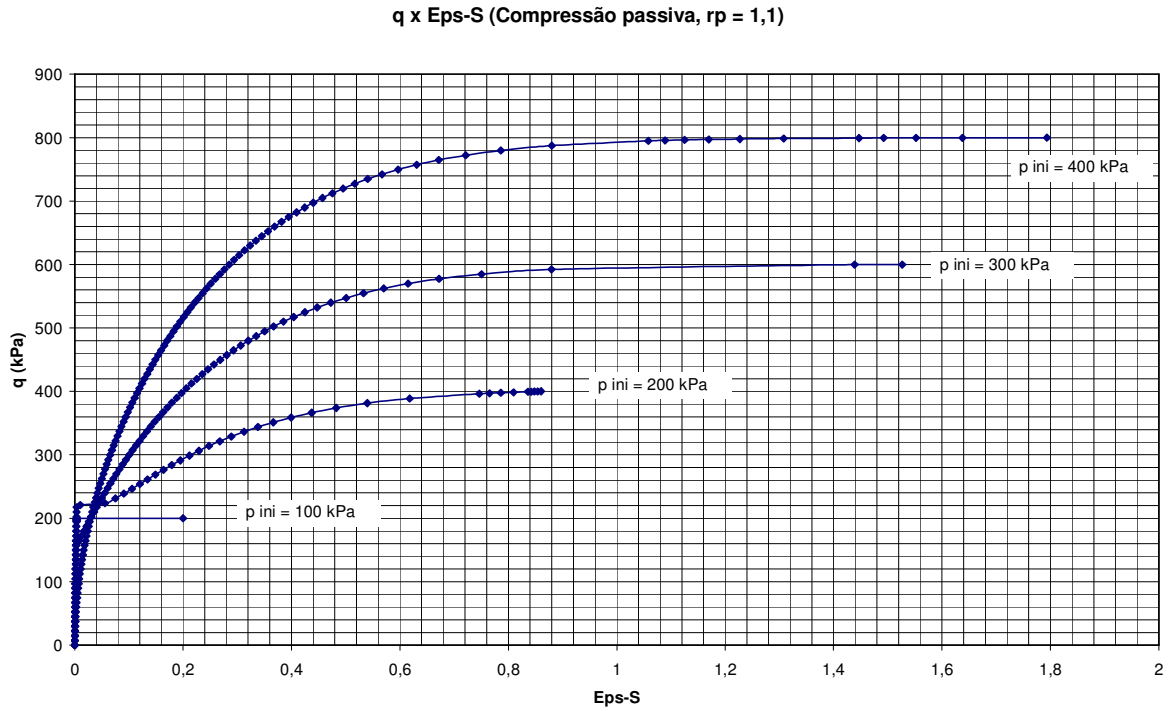


(a)

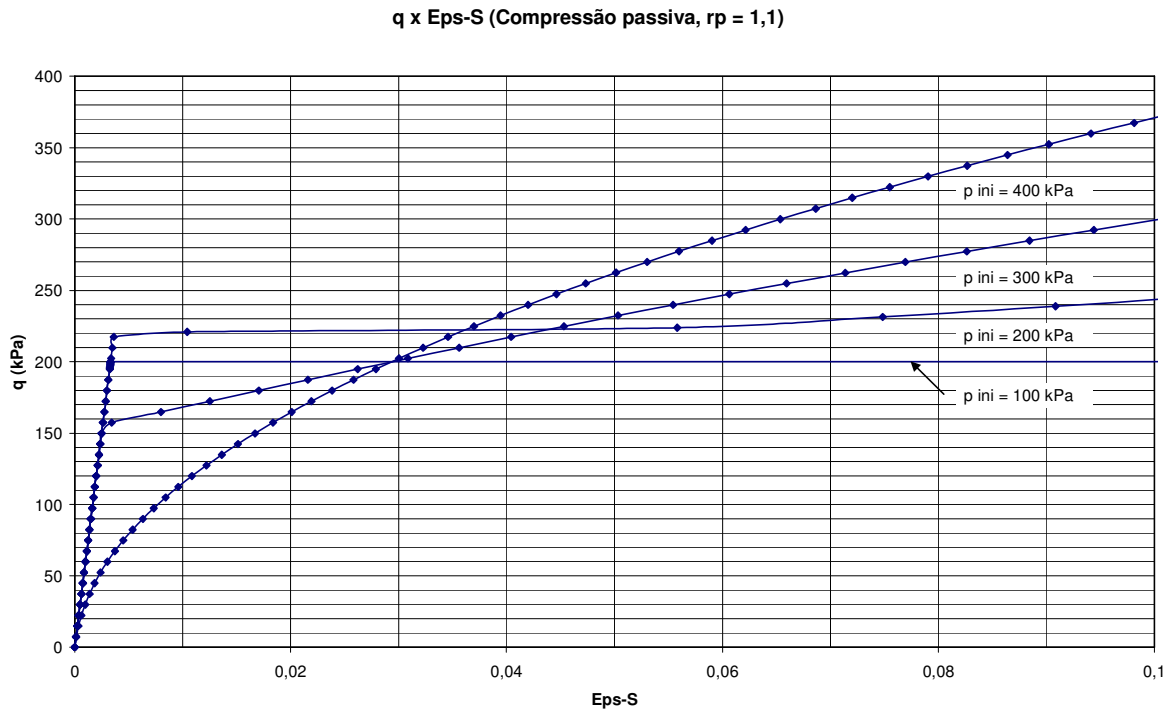


(b)

**Figura 4.6. Curvas tensão-deformação para simulação de ensaios CTC, (a) Curvas  $q \times \epsilon_s$  e (b) Curvas  $q \times \epsilon_s$ , para  $\epsilon_s$  limitado a 0,1, ou 10% ( $r_p = 1,1$ ).**

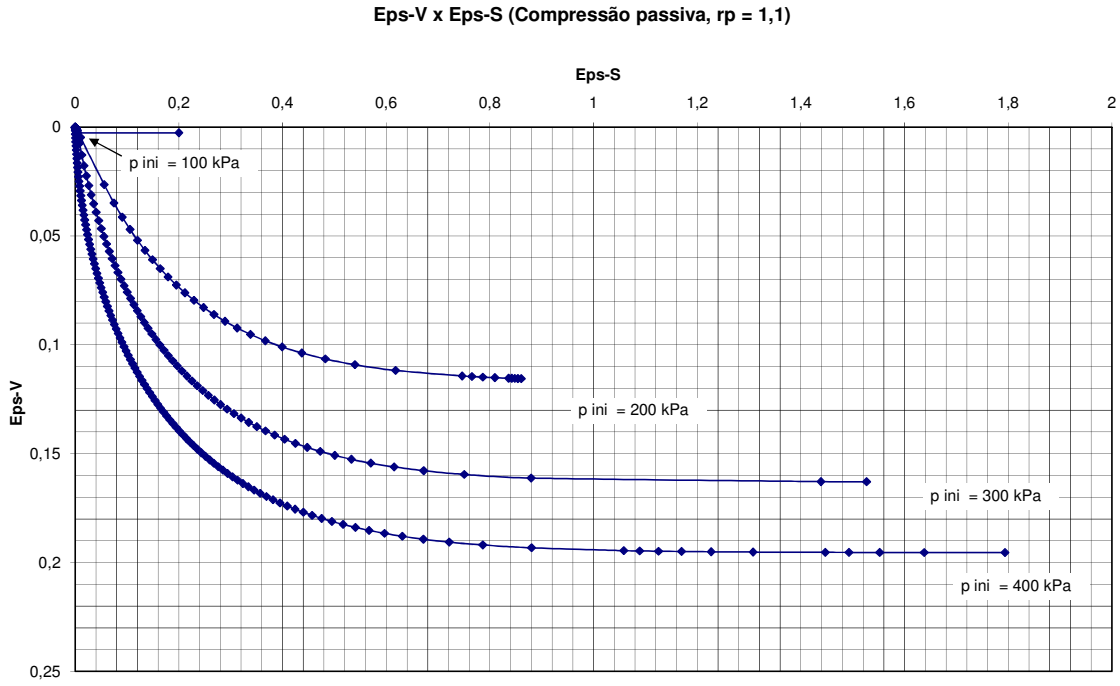


(a)

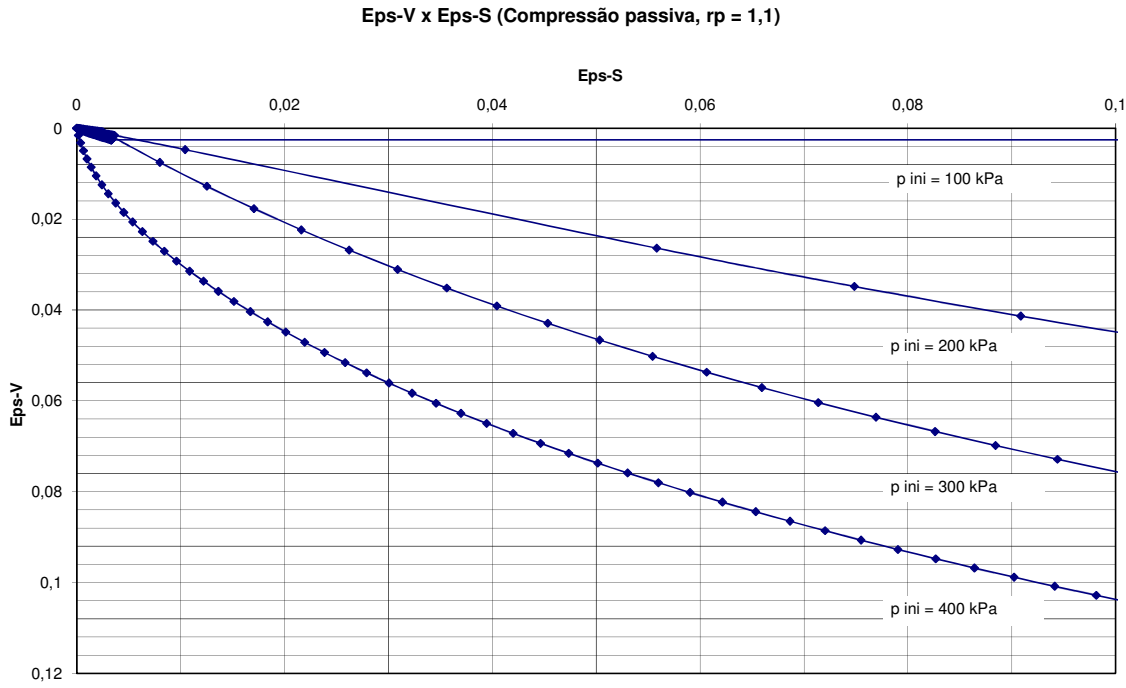


(b)

**Figura 4.7. Curvas  $\epsilon_v \times \epsilon_s$ , para simulação de ensaios CTC, (a) Curvas para grandes deformações e (b) Curvas para  $\epsilon_s$ , limitado a 0,1, ou 10% ( $r_p = 1,1$ ).**

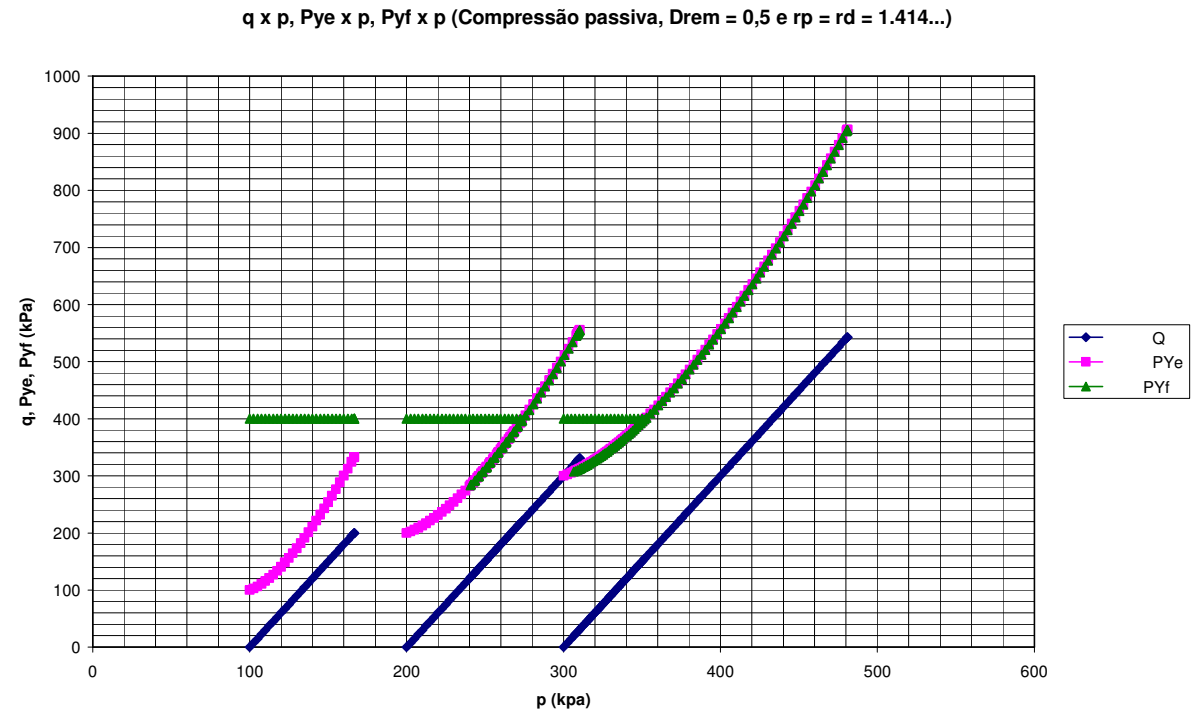


(a)

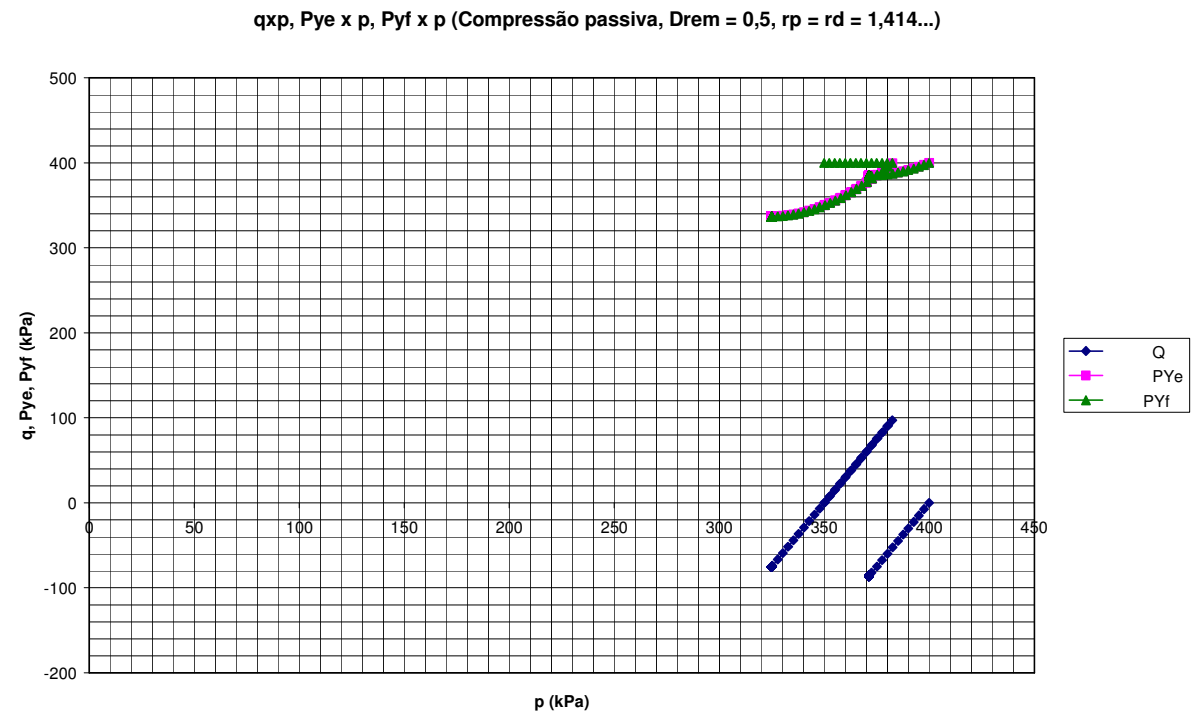


(b)

**Figura 4.8. Trajetórias de tensões para simulação de ensaios CTC, (a) Curvas múltiplas ( $p_{ini} = 100, 200$  e  $300$  kPa) e (b) Curvas múltiplas ( $p_{ini} = 350$  e  $400$  kPa) ( $r_p = 1,414$ ).**

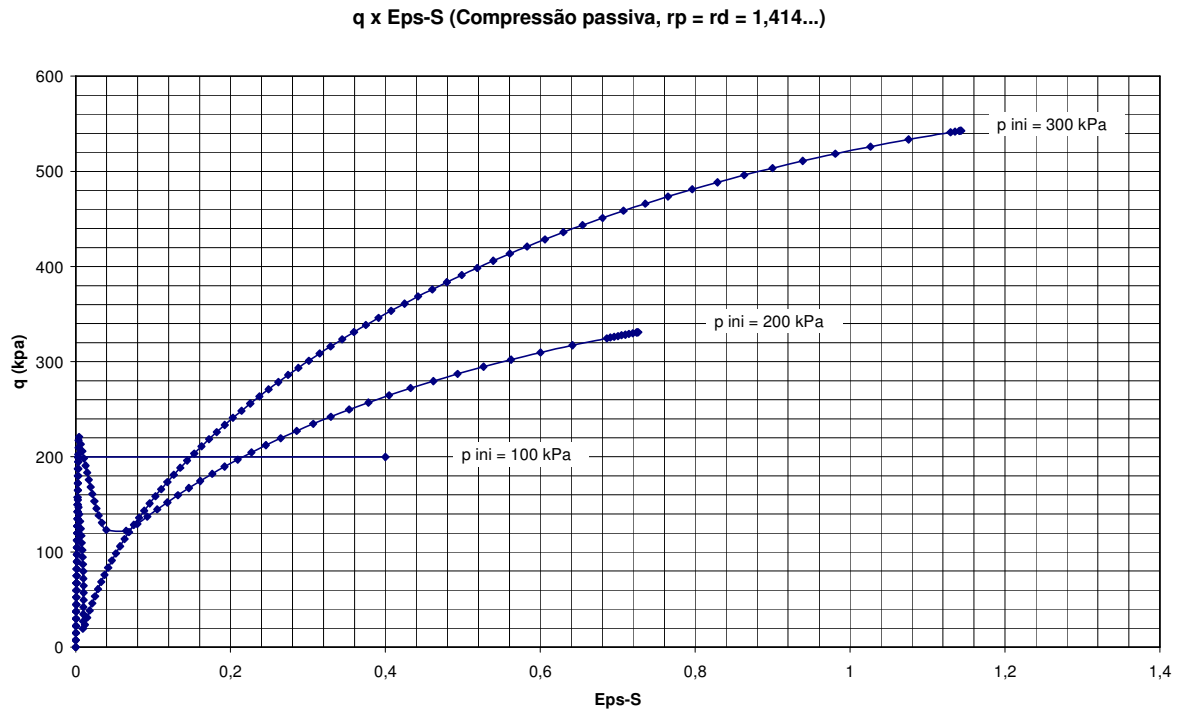


(a)

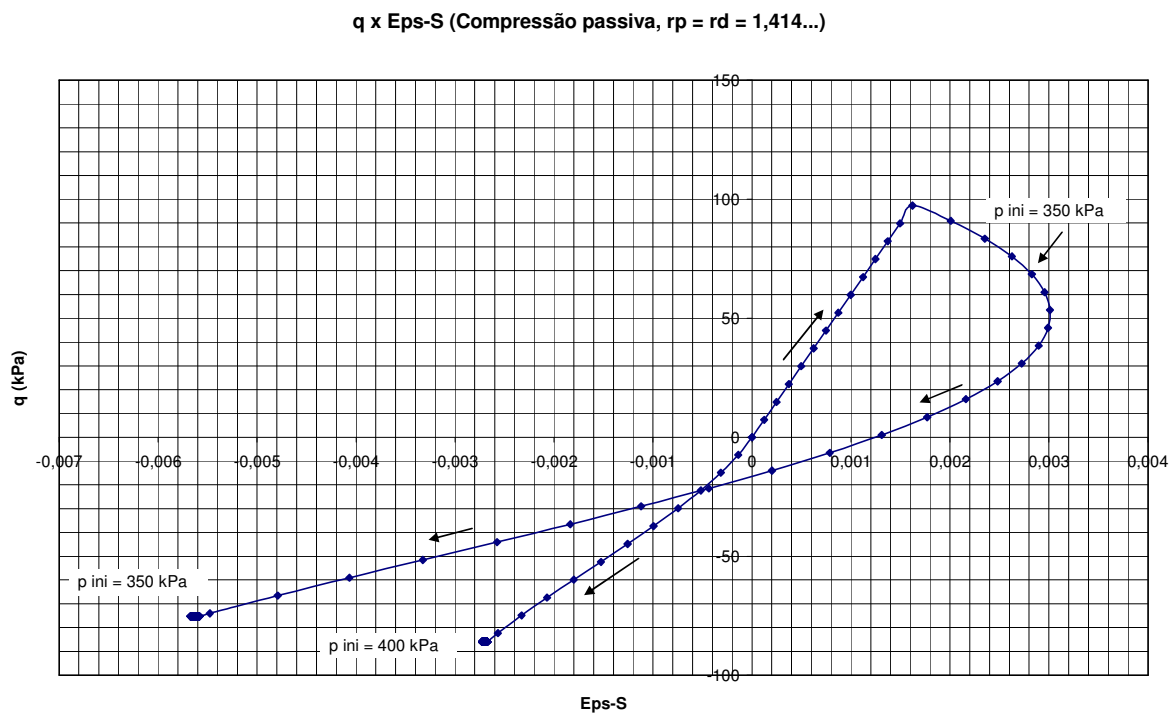


(b)

**Figura 4.9. Curvas tensão-deformação para simulação de ensaios CTC, (a) Curvas  $q \times \epsilon_s$  ( $p_{ini} = 100, 200$  e  $300$  kPa) e (b) Curvas  $q \times \epsilon_s$  ( $p_{ini} = 350$  e  $400$  kPa) ( $r_p = 1,414$ ).**



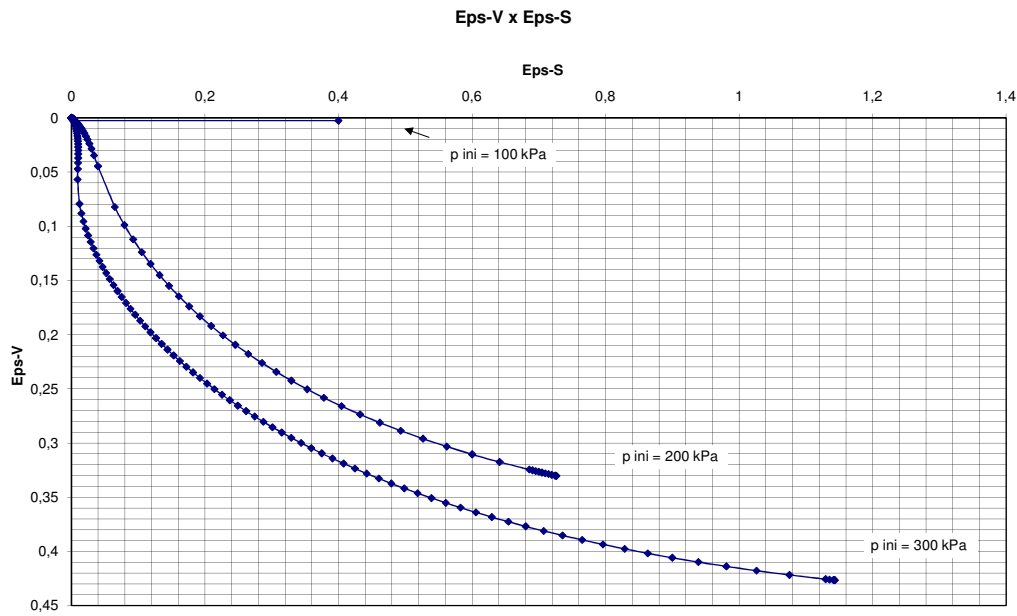
(a)



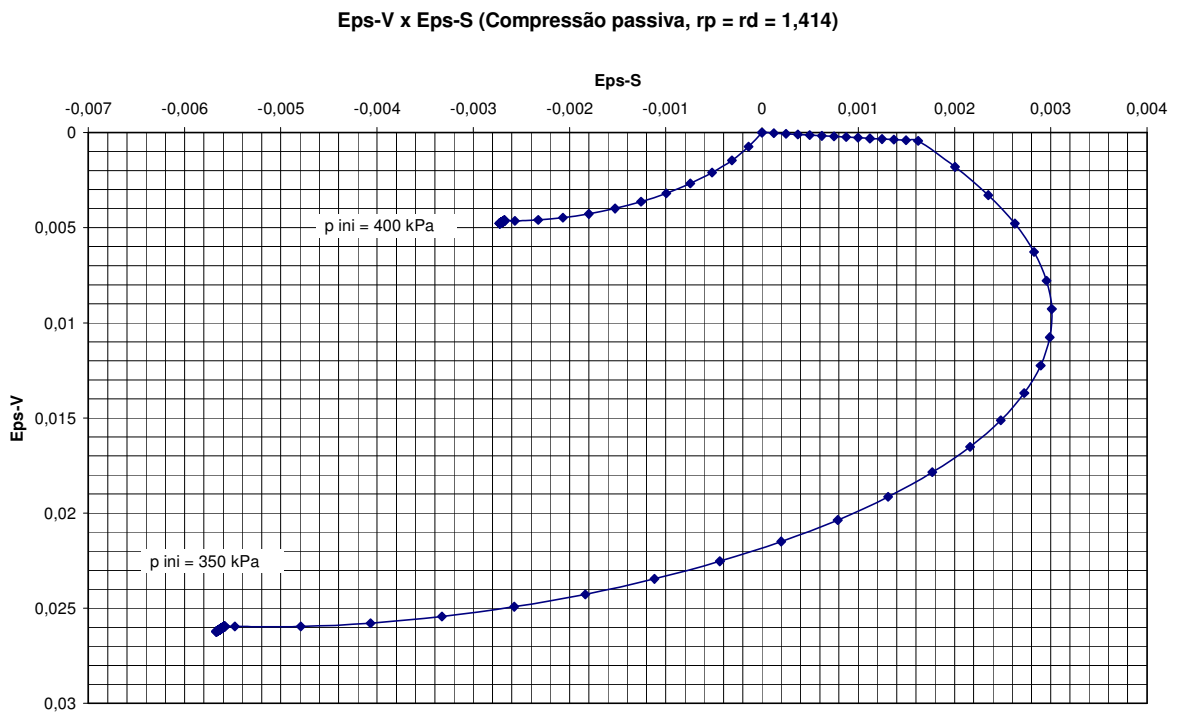
(b)



**Figura 4.10. Curvas  $\epsilon_v$  x  $\epsilon_s$ , para simulação de ensaios CTC, (a) Curvas para  $p_{ini} = 100$ , 200 e 300 kPa e (b) Curvas para  $p_{ini} = 350$  e 400 kPa ( $r_p = 1,414$ ).**



(a)



(b)

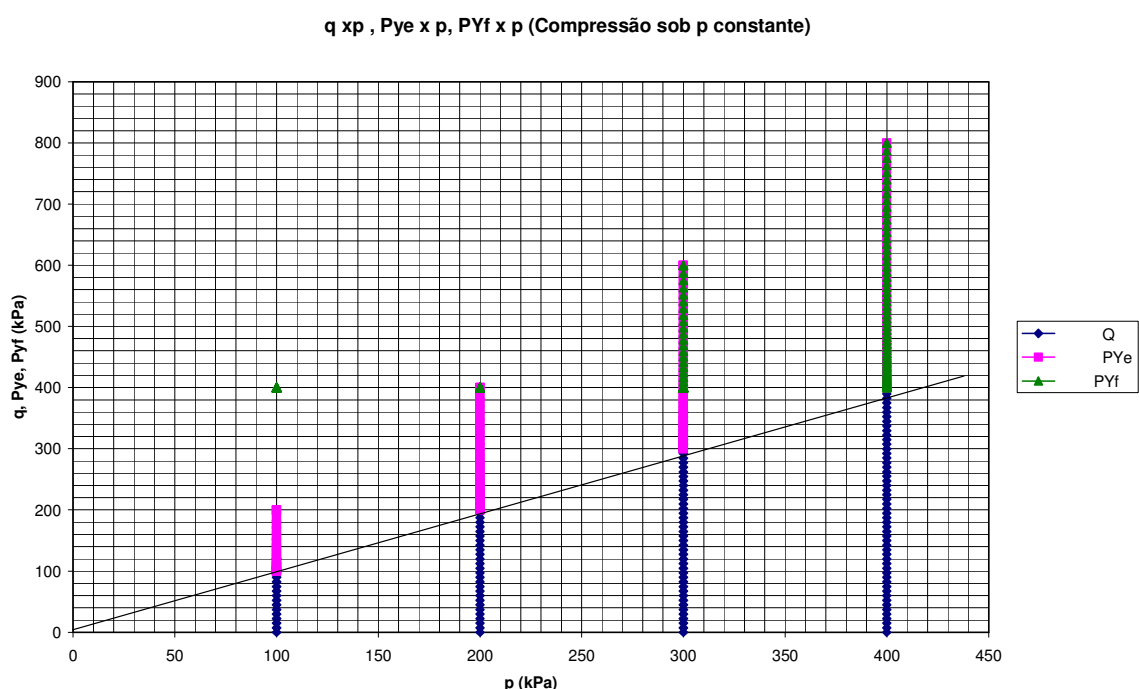
Dos resultados apresentados nas Figuras 4.2 a 4.10 pode-se observar a influência do parâmetro  $r_p$ . As curvas 4.8 a 4.10, correspondentes a  $r_p = r_d = 1,414$ , já mostram reversão de tensões com a deformação e não têm sentido para aplicação ao comportamento de solos.

O observado na Figura 4.9(b) resulta de incremento de deformação vertical que produz decréscimo de tensão vertical, em função da retração da superfície de escoamento elíptica, até ser atingida novamente a superfície de escoamento elíptica. A trajetória de tensões passa de trajetória CTC ( $\Delta\sigma_1 > 0$ ,  $\Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3 = 0$ ) para trajetória RTE, onde ( $\Delta\sigma_1 < 0$ ,  $\Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3 = 0$ ).

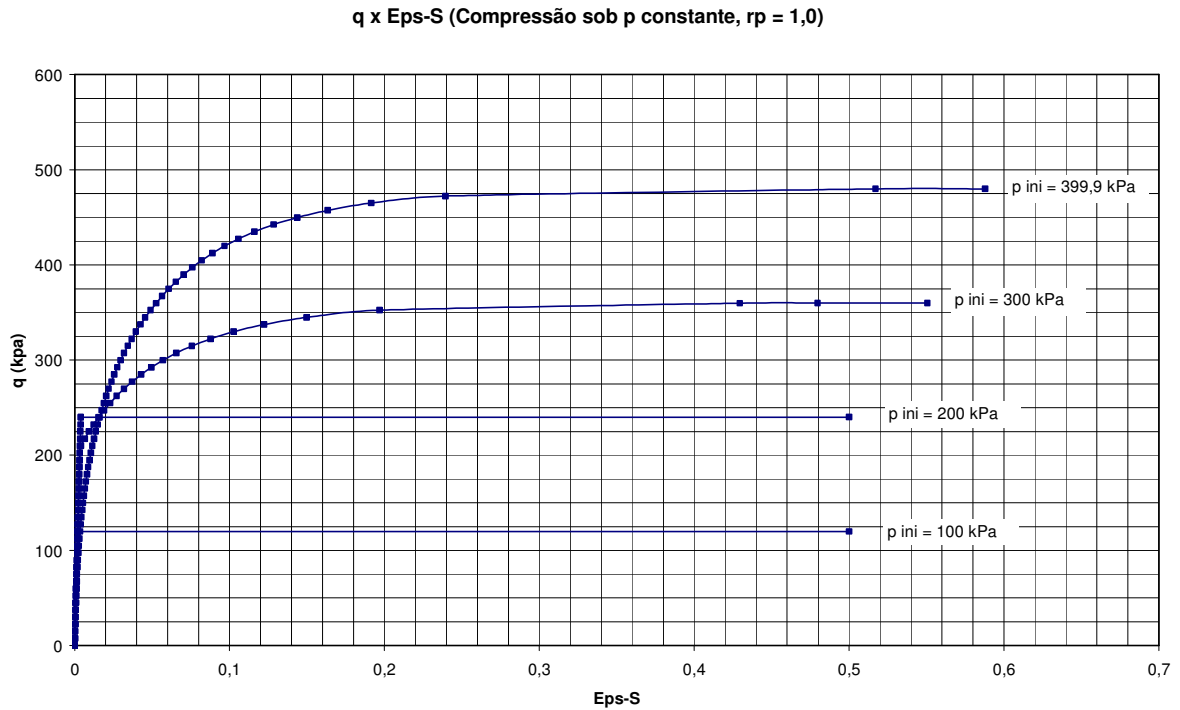
#### 4.1.2. Simulação de Ensaio de Compressão Triaxial com Tensão Normal Média Constante

Nestes ensaios é mantida constante a tensão normal média ( $p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = \text{cte}$ ), é aumentada a tensão vertical e reduzida a tensão horizontal. Na simulação utilizou-se  $dp = 0$  e  $dq = \delta$ . Nos exemplos mostrados foram utilizados incrementos de tensão desviadora  $dq = 0,15$  kPa. Da mesma forma, foram testados quatro valores diferentes de tensões iniciais hidrostáticas e valores de  $r_p = 1,0$ ; 1,1 e 1,414.

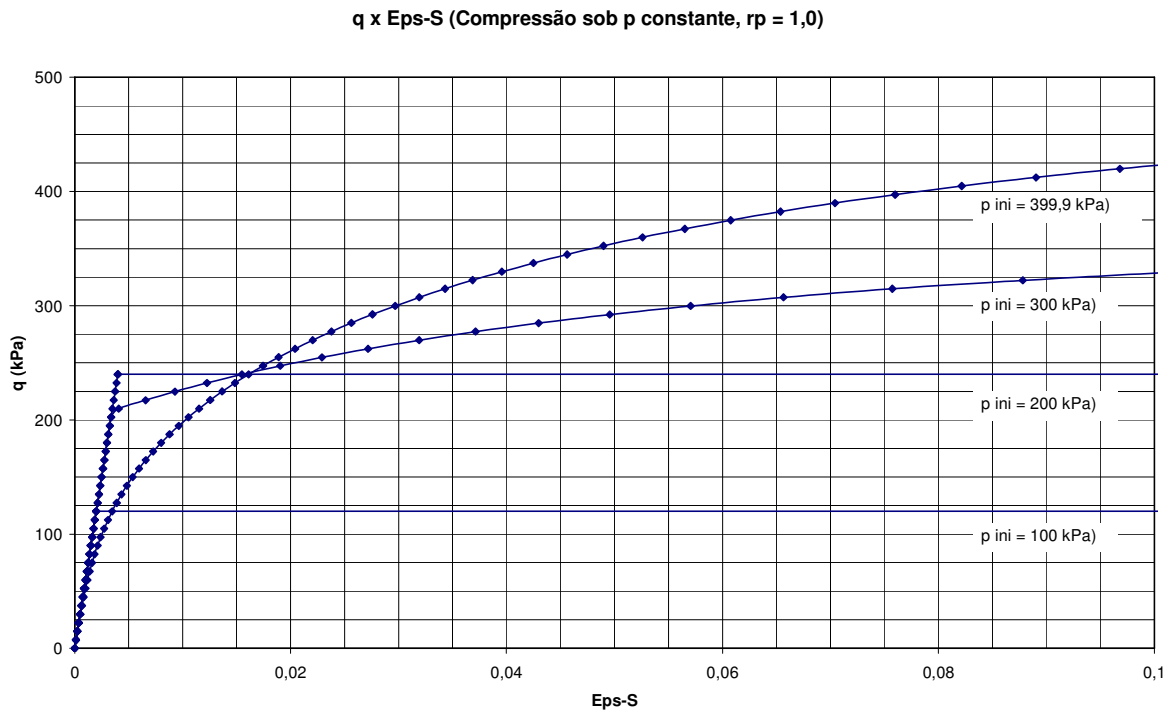
**Figura 4.11. Trajetórias de tensões para simulação de ensaios sob tensão normal média constante, gráfico de curvas múltiplas ( $r_p = 1$ ).**



**Figura 4.12. Curvas tensão-deformação para simulação de ensaios sob tensão normal média constante, (a) Curvas  $q \times \epsilon_s$  ( $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $399,9$  kPa) e (b) Curvas  $q \times \epsilon_s$  para  $\epsilon_{s \text{ máx}} = 0,1$  ( $r_p = 1,0$ ).**

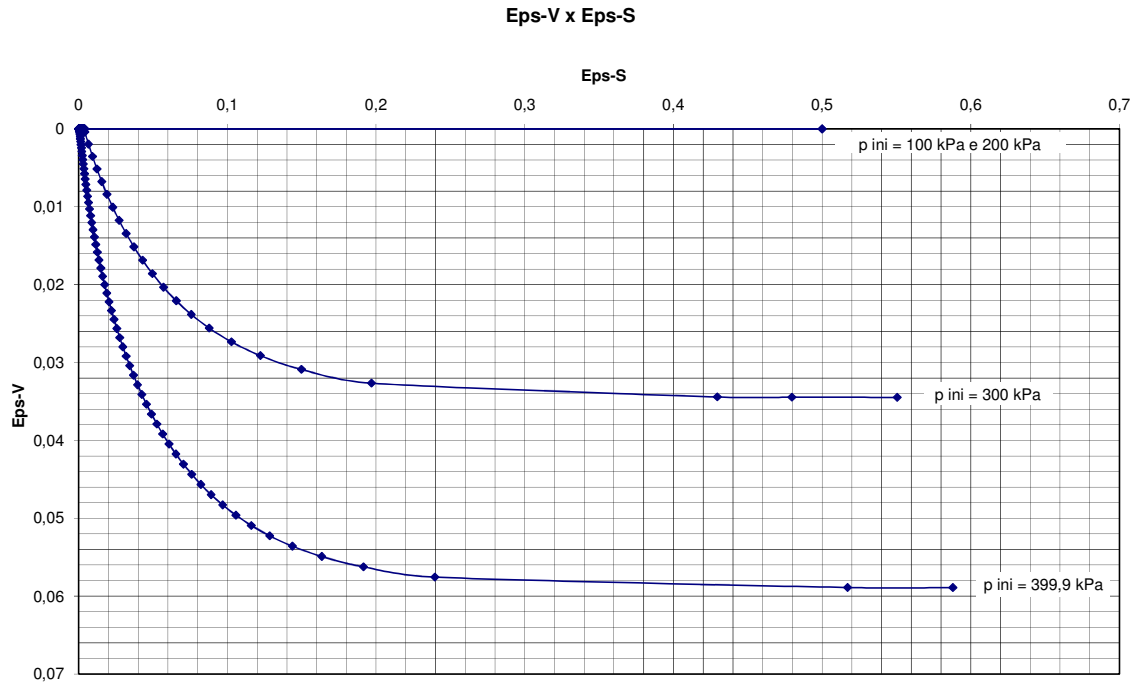


(a)



(b)

**Figura 4.13. Curvas  $\varepsilon_v$  x  $\varepsilon_s$ , para simulação de ensaios sob tensão normal  $p$  constante, (curvas para  $p_{ini} = 100, 200, 300$  kPa e  $399,9$  kPa) ( $r_p = 1,0$ ).**

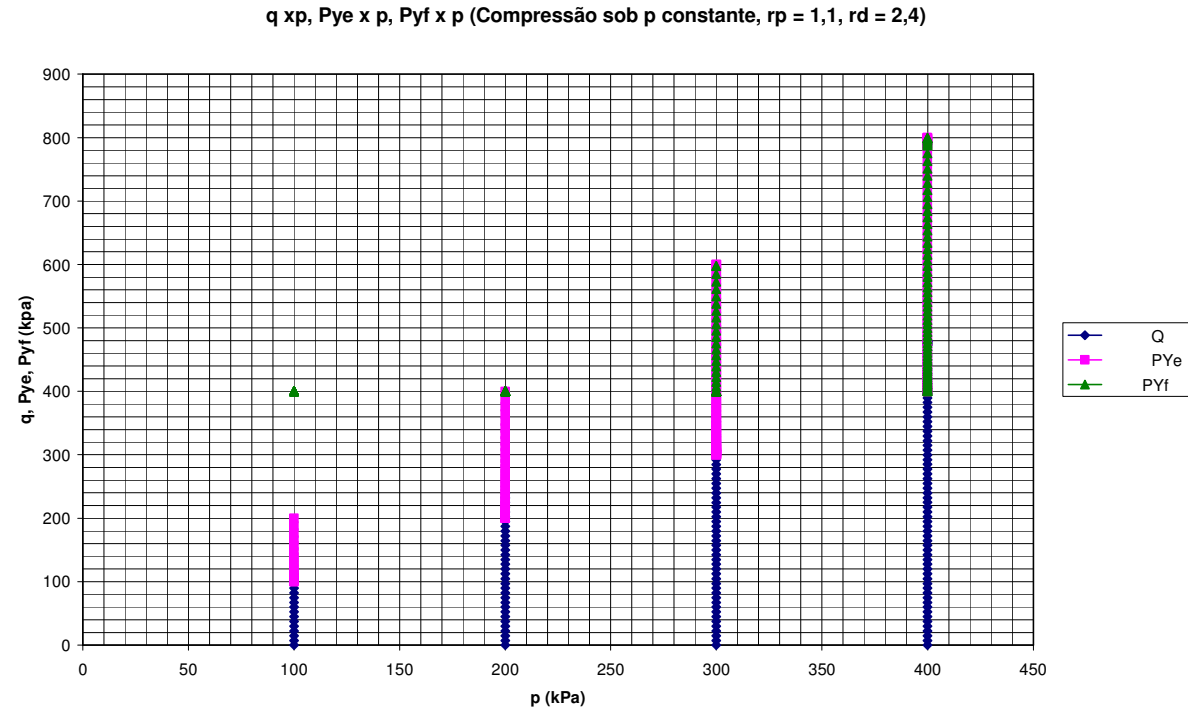


O uso de tensão inicial  $p_{ini} = 399,9$  kPa, que representa situação limite para solo normalmente adensado, surgiu por questão da formulação e não de problema numérico do programa de cálculo. O primeiro incremento de tensão, a partir do estado inicial de tensão com componentes de tensão triaxial  $p_{ini} = 400$  kPa e  $q_{ini} = 0$  kPa, deve produzir plastificação e dano, e para tanto o fator multiplicador  $\lambda$  correspondente a este primeiro incremento deve ser maior do que zero, entretanto, pelo exame da expressão de  $\lambda$ , aqui repetida:

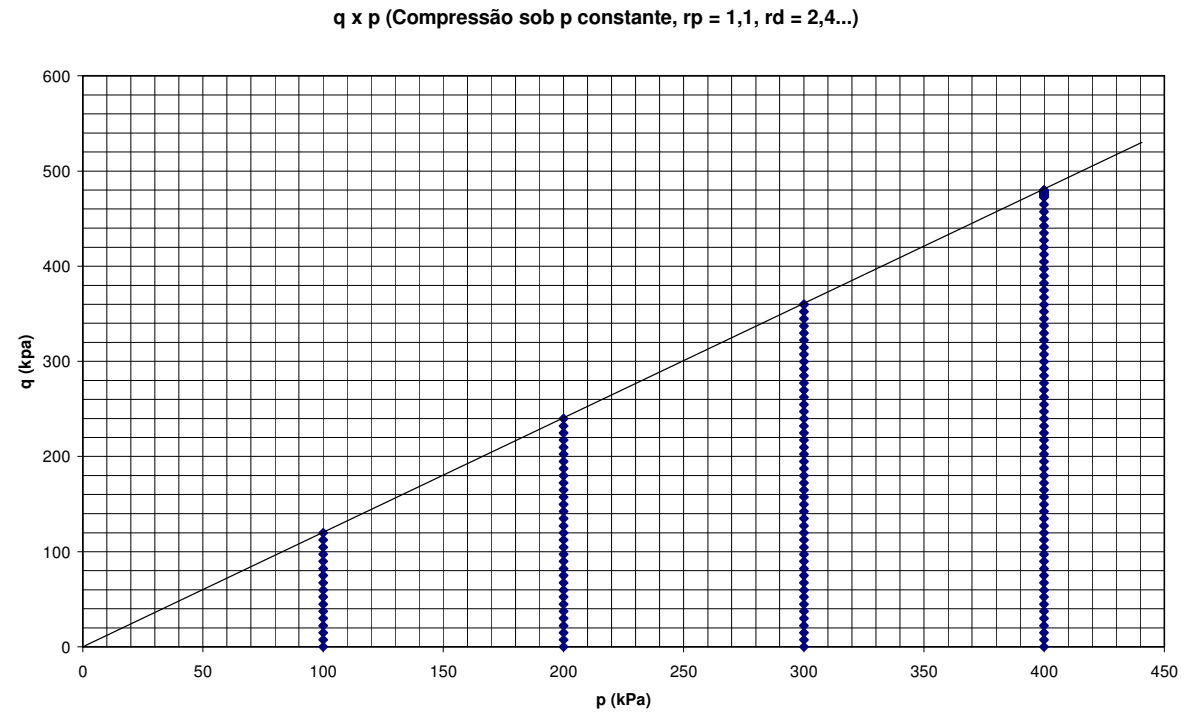
$$\lambda = \frac{\left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\kappa^*} \cdot \dot{\varepsilon}_v + 3G \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\varepsilon}_s}{\mathbf{D}} \quad (4.1)$$

o cálculo de  $\lambda$  recai em ponto onde  $d\varepsilon_v$ , ou melhor,  $\dot{\varepsilon}_v$  calculado por (3.117) é nulo, e também é nulo o valor inicial de  $q$ , produzindo  $\lambda$  nulo. O incremento  $\dot{\varepsilon}_v$  resulta nulo, porque o incremento de tensão hidrostática  $\dot{p}$  é nulo e é nulo o valor inicial da tensão desviadora  $q = 0$ , o que torna os elementos da matriz  $A_{12}$  e  $A_{21}$  iguais a zero. E, desta forma, os ciclos de cálculo não saem do ponto inicial de tensão  $(p, q) = (p_{y0}, 0)$ .

**Figura 4.14. Trajetórias de tensões para simulação de ensaios sob tensão normal média constante, (a) gráfico de curvas múltiplas e (b) curva  $q \times p$  ( $r_p = 1,1$ ).**

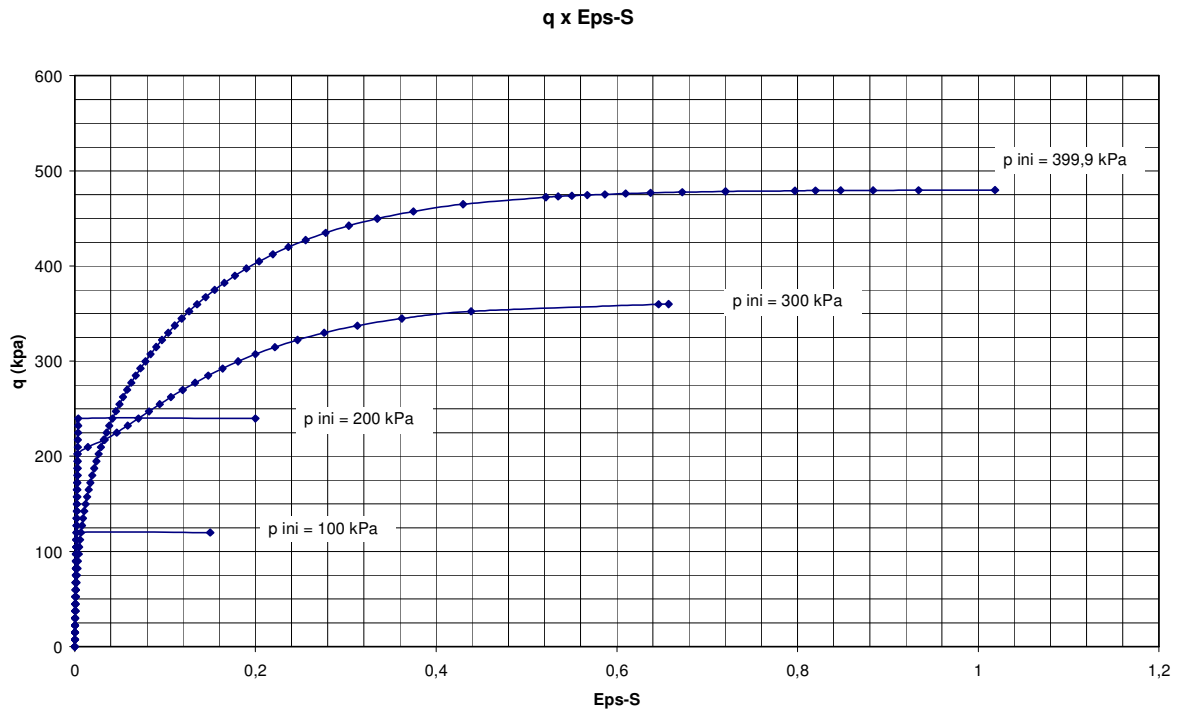


(a)

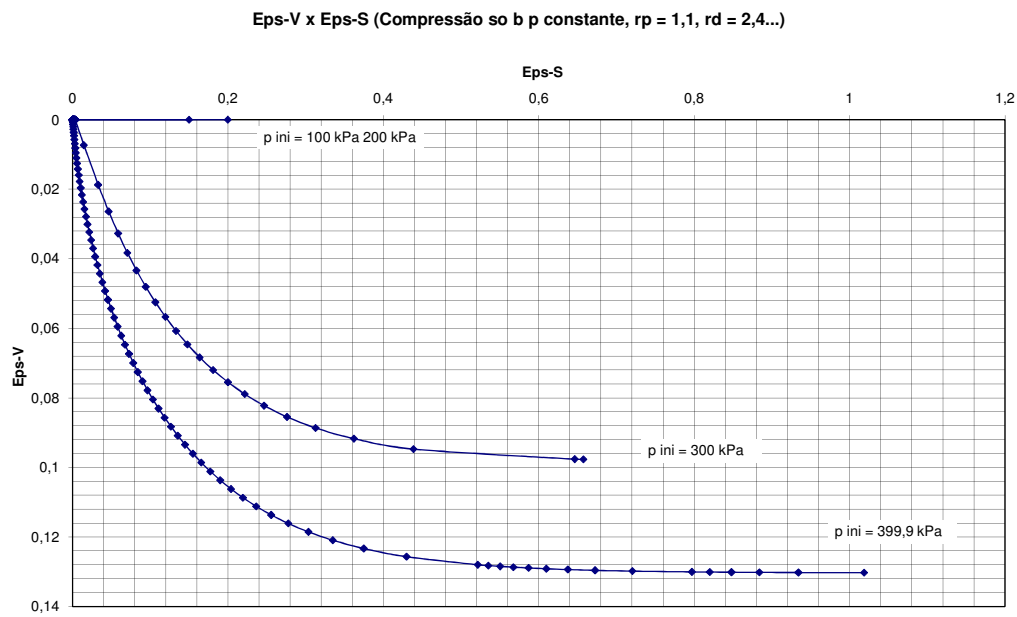


(b)

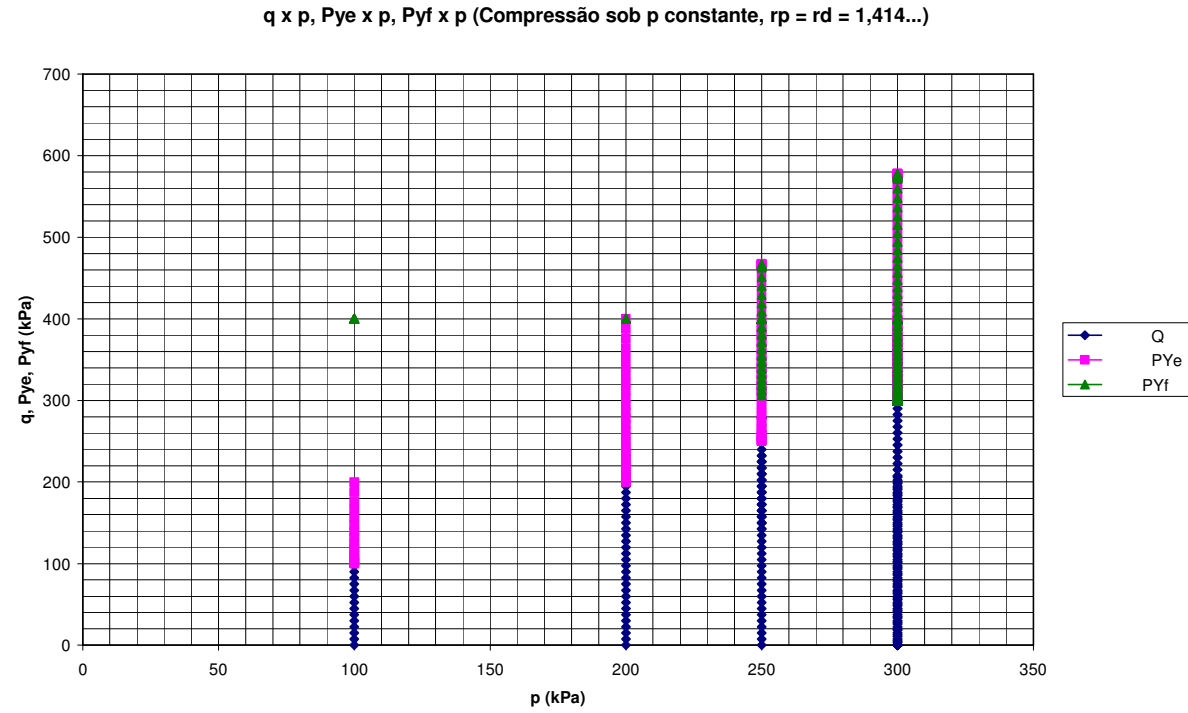
**Figura 4.15. Curvas tensão-deformação para simulação de ensaios sob tensão normal média constante, curvas  $q \times \epsilon_s$  ( $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $399,9$  kPa) ( $r_p = 1,1$ ).**



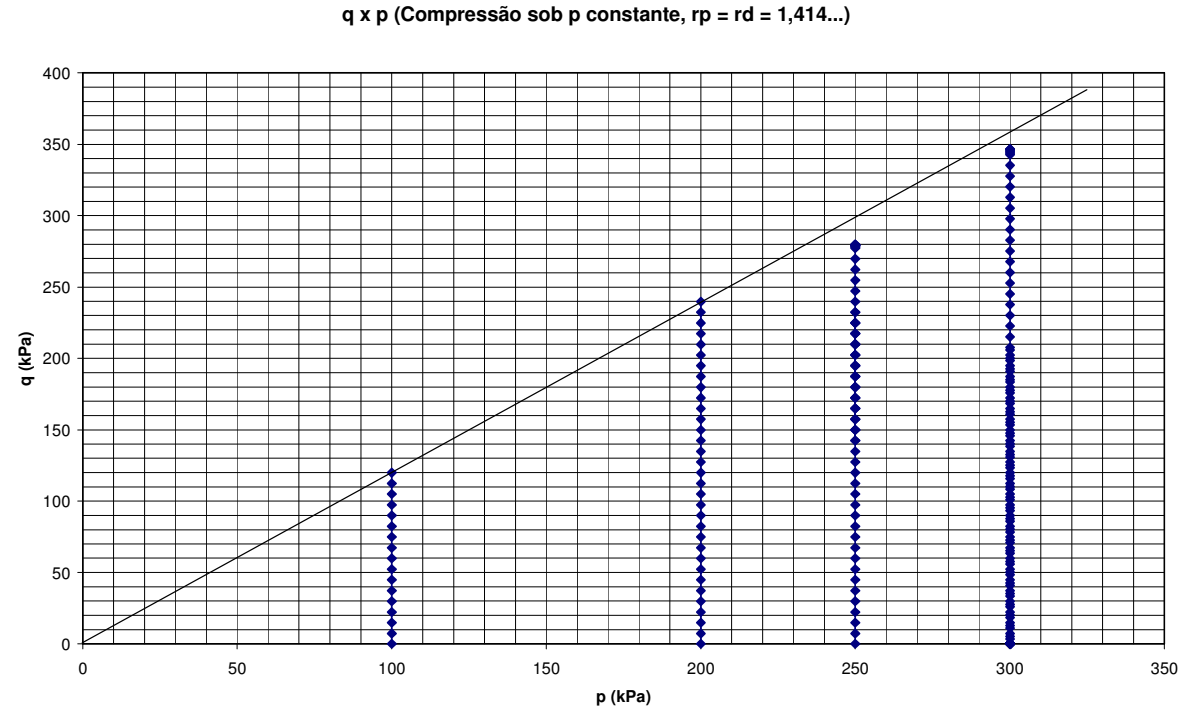
**Figura 4.16. Curvas  $\epsilon_v \times \epsilon_s$ , para simulação de ensaios sob tensão normal  $p$  constante, curvas para  $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $399,9$  kPa ( $r_p = 1,1$ ).**



**Figura 4.17. Trajetórias de tensões para simulação de ensaios sob tensão normal média constante, (a) gráfico de curvas múltiplas e (b) curva  $q \times p$  ( $r_p = r_d = 1,414$ ).**

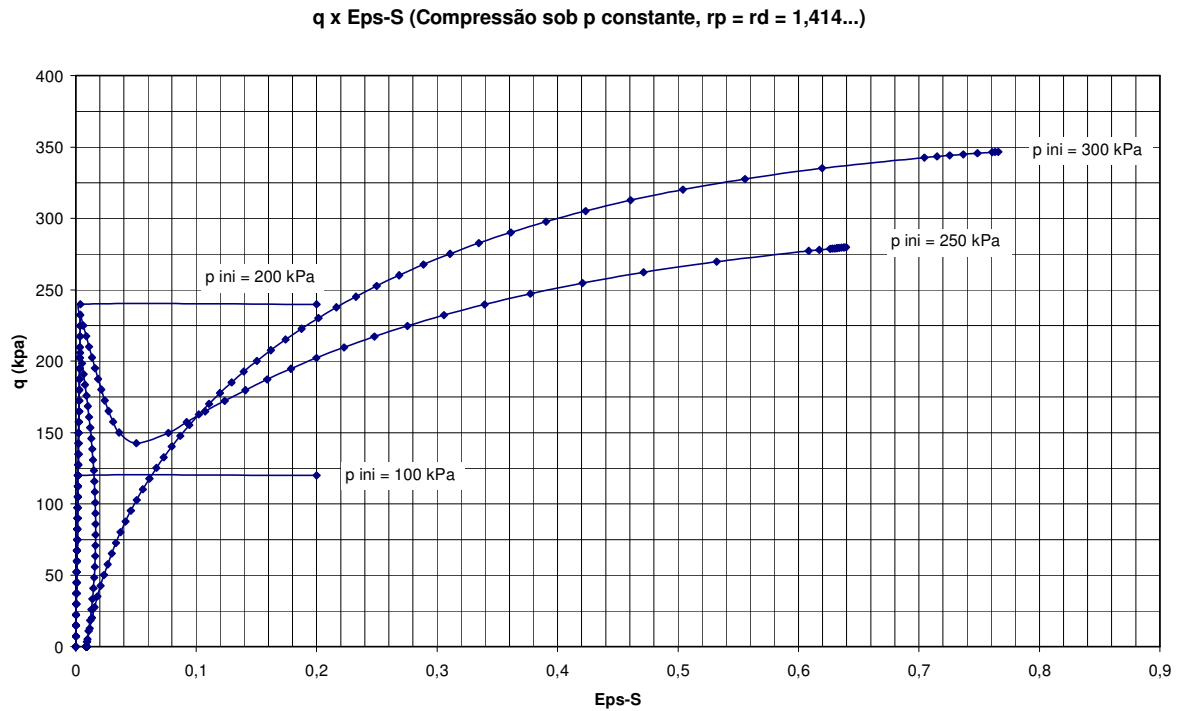


(a)

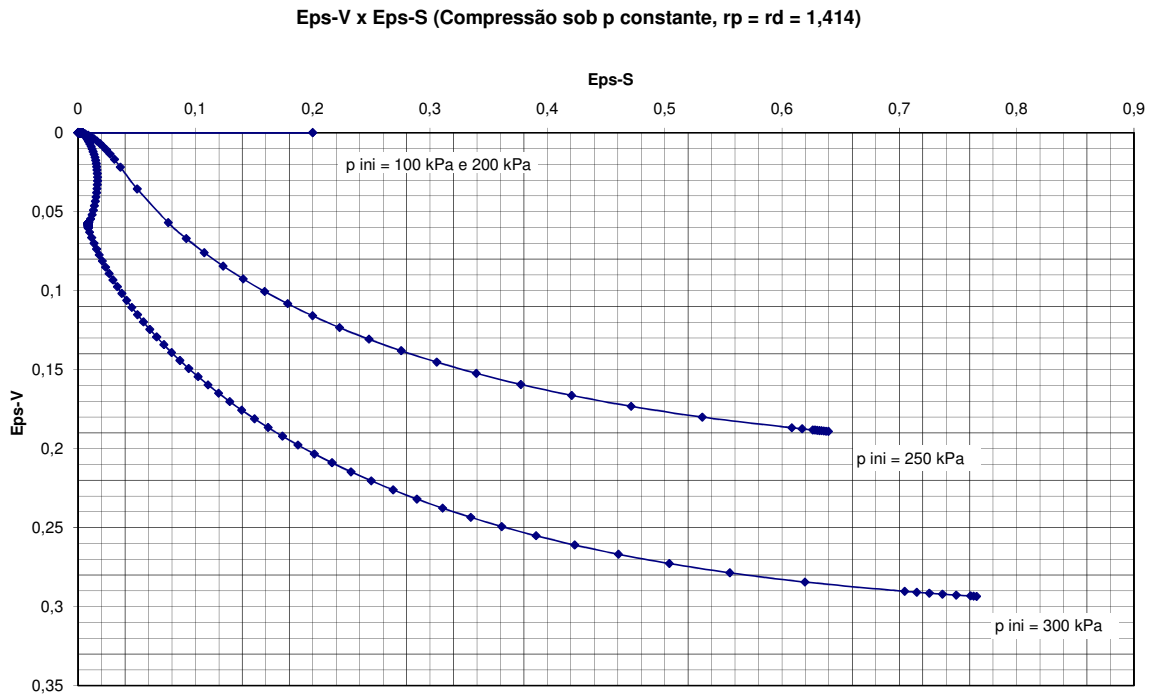


(b)

**Figura 4.18. Curvas tensão-deformação para simulação de ensaios sob tensão normal média constante, curvas  $q \times \epsilon_s$  ( $p_{ini} = 100, 200, 250$  e  $300$  kPa) ( $r_p = 1,414$ ).**



**Figura 4.19. Curvas  $\epsilon_v \times \epsilon_s$  para  $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $399,9$  kPa ( $r_p = 1,414$ ).**

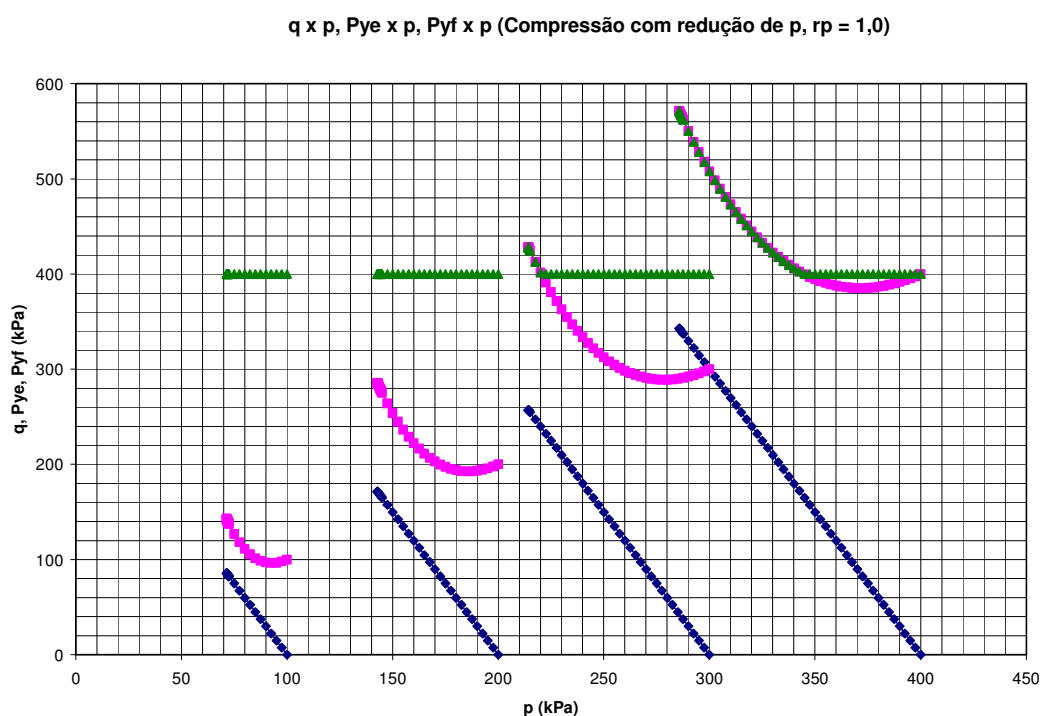




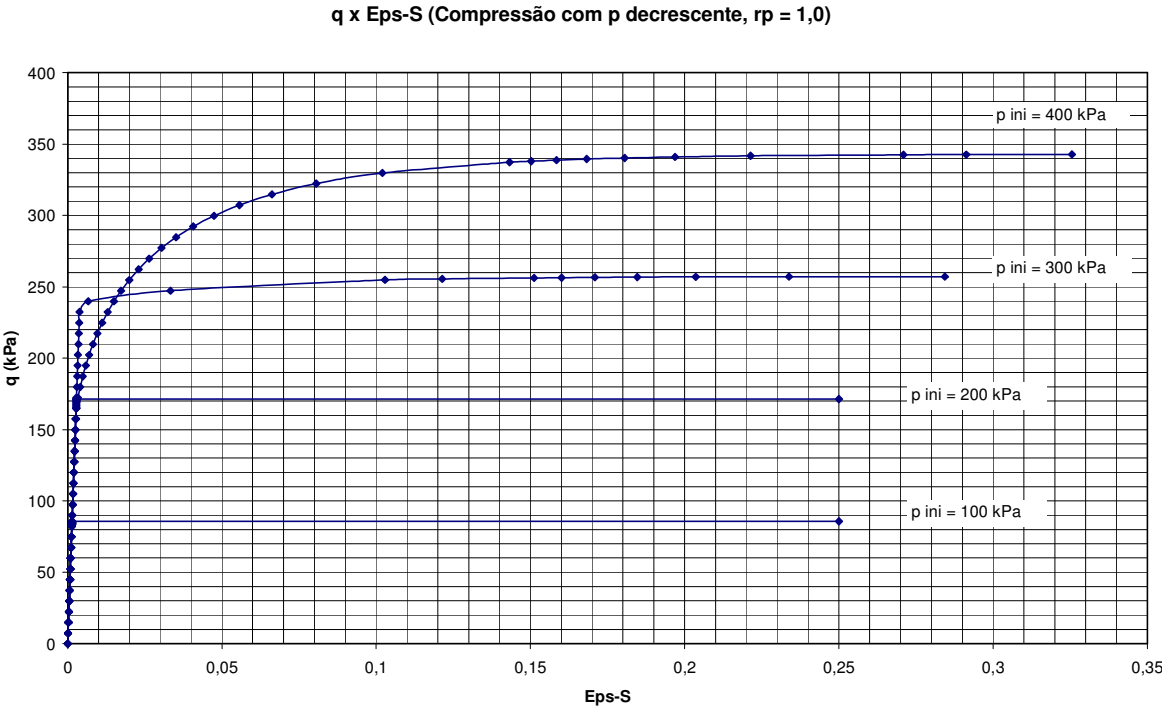
### 4.1.3. Simulação de Ensaio com Redução de Tensão Normal Média - $p$

Nestas simulações a tensão normal média  $p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$  é reduzida e são aplicados incrementos de tensão desviadora  $q$ . Nas simulações foram aplicados incrementos de tensão triaxial  $dp = -\delta$  e  $dq = 3\delta$ . Nos exemplos mostrados os incrementos de tensão utilizados foram de  $dp = -0,05$  kPa e  $dq = 0,15$  kPa. Da mesma forma, foram testados quatro valores diferentes de tensões iniciais hidrostáticas e valores de  $r_p = 1,0$ ; 1,1 e 1,414.

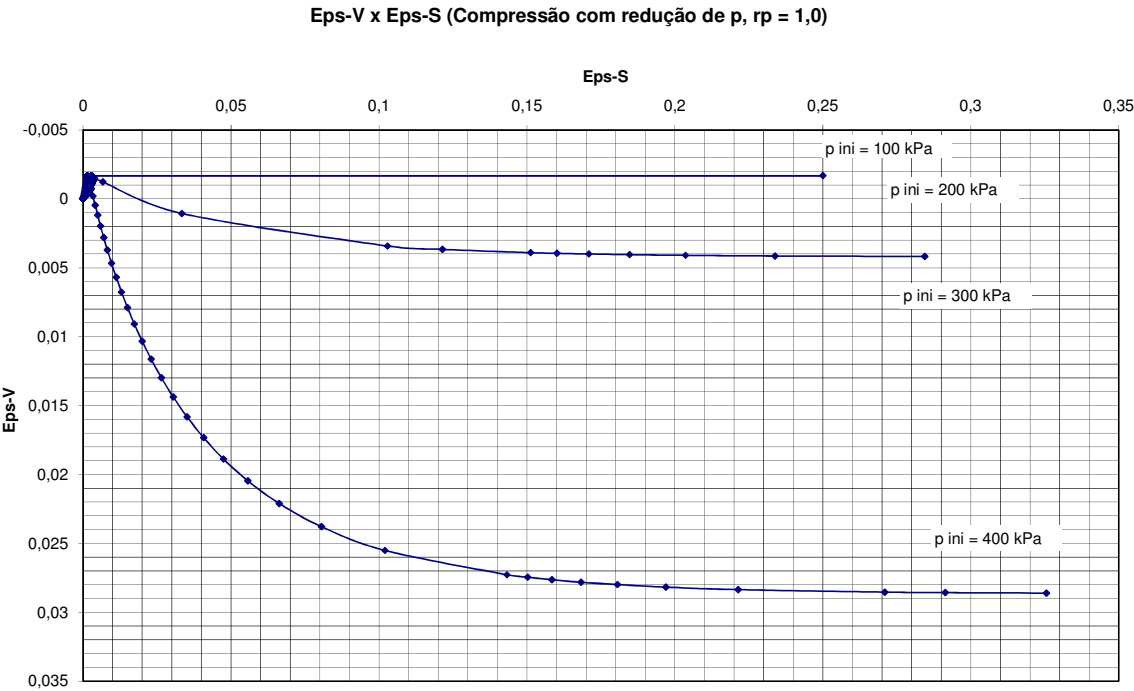
**Figura 4.20. Trajetórias de tensões para simulação de ensaios sob tensão normal média decrescente, gráfico de curvas múltiplas ( $r_p = 1$ ).**



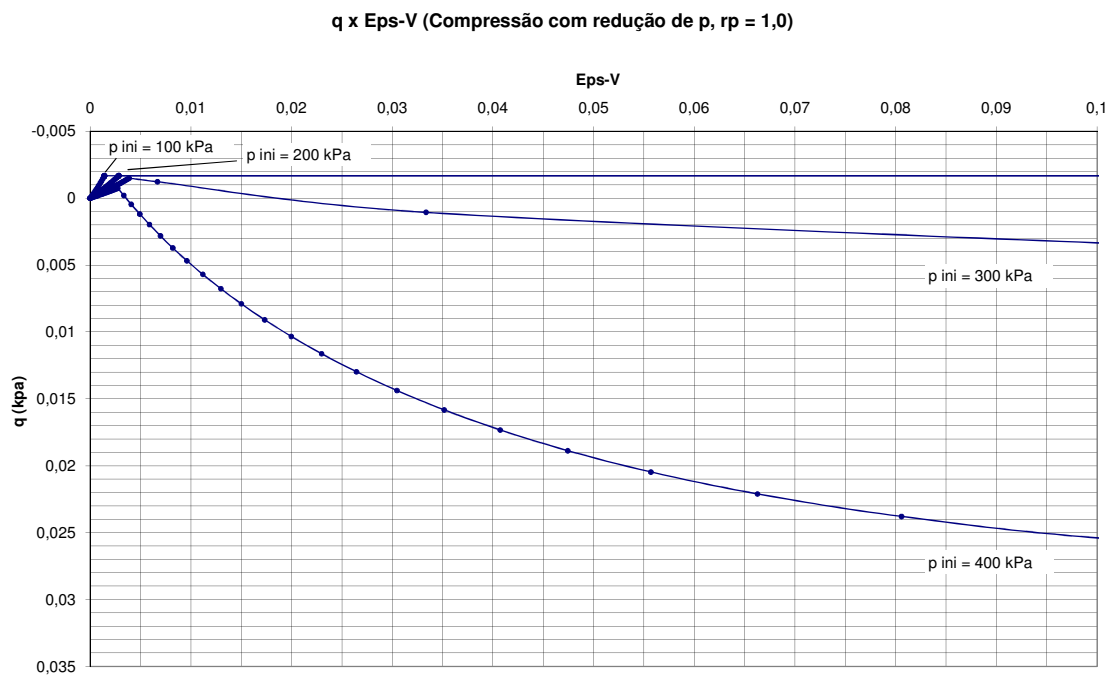
**Figura 4.21. Curvas tensão-deformação para simulação de ensaios sob tensão normal média decrescente, curvas  $q \times \epsilon_s$  ( $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa) ( $r_p = 1,0$ ).**



**Figura 4.22. Curvas  $\epsilon_v \times \epsilon_s$ , para tensão normal média decrescente, (a) curvas para  $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa e (b) curvas com  $\epsilon_s$  limitado a 0,1 ou 10% ( $r_p = 1,0$ ).**

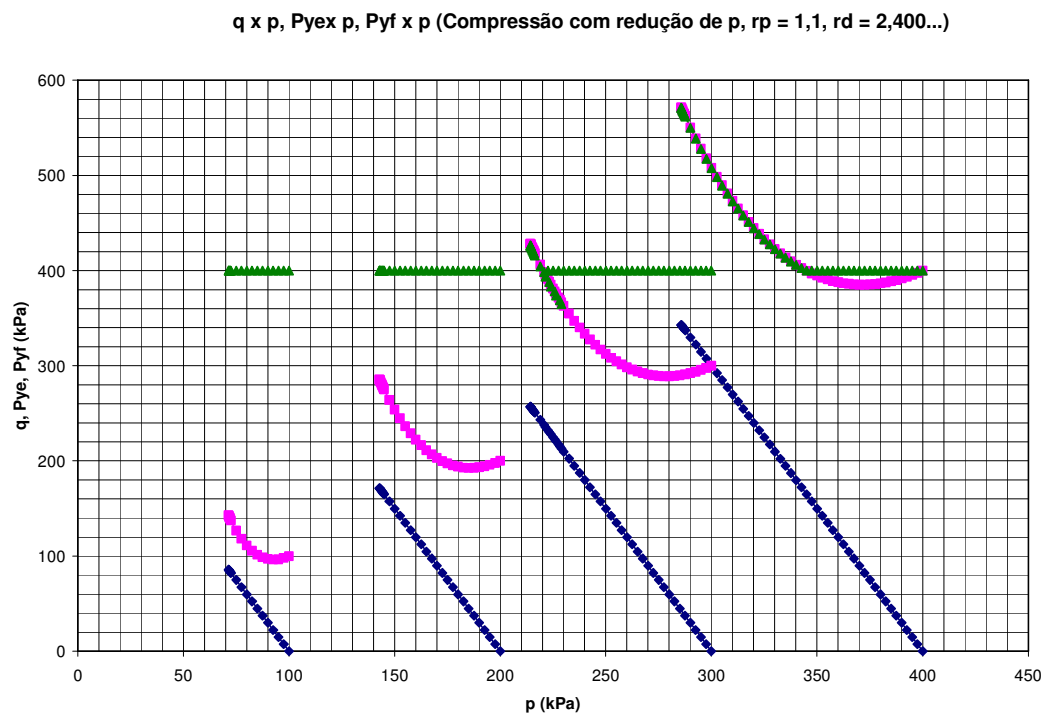


(a)

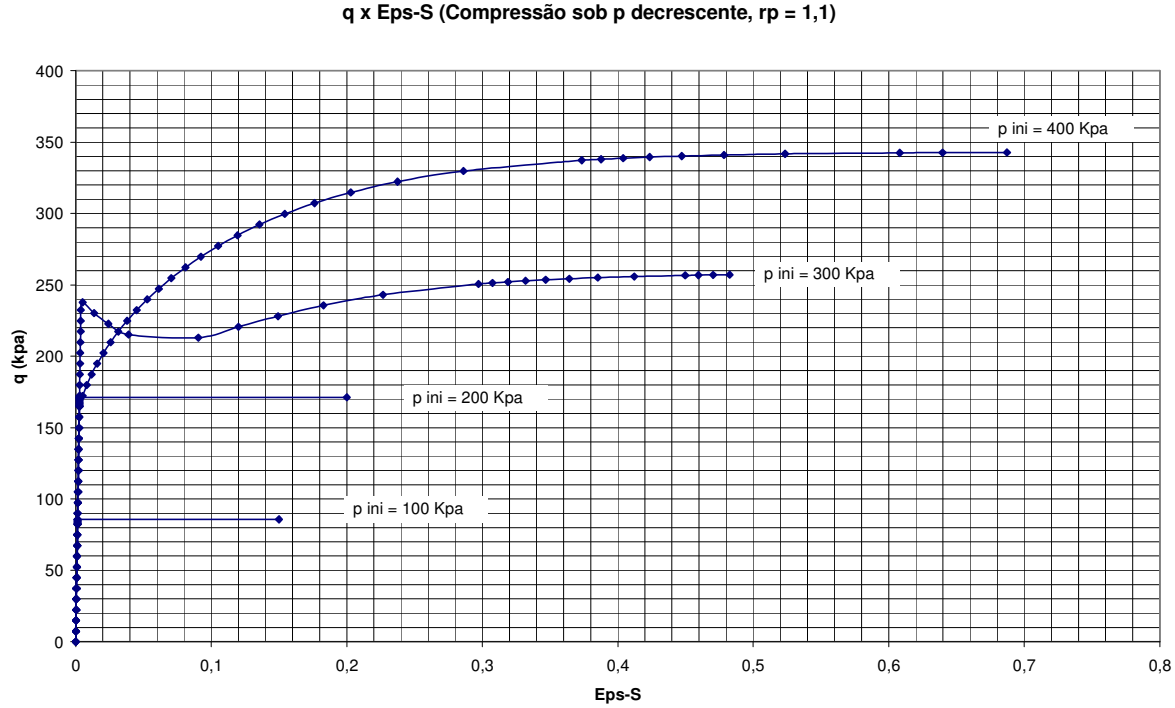


(b)

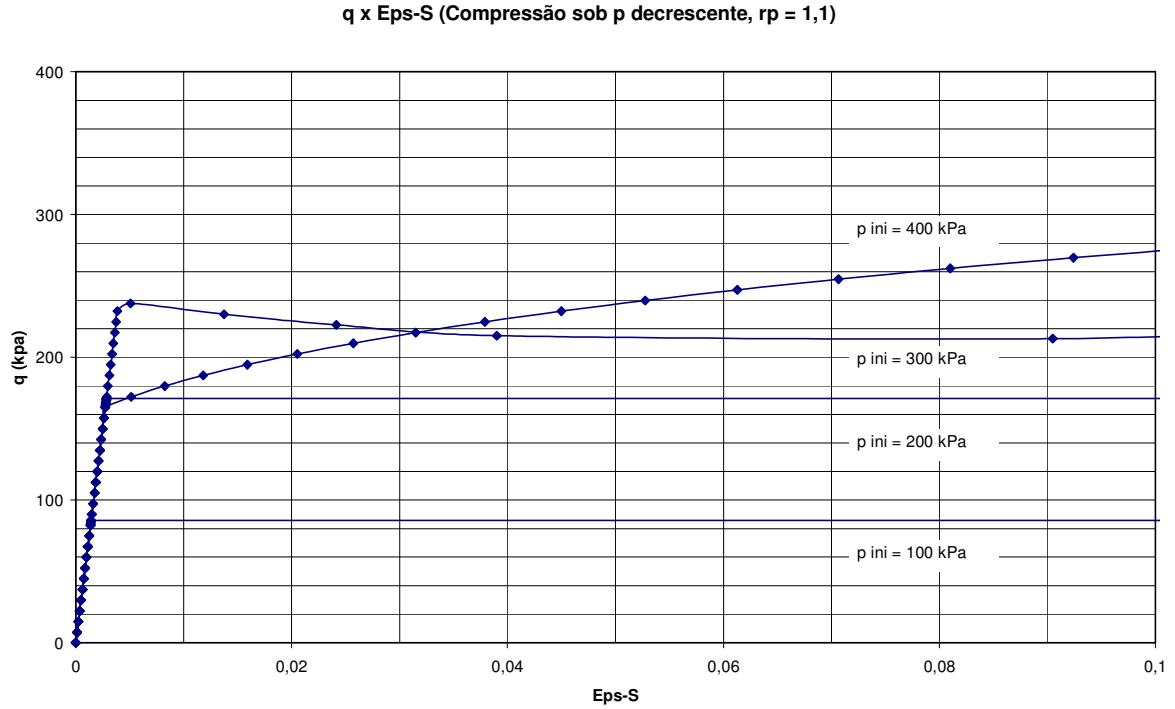
**Figura 4.23. Trajetórias de tensões para simulação de ensaios sob tensão normal média decrescente, gráfico de curvas múltiplas ( $r_p = 1,1$ ).**



**Figura 4.24. Curvas tensão-deformação para simulação de ensaios sob tensão normal média decrescente, (a) curvas  $q \times \epsilon_s$  ( $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa) e (b) curvas para  $\epsilon_s$  limitado a 0,1 ou 10% ( $r_p = 1,1$ ).**

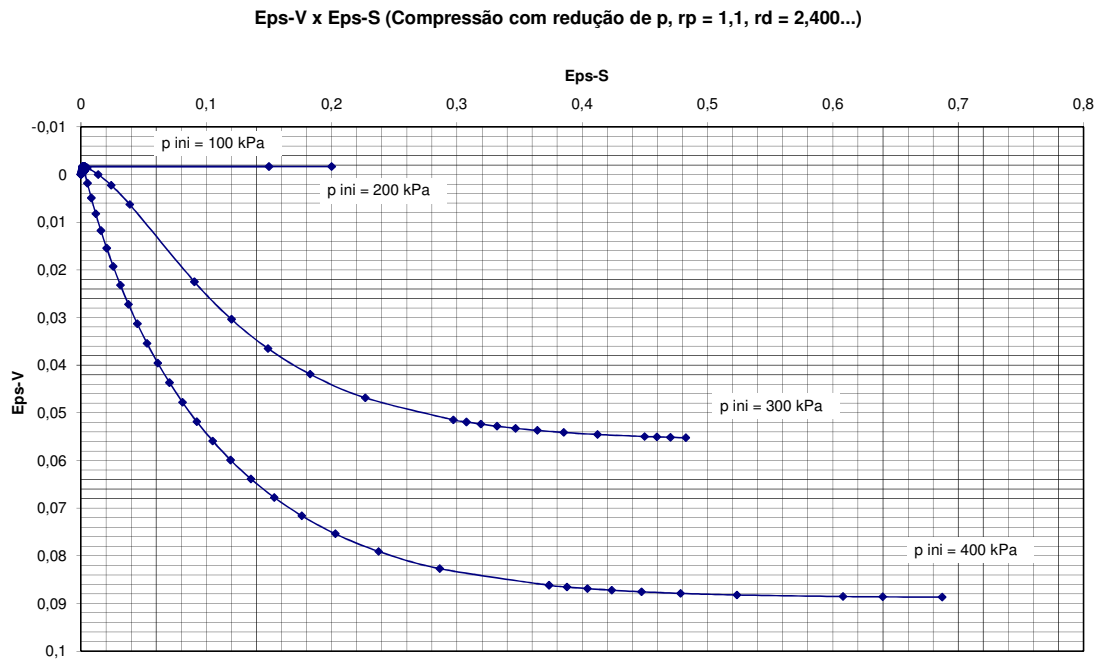


(a)

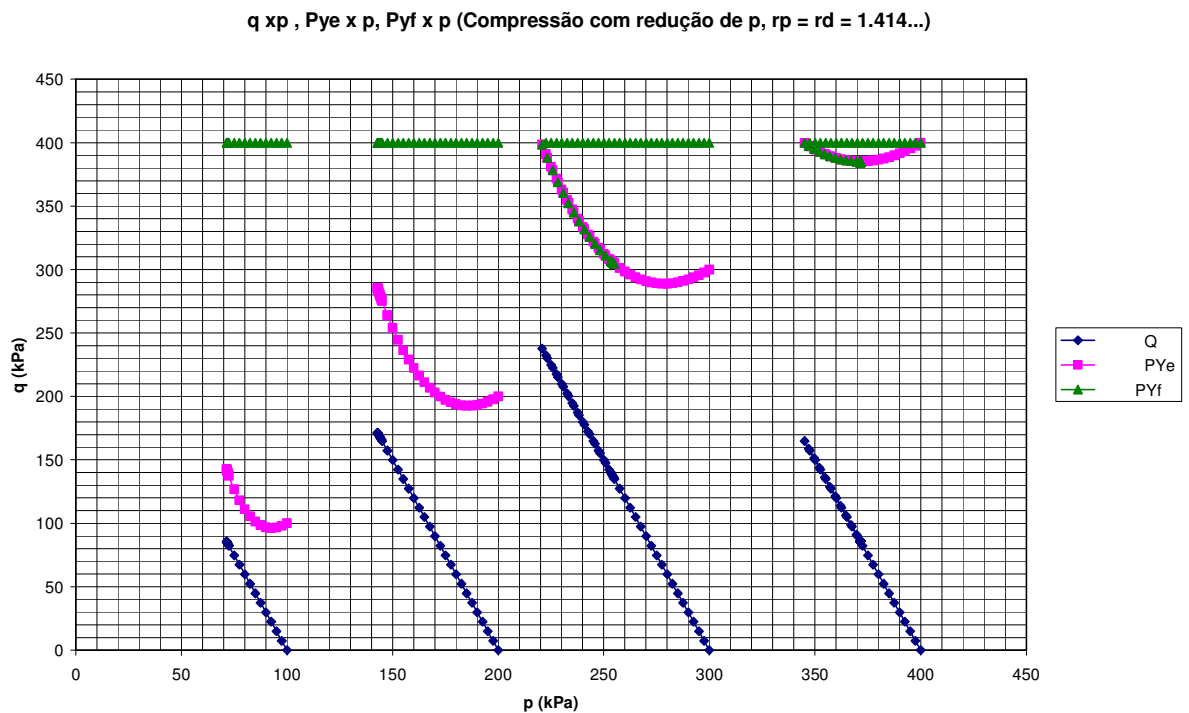


(b)

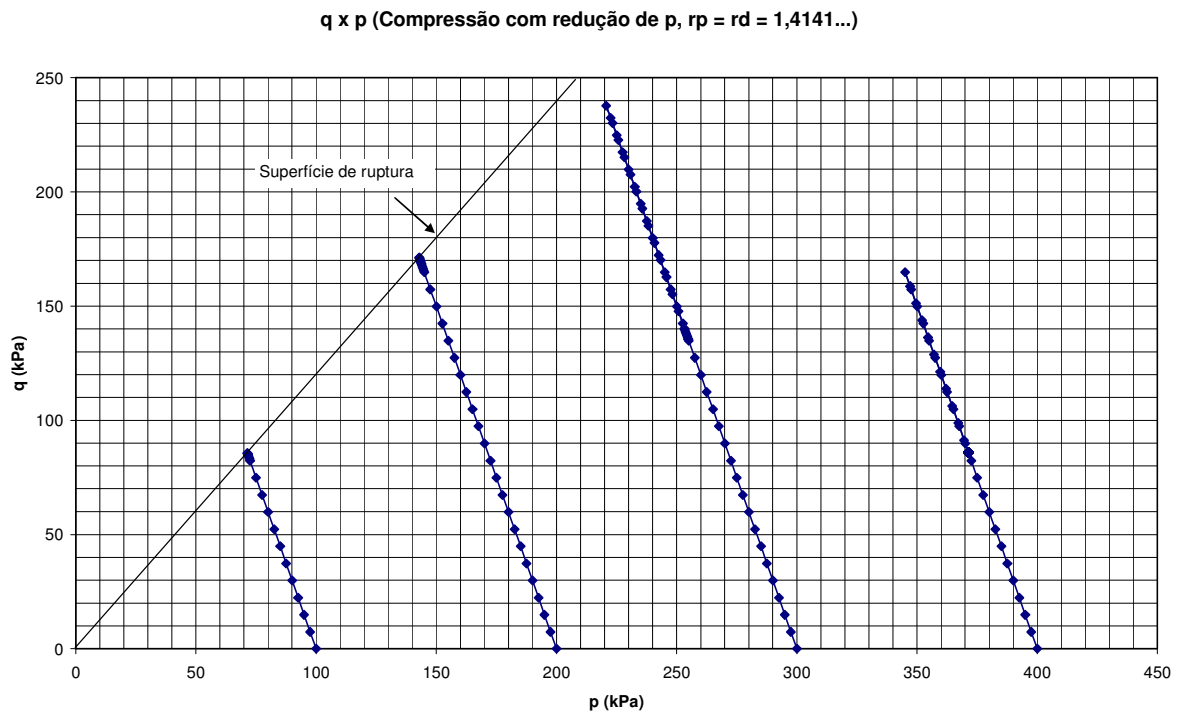
**Figura 4.25. Curvas  $\epsilon_v$  x  $\epsilon_s$ , de simulação de ensaios sob tensão normal média decrescente, para  $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa ( $r_p = 1,1$ ).**



**Figura 4.26. Trajetórias de tensões para simulação de ensaios sob tensão normal média decrescente, (a) gráfico de curvas múltiplas e (b)  $q$  x  $p$  ( $r_p = r_d = 1,414$ ).**

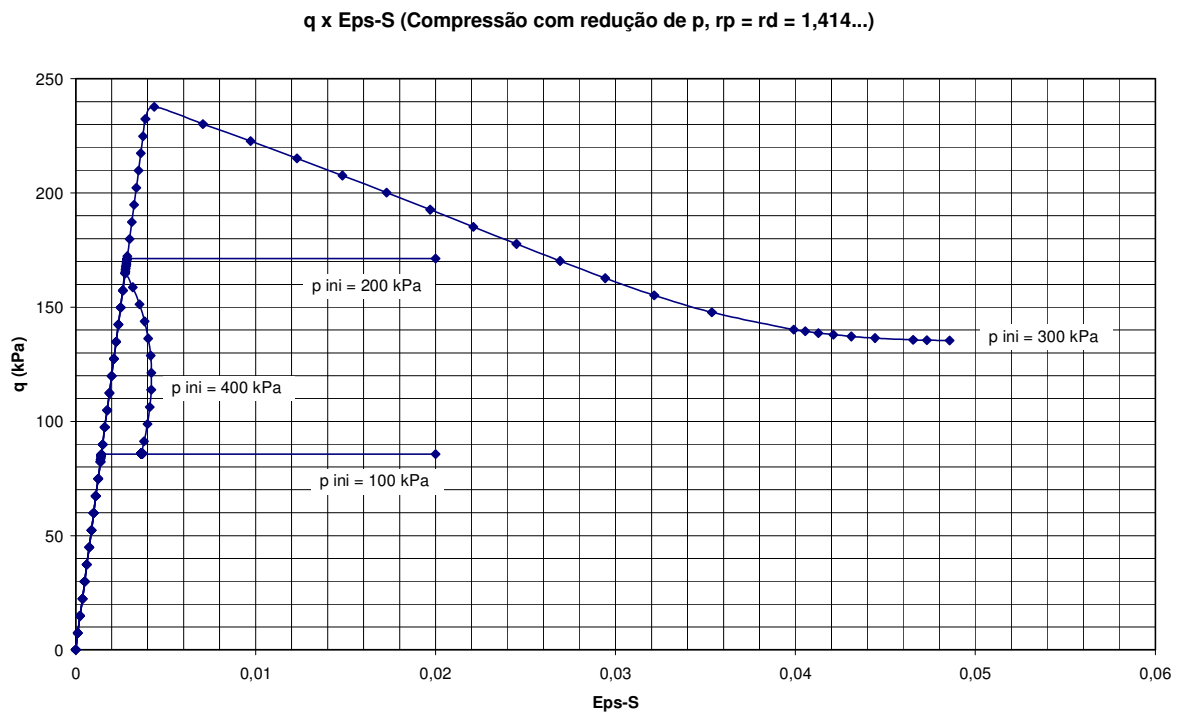


(a)

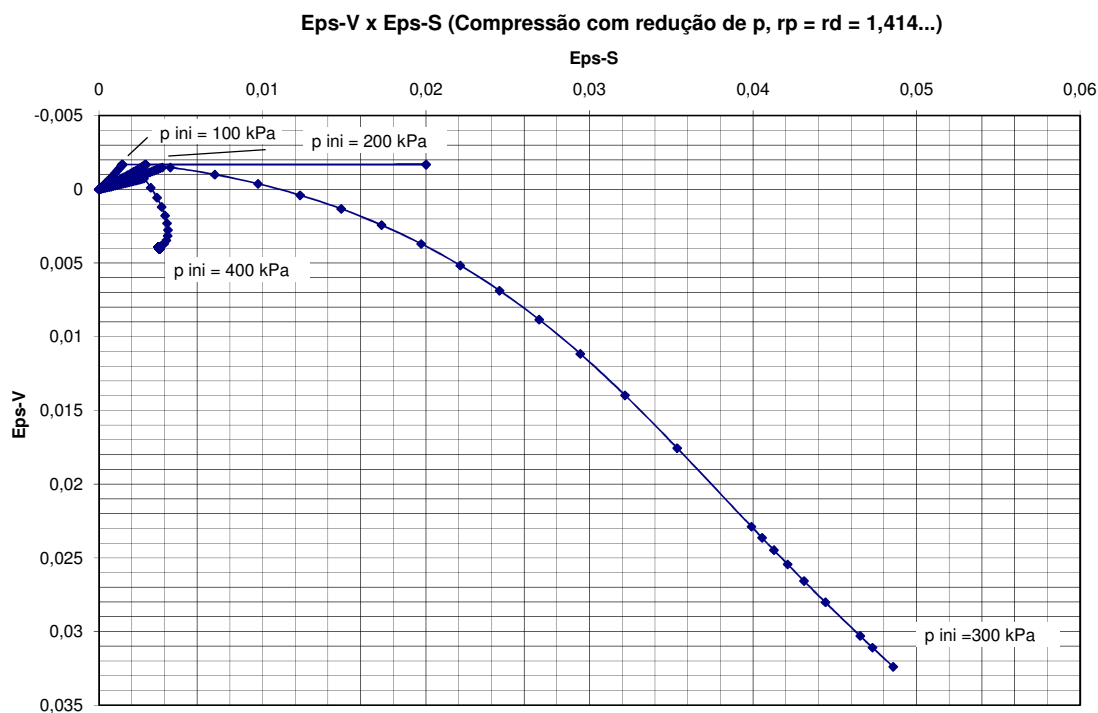


(b)

**Figura 4.27. Curvas tensão-deformação para simulação de ensaios sob tensão normal média decrescente, (a) curvas  $q \times \epsilon_s$ , para  $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa ( $r_p = 1,414$ ).**



**Figura 4.28. Curvas  $\epsilon_v$  x  $\epsilon_s$ , para simulação de ensaios sob tensão normal média decrescente, (a) curvas para  $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa e (b) curvas com  $\epsilon_s$  limitado a 0,1 ou 10% ( $r_p = 1,414$ ).**

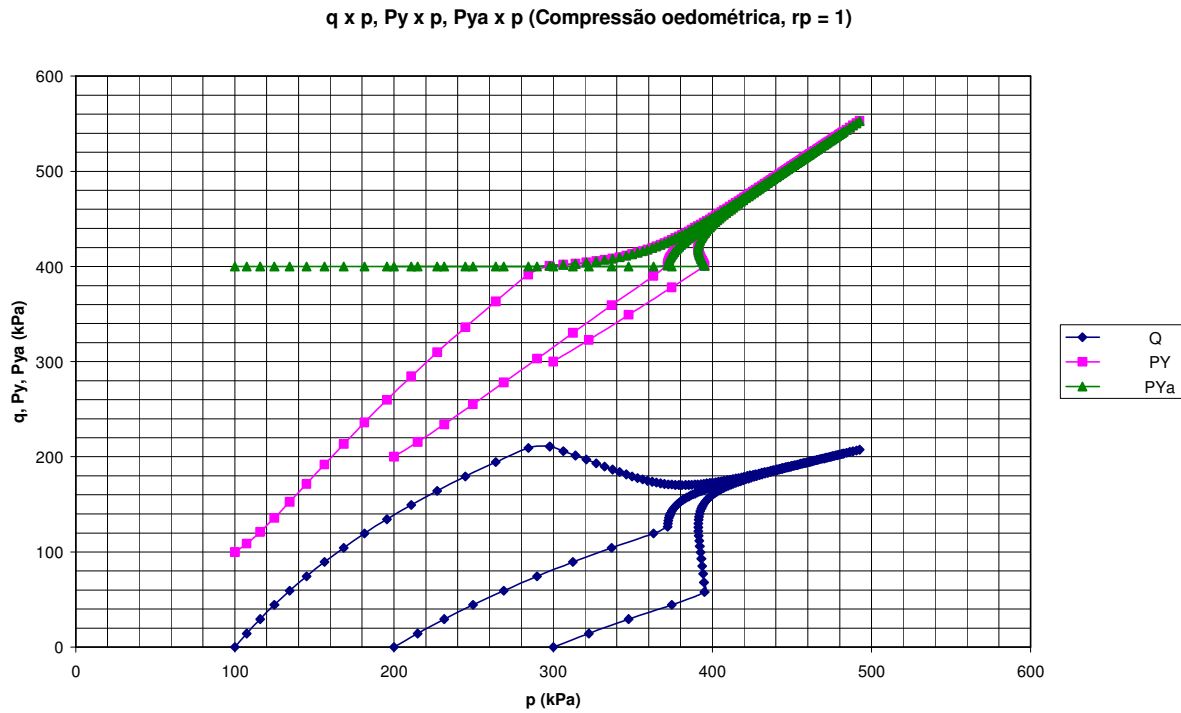


Dos gráficos apresentados nas figuras anteriores nota-se que, com o aumento da proporção do efeito de dano (curvas para  $r_p = 1,414$ ), as trajetórias de tensões já não atingem a reta de ruptura, sendo o estado final de tensão definido pelo dano e não pela superfície de ruptura.

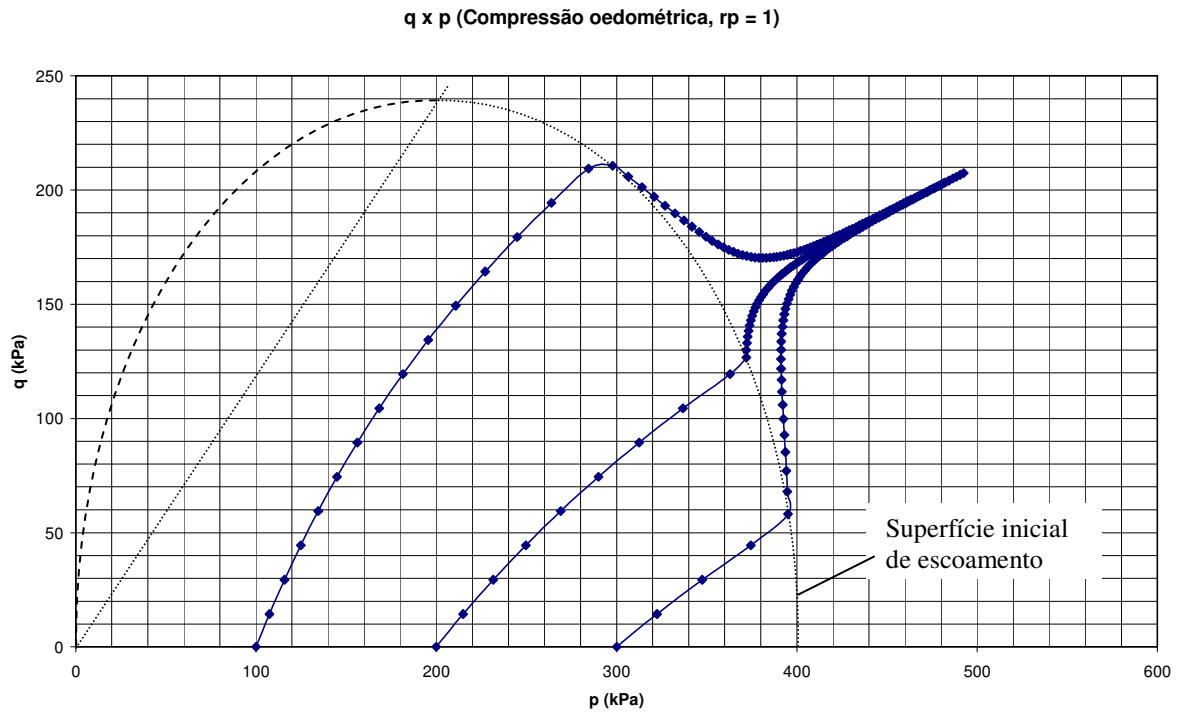
#### 4.1.4. Simulação de Ensaio de Compressão Confinada (oedométrica)

Nestas simulações é seguida trajetória de deformações em que os incrementos de deformação  $d\epsilon_v = 1,5.d\epsilon_s$ . Os incrementos utilizados nos exemplos foram  $d\epsilon_v = 1,5 \times 10^{-5}$ , e  $d\epsilon_s = 1,0 \times 10^{-5}$ . Foi examinada a influência do ponto inicial de tensão hidrostática, com o uso de valores de  $p_{ini} = 100, 200$  e  $300$  kPa. E a influência da forma da função de escoamento foi verificada pelo uso de três valores diferentes de  $r_p = 1,0; 1,1$  e  $1,414$ .

**Figura 4.29. (a) Curvas múltiplas e (b) curvas  $q \times p$ , para compressão confinada**  
**( $p_{ini} = 100, 200, 300 \text{ kPa}$  e  $r_p = 1,0$ ).**



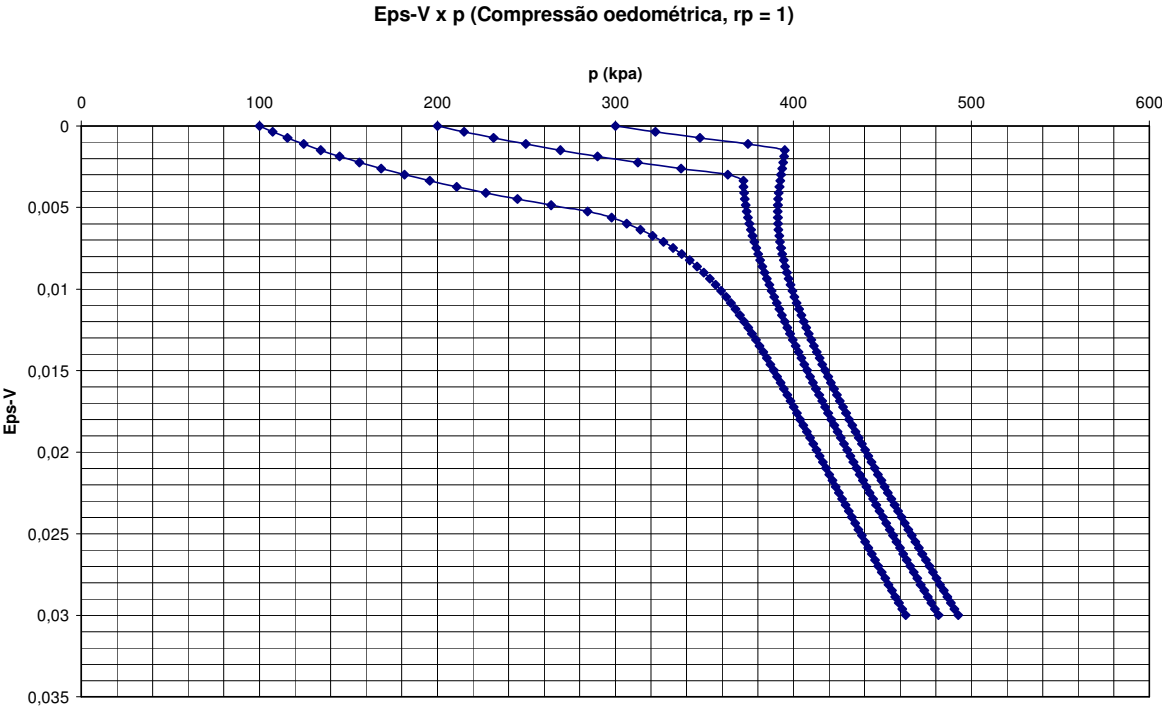
(a)



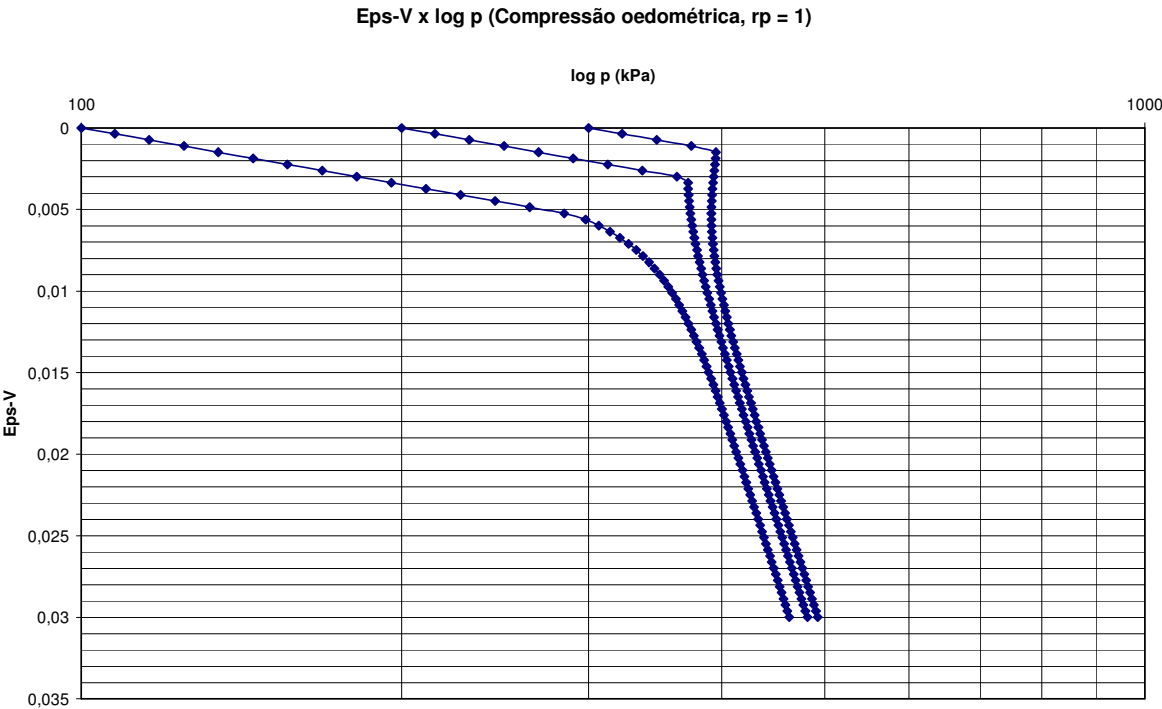
(b)



**Figura 4.30. Curvas  $\epsilon_v \times p$ , para compressão confinada**  
**( $p_{ini} = 100, 200, 300$  kPa e  $r_p = 1,0$ ).**

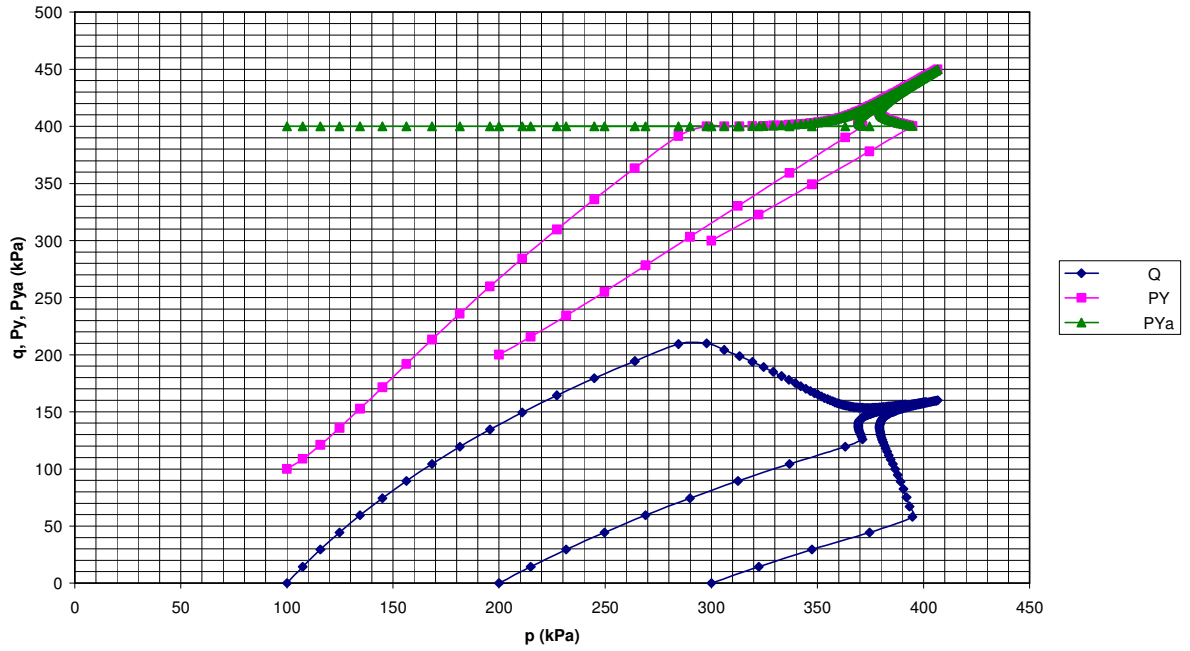


**Figura 4.31. Curvas  $\epsilon_v \times \log_{10} p$ , para compressão confinada**  
**( $p_{ini} = 100, 200, 300$  kPa e  $r_p = 1,0$ ).**



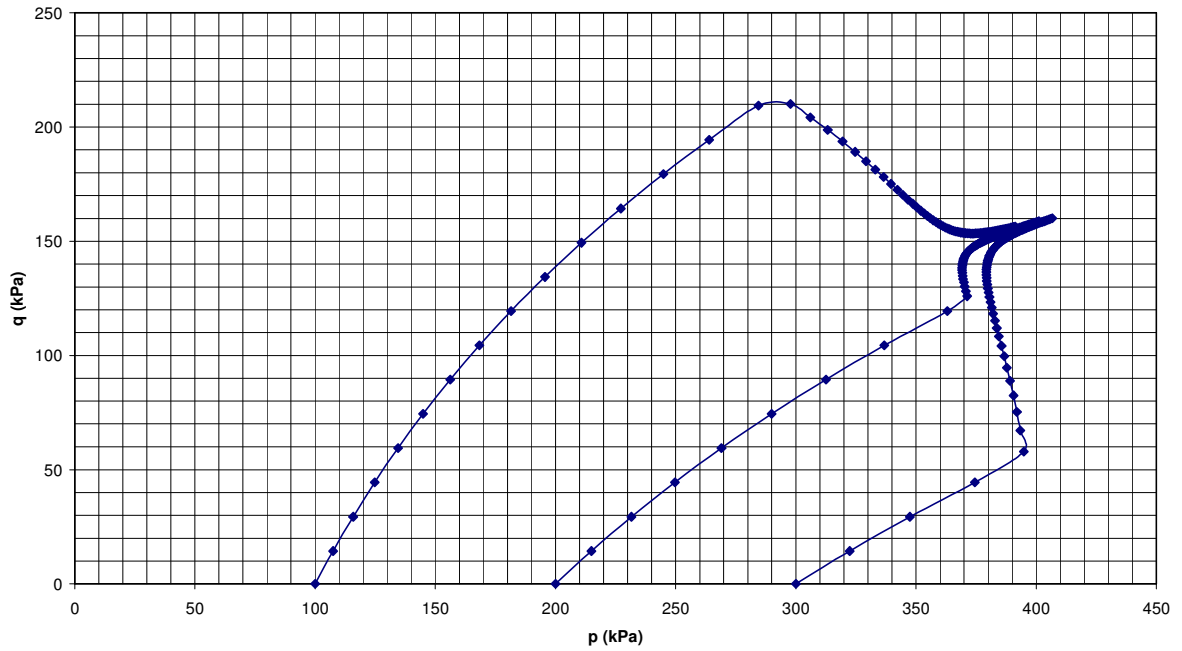
**Figura 4.32. (a) Curvas múltiplas e (b) curvas  $q \times p$ , para compressão confinada ( $p_{ini} = 100, 200, 300 \text{ kPa}$  e  $r_p = 1,1$ ).**

$q \times p, P_y \times p, P_{ya} \times p$  (Compressão oedométrica,  $r_p = 1,1$ )



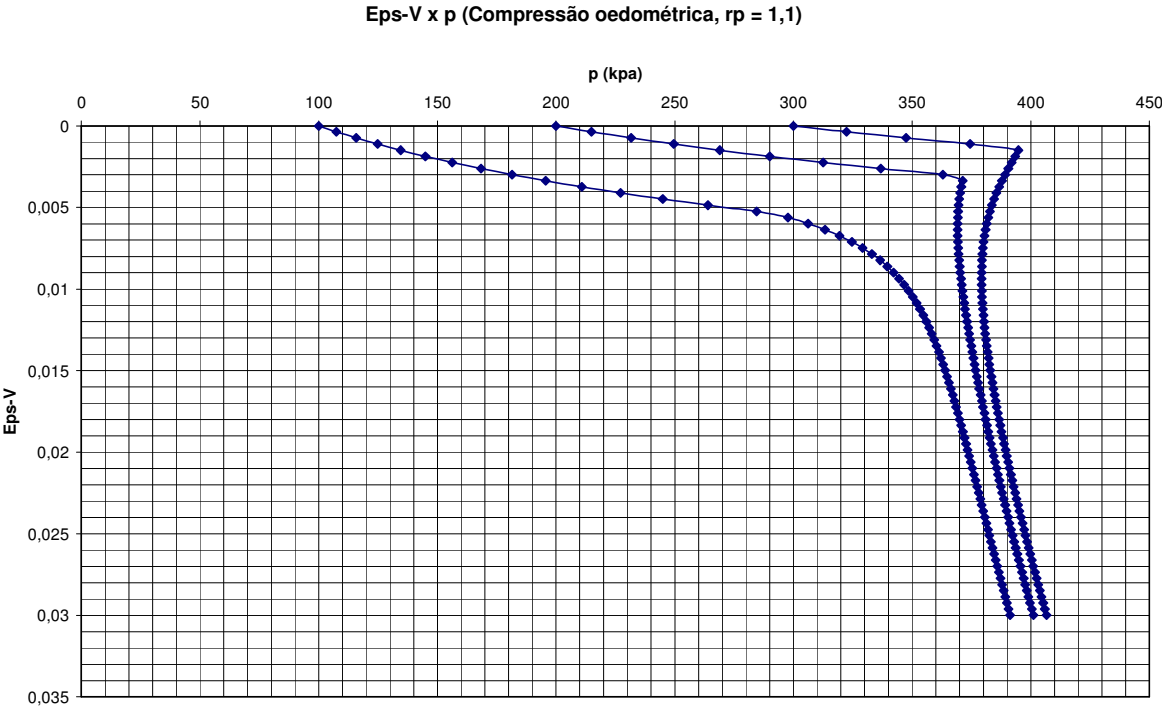
(a)

$q \times p$  (Compressão oedométrica,  $r_p = 1,1$ )

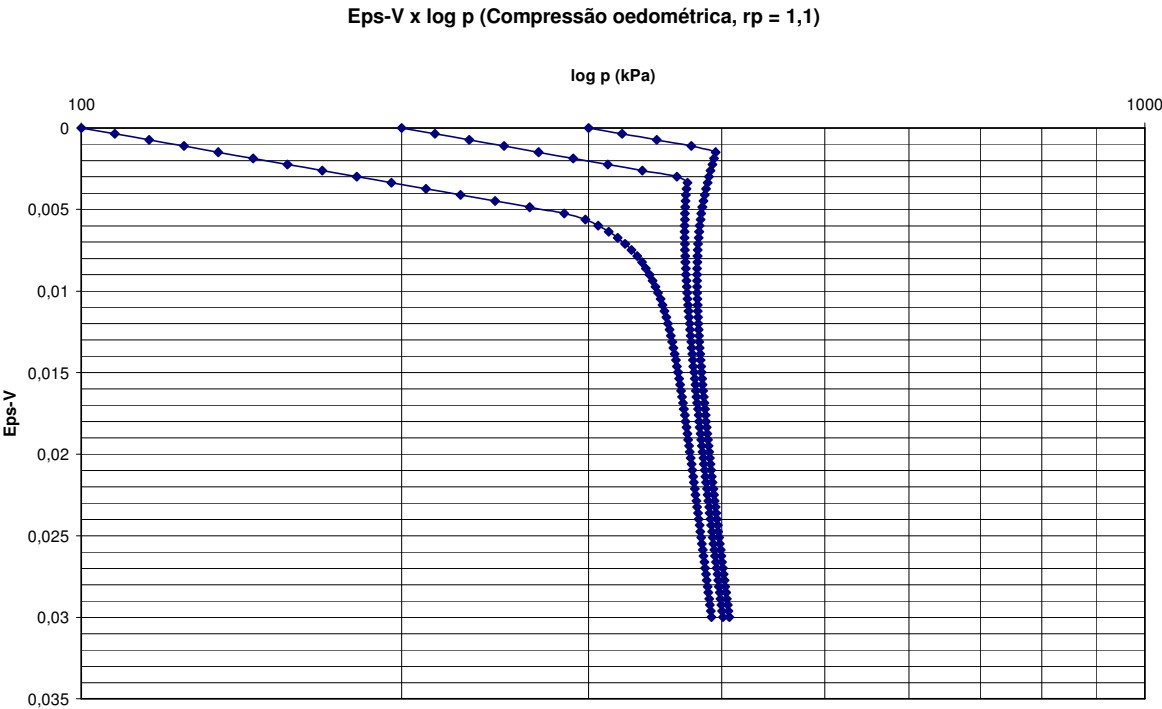


(b)

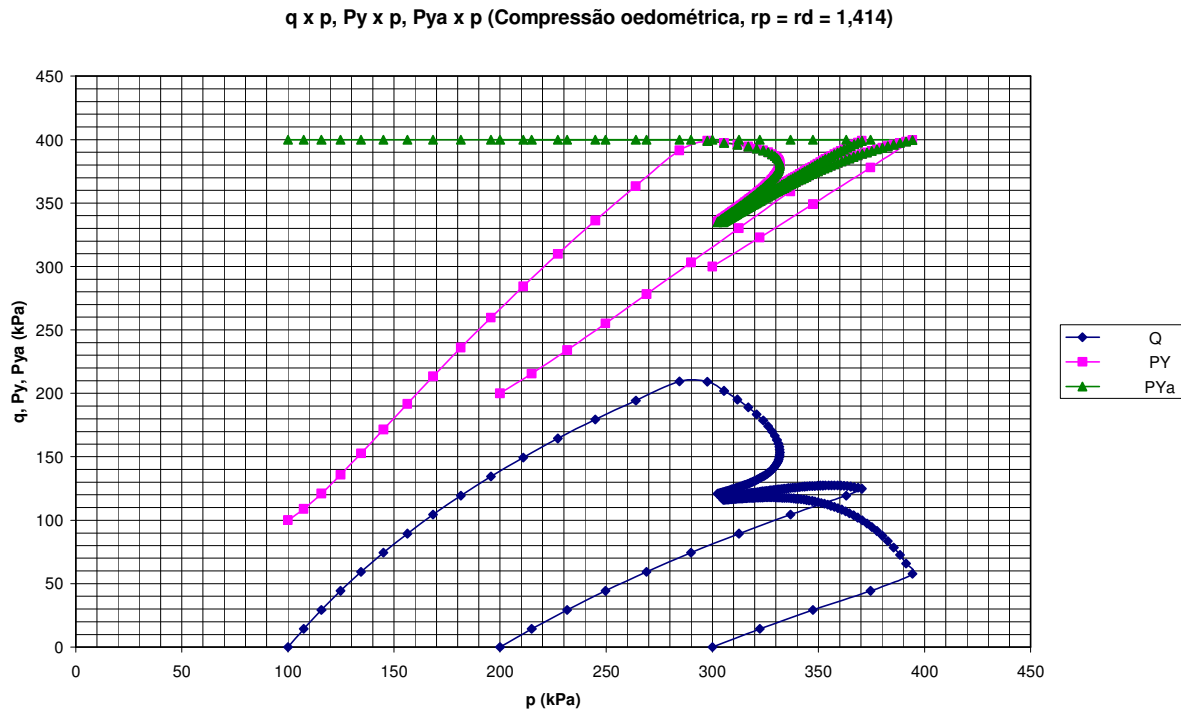
**Figura 4.33. Curvas  $\epsilon_v \times p$ , para compressão confinada**  
**( $p_{ini} = 100, 200, 300$  kPa e  $r_p = 1,1$ ).**



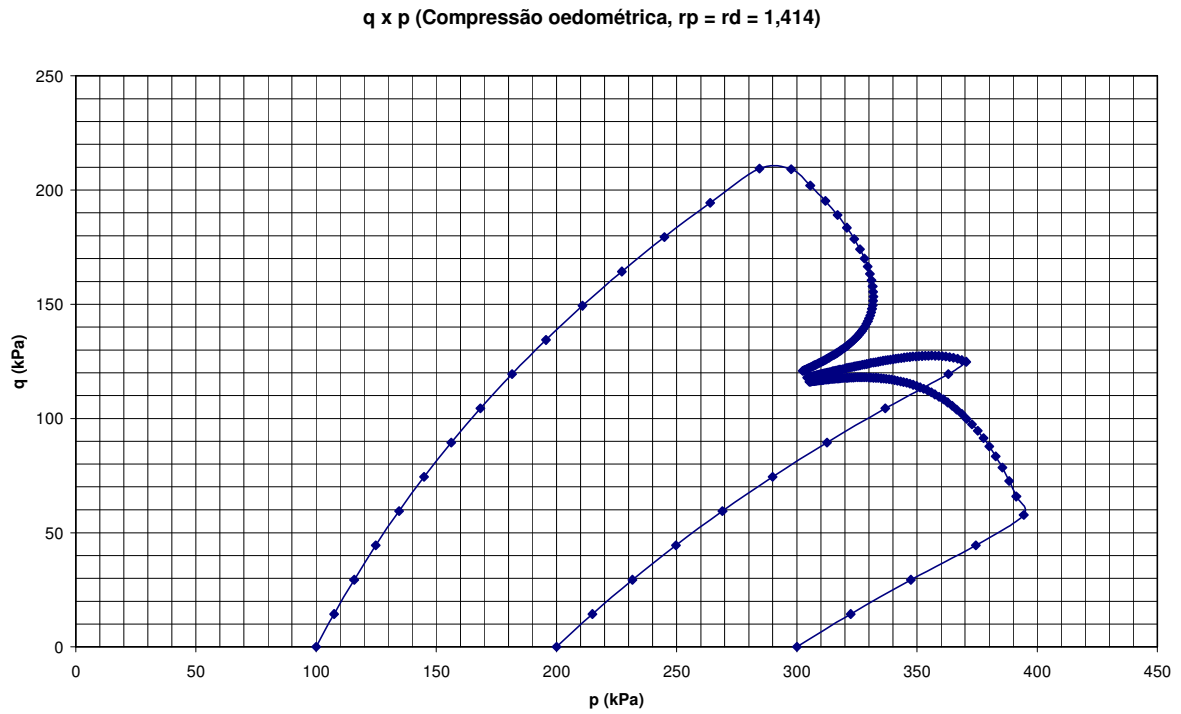
**Figura 4.34. Curvas  $\epsilon_v \times \log_{10}p$ , para compressão confinada**  
**( $p_{ini} = 100, 200, 300$  kPa e  $r_p = 1,1$ ).**



**Figura 4.35. (a) Curvas múltiplas e (b) curvas  $q \times p$ , para compressão confinada**  
**( $p_{ini} = 100, 200, 300 \text{ kPa}$  e  $r_p = 1,414$ ).**

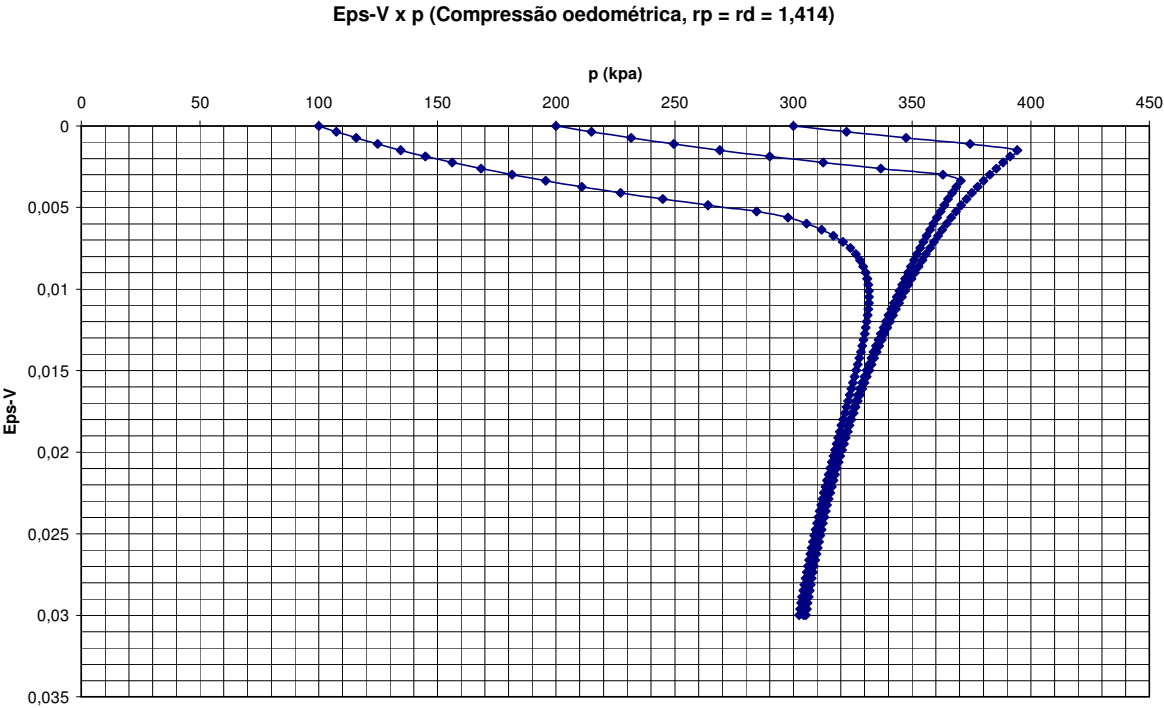


(a)

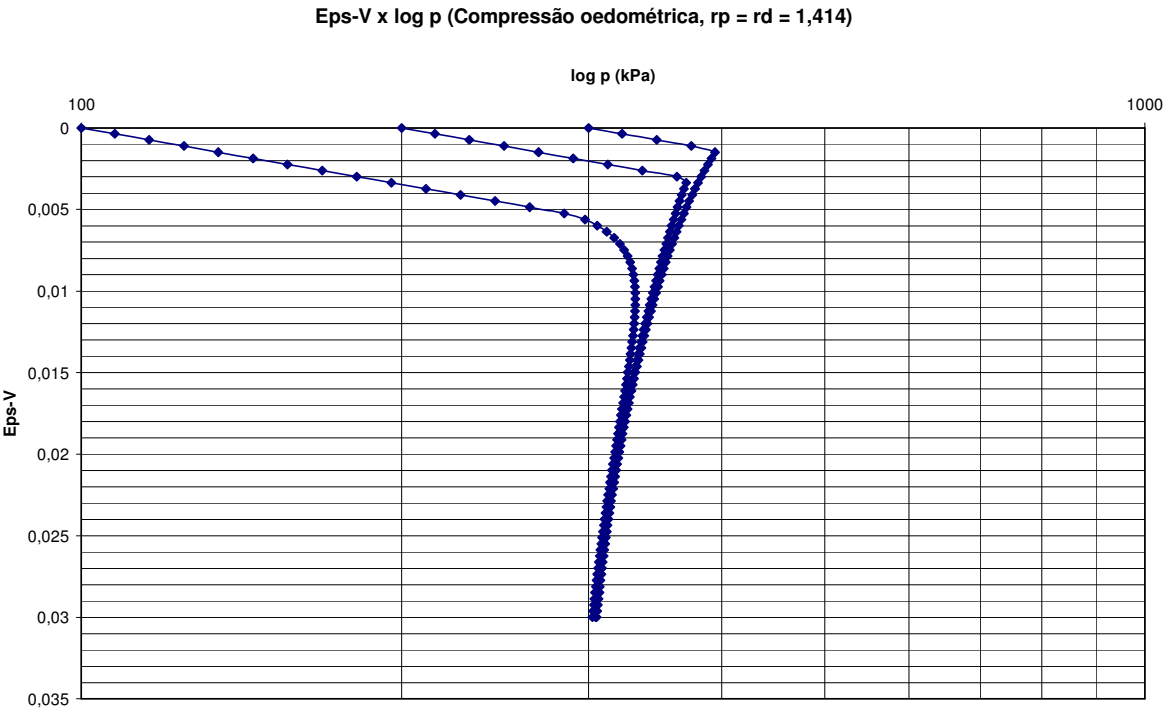


(b)

**Figura 4.36. Curvas  $\epsilon_v \times p$ , para compressão confinada  
( $p_{ini} = 100, 200, 300$  kPa e  $r_p = 1,414$ ).**



**Figura 4.37. Curvas  $\epsilon_v \times \log_{10}p$ , para compressão confinada  
( $p_{ini} = 100, 200, 300$  kPa e  $r_p = 1,414$ ).**



Para o caso de  $r_p = 1$ , ilustrado nas Figuras 4.29 a 4.31, ocorre apenas plastificação com endurecimento. Para o caso correspondente a  $r_p = 1,1$  ilustrado nas Figuras 4.32 a 4.34, ocorre além de plastificação com endurecimento, efeito de dano, mas ainda ocorre expansão da superfície de plastificação. Para o terceiro caso, de  $r_p = 1,414$ , o efeito de dano é preponderante sobre o de plastificação e ocorre contração da superfície de escoamento, como é possível concluir das Figuras 4.35 a 4.37.

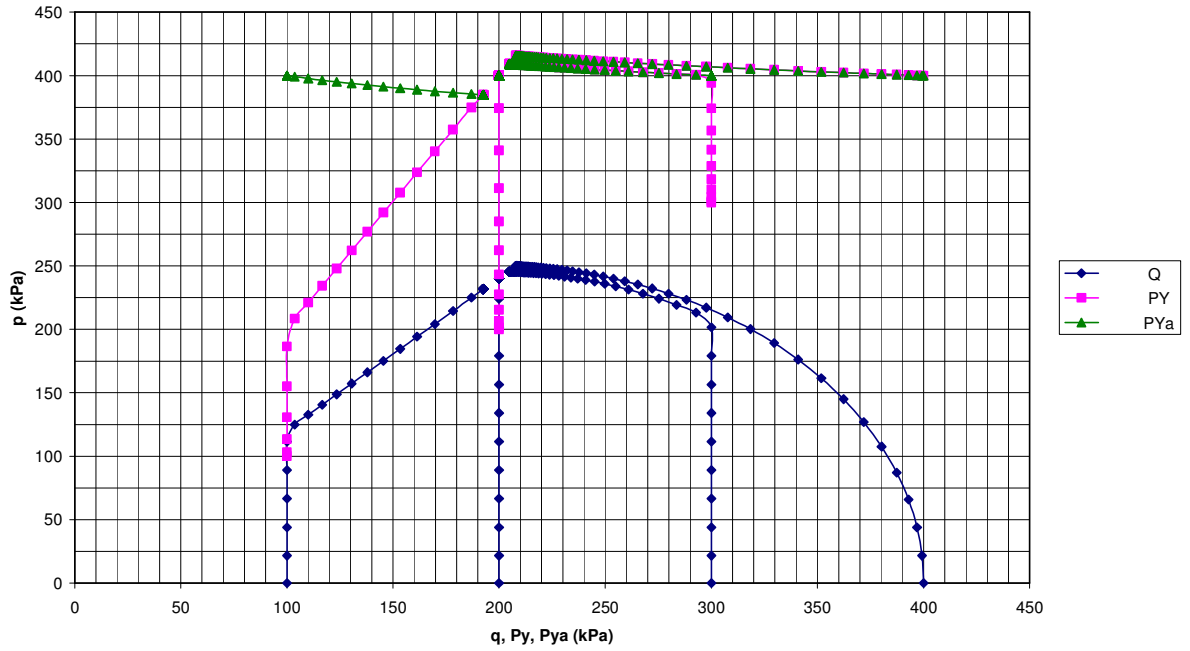
Aspecto observado no modelo, e antecipado no item 3.4.4, é o da mudança da trajetória de tensões ao ser atingida a superfície de escoamento, como pode ser visto nas Figuras 4.29, 4.32 e 4.35. Após ser atingida a superfície de escoamento as trajetórias convergem para uma trajetória única, independentemente do ponto inicial do carregamento. E, ainda, convergem em direção para o exterior da superfície inicial de escoamento, se o dano tiver influência menor. Para o caso de dano maior, com  $r_p = r_d = 1,414$ , ocorre contração da superfície de escoamento e as trajetórias de tensões continuam a convergir, mas, agora, para o interior da superfície de escoamento original.

#### 4.1.5. Simulação de Ensaio de Compressão Não-Drenada

Nestas simulações é seguida trajetória de deformações em que os incrementos de deformação  $d\epsilon_v$  são nulos, e os incrementos de deformação de distorção  $d\epsilon_s$  são diferentes de zero. Os incrementos utilizados nos exemplos a seguir foram  $d\epsilon_v = 0$ , e  $d\epsilon_s = 1,5 \times 10^{-5}$ . Foi examinada a influência do ponto inicial de tensão hidrostática, isto é, da tensão inicial de adensamento, com o uso de valores de  $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa, para um material com tensão de pré-adensamento de  $400$  kPa. As simulações correspondem ao comportamento esperado para material com razão de pré-adensamento  $OCR = 4,0; 2,0; 1,33$  e  $1,0$ , para as tensões iniciais  $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa, respectivamente. E a influência da forma da função de escoamento foi verificada pelo uso de três valores diferentes de  $r_p = 1,0; 1,1$  e  $1,414$ .

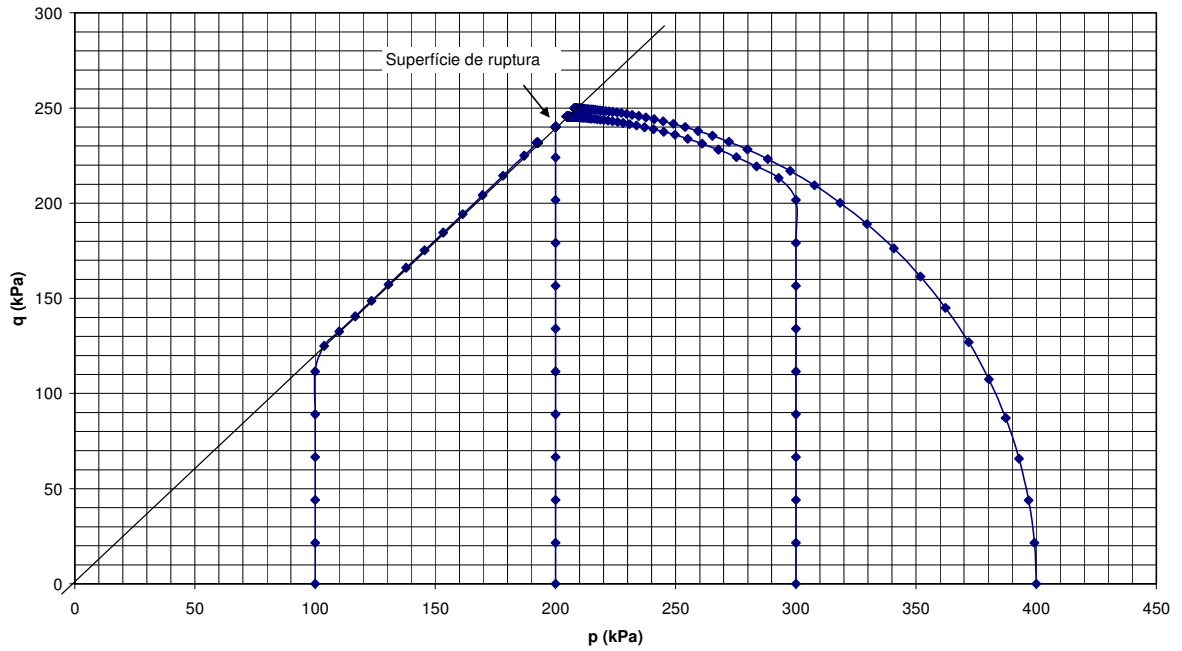
**Figura 4.38. (a) Curvas múltiplas e (b) curvas  $q \times p$ , para compressão confinada ( $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa, e  $r_p = 1,0$ ).**

$q \times p$ ,  $P_y \times p$ ,  $P_{ya} \times p$  (Compressão não-drenada,  $r_p = 1$ )



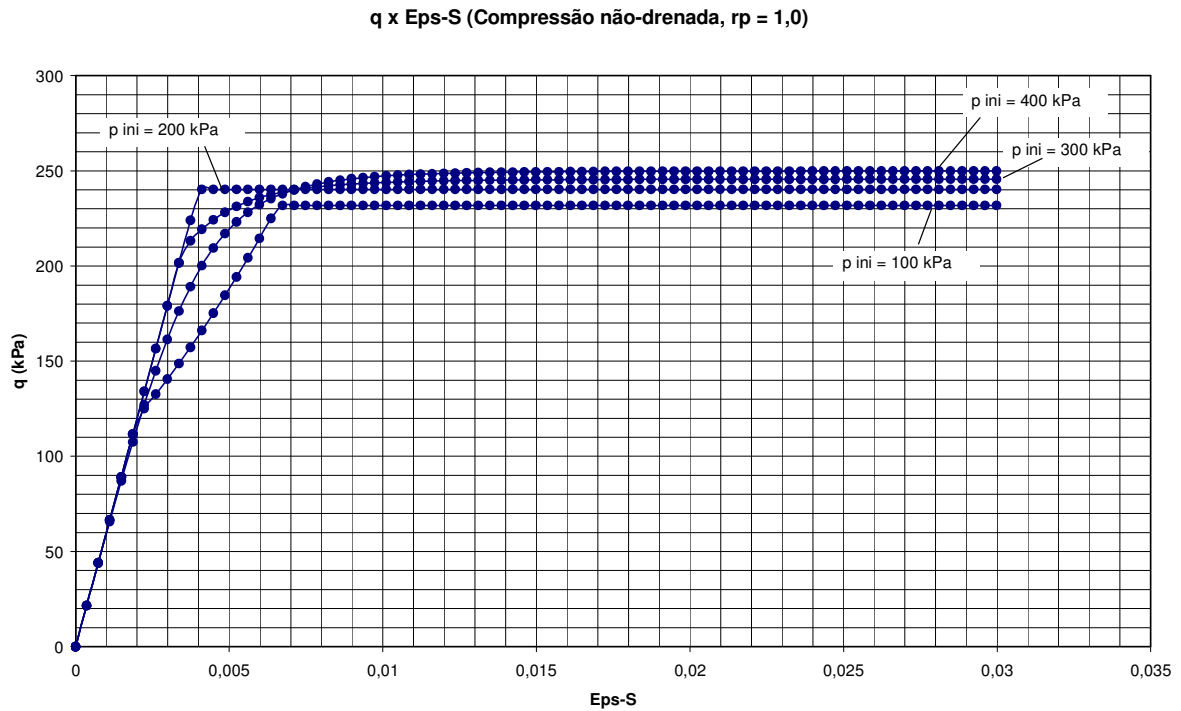
(a)

$q \times p$  (Compressão não-drenada,  $r_p = 1$ )

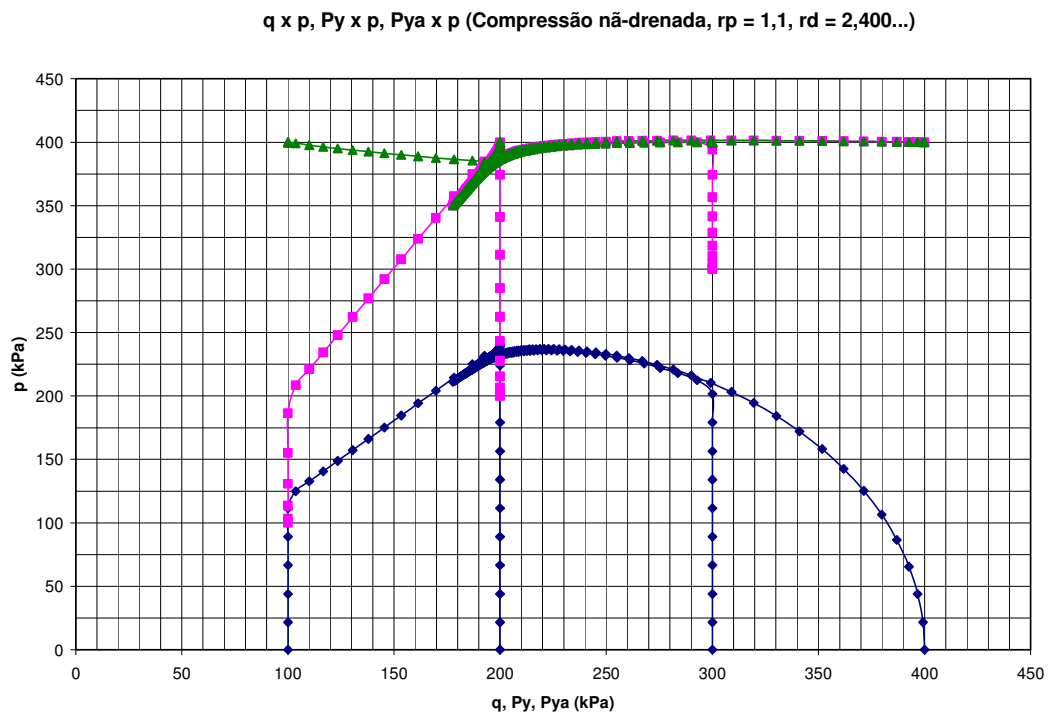


(b)

**Figura 4.39. (a) Curvas  $q \times \varepsilon_s$ , caso de compressão confinada**  
**( $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa, e  $r_p = 1,0$ ).**

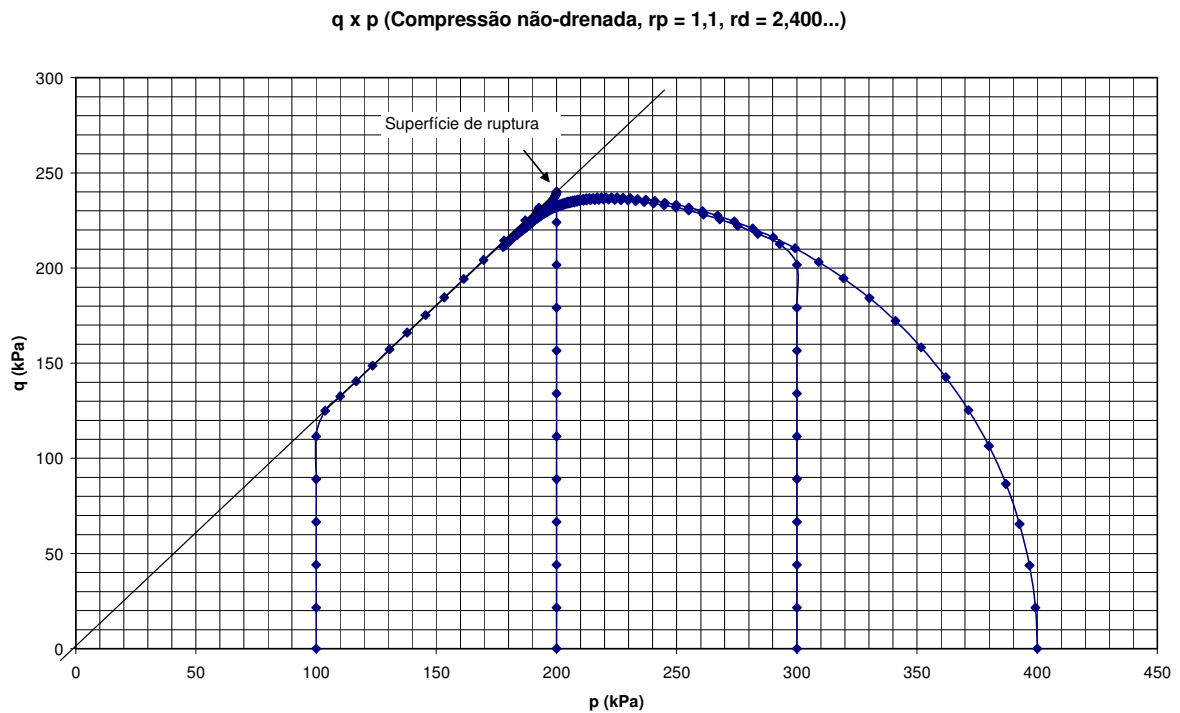


**Figura 4.40. (a) Curvas múltiplas e (b) curvas  $q \times p$ , para compressão confinada**  
**( $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa, e  $r_p = 1,1$  e  $r_d = 2,400...$ ).**



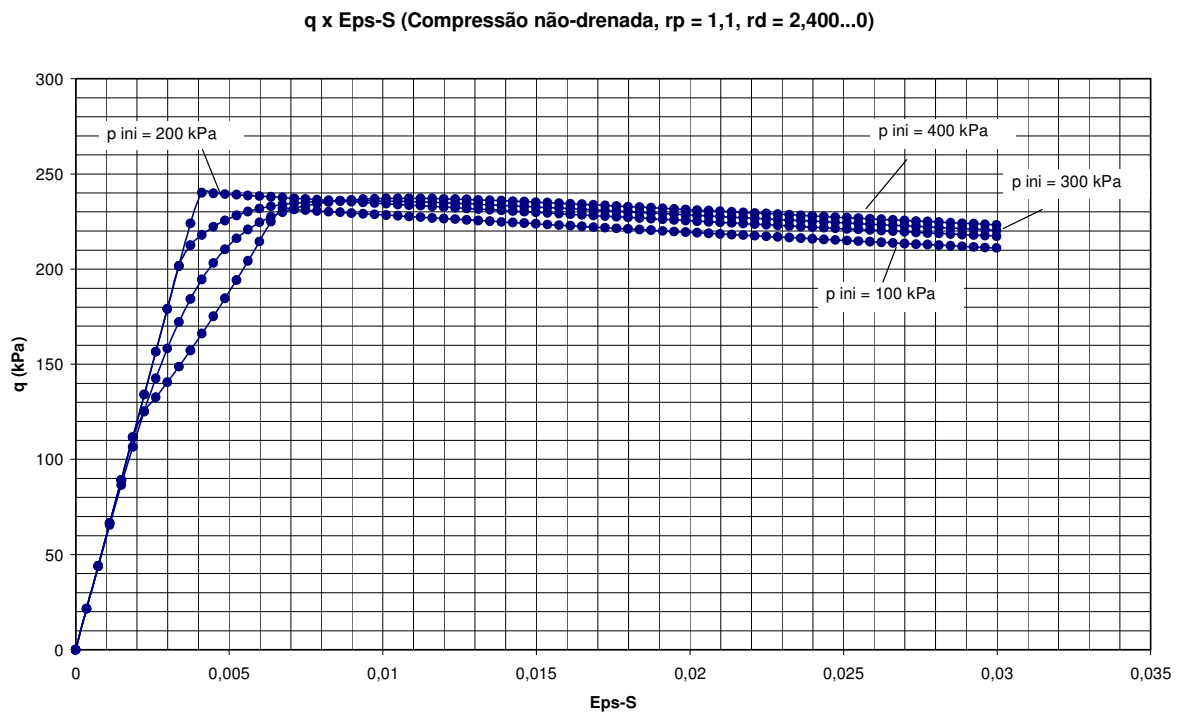
(a)





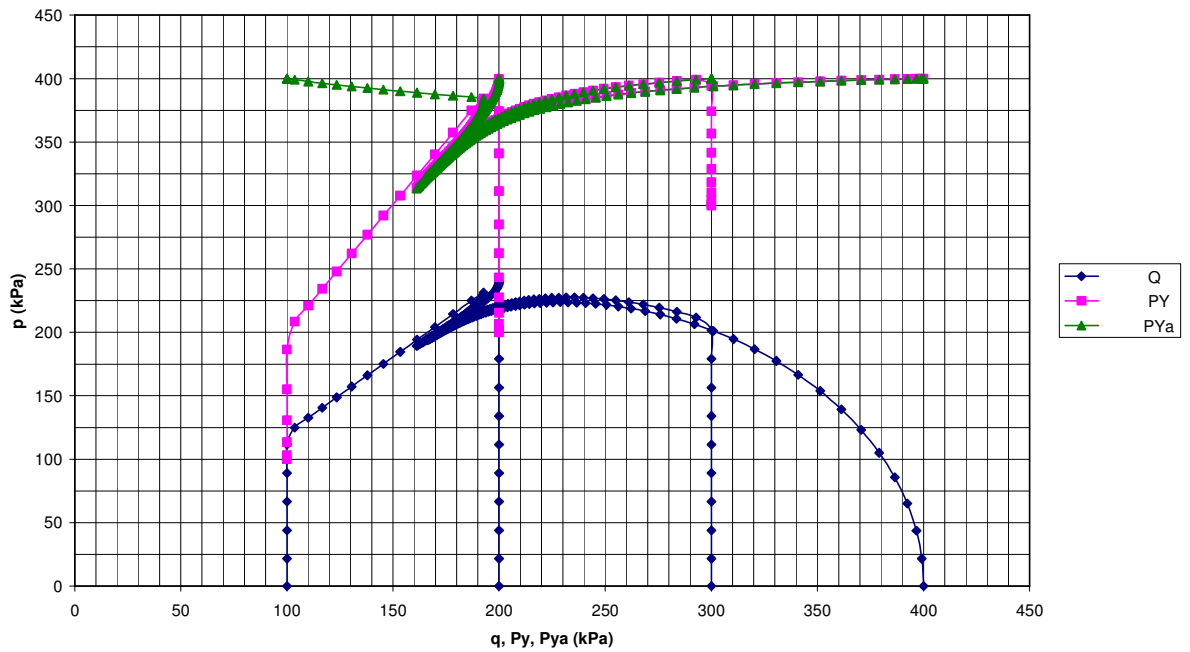
(b)

**Figura 4.41. (a) Curvas  $q \times \epsilon_s$ , caso de compressão confinada ( $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa, e  $r_p = 1,1$  e  $r_d = 2,400...$ ).**



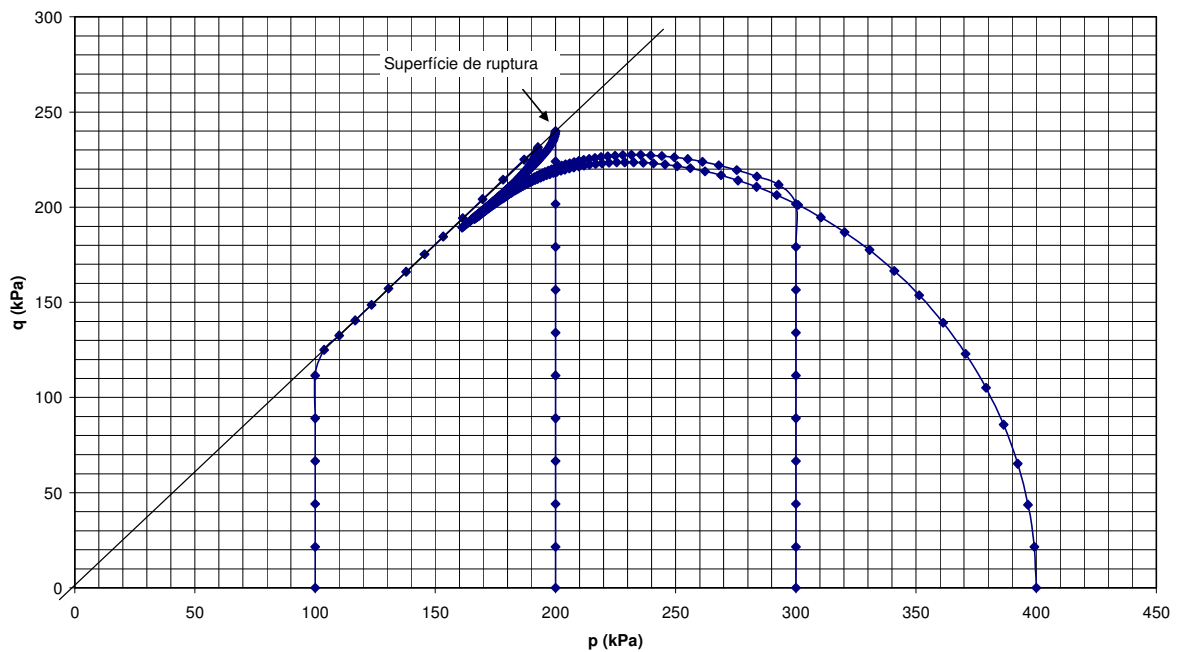
**Figura 4.42. (a) Curvas múltiplas e (b) curvas  $q \times p$ , para compressão confinada**  
**( $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa, e  $r_p = r_d = 1,414...$ ).**

$q \times p, P_y \times p, P_{ya} \times p$  (Compressão não-drenada,  $r_p = r_d = 1,414...$ )



(a)

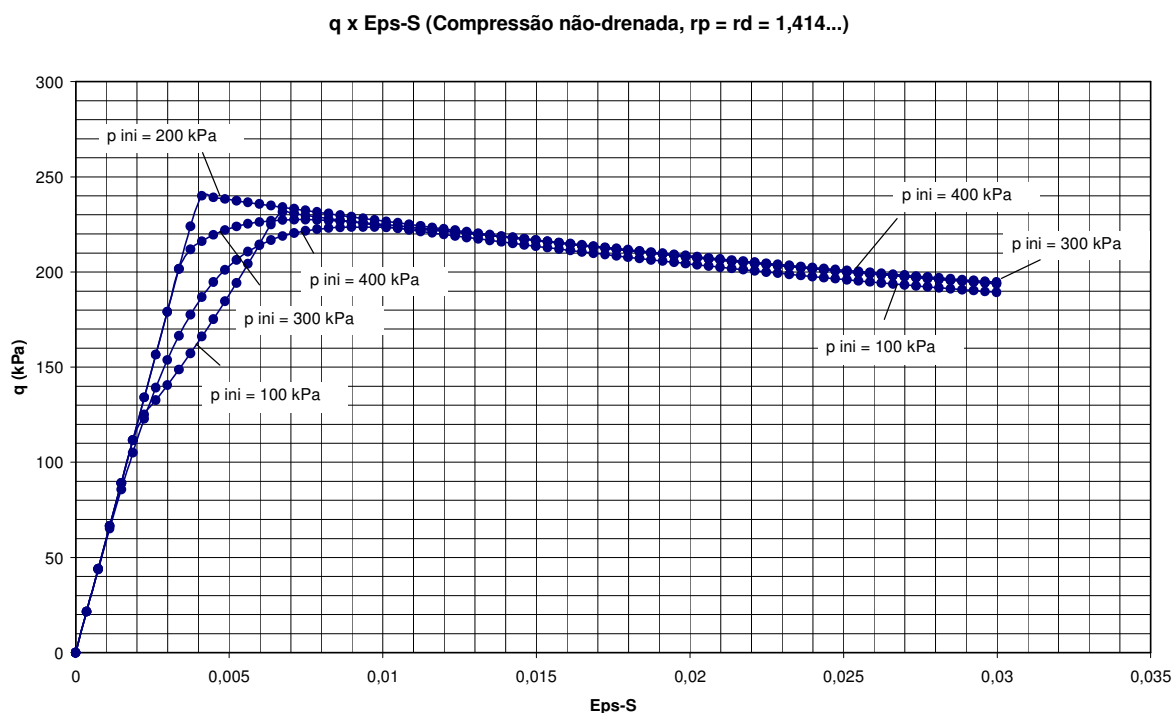
$q \times p$  (Compressão não-drenada,  $r_p = r_d = 1,414...$ )



(b)

**Figura 4.43. (a) Curvas  $q \times \epsilon_s$ , caso de compressão confinada**

**( $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa, e  $r_p = r_d = 1,414...$ ).**



Os resultados de simulação de compressão não-drenada foram obtidos considerando a interferência das trajetórias de tensão com a superfície de ruptura e com a superfície de plastificação. Para trajetórias de tensão, como as correspondentes às tensões iniciais de 100 kPa, ao ser atingida a superfície de ruptura, os incrementos de variáveis plásticas e do fator multiplicador, foram determinados com base nas expressões (3.66) a (3.68). O fluxograma do programa utilizado neste caso está apresentado no Anexo 4. Para incrementos de deformação que produzem ultrapassagem da superfície de escoamento, os incrementos de variáveis internas e os incrementos de tensões foram determinados pelas expressões apresentadas no item 3.5 (*Modelo MCC hiperplástico com dano acoplado*).

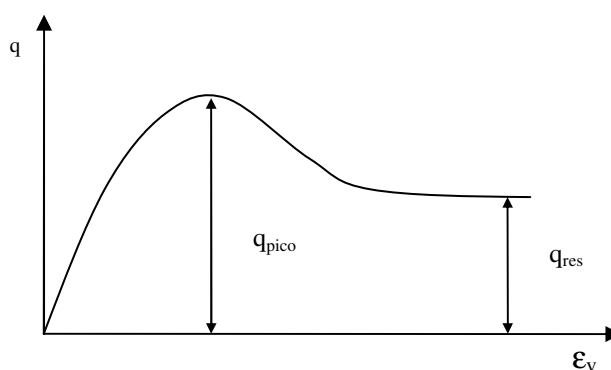
As resistências ao cisalhamento, observadas nos gráficos  $q \times Eps-S$ , mostraram que a resistência residual diminui com o aumento do efeito de dano, isto é, com o aumento do parâmetro  $r_p$ . As trajetórias de tensão convergem para um ponto crítico, no caso em que só há efeito de plastificação, caso de  $r_p = 1$ . Nos demais casos, em que ocorre plastificação e dano, o final das trajetórias de tensão acompanha a superfície de ruptura.

Em todos os casos as resistências de pico mostraram alguma influência do ponto inicial de carregamento, ao passo que as resistências residuais mostraram pouca influência do ponto inicial e uniformidade de desenvolvimento com a deformação.

## **4.2 ADAPTAÇÃO DO MODELO HIPERPLÁSTICO COM DANO ACOPLADO A SOLOS ESTRUTURADOS**

O efeito de estrutura se reflete nos solos pré-adensados e nos solos residuais estruturados pela presença de uma resistência de pico ao cisalhamento, resistência esta que tende a valor de resistência residual com o aumento da deformação e da destruição da estrutura do material. A Figura 4.44 ilustra esta situação comumente observada em ensaios em solos.

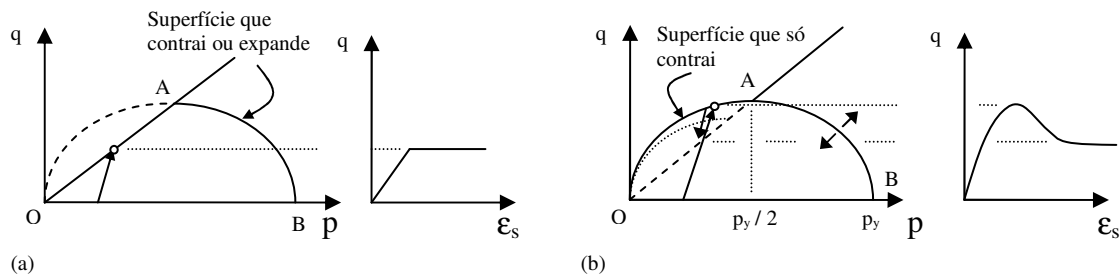
**Figura 4.44. Comportamento tensão-deformação típico de solos pré-adensados e de solos residuais estruturados.**



Tal representação não é possível de ser feita com o modelo apresentado no item 4.1, para simulação de ensaios drenados. Como registrado por Alonso et al. (1990), a consideração do efeito de estrutura implica na necessidade da trajetória de tensão poder ultrapassar a superfície de ruptura. No presente modelo tal condição foi estabelecida pela modificação da combinação das superfícies de ruptura e de escoamento utilizadas para o modelo sem estrutura. Ou seja, para o modelo sem estrutura a superfície elíptica de escoamento só existe abaixo da superfície de ruptura, e pode sofrer expansão ou, eventualmente, contração. Para o modelo estruturado admite-se a existência da superfície de escoamento acima da superfície de ruptura, que deve obrigatoriamente, por coerência com o

comportamento real dos solos pré-adensados e estruturados, sofrer contração até ser atingido estado último de tensão sobre a superfície de ruptura, ou estado último de dano. A contração da superfície de escoamento é obrigatória por refletir processo de destruição de estrutura. A Figura 4.45 ilustra a modificação aplicada ao modelo sem estrutura.

**Figura 4.45. Superfícies de ruptura e de escoamento para modelo: (a) sem consideração de efeito de estrutura e (b) com consideração de efeito de estrutura.**



A superfície de escoamento elíptica é definida pelos pontos  $OAB$ , e é dada pela equação (2.204), aqui repetida:

$$y = \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 + \left( \frac{q}{M} \right)^2 - \left( \frac{p_y}{2} \right)^2 \leq 0 \quad (2.204 - \text{rep.})$$

onde a tensão de escoamento hidrostática corrente  $p_y$ , é dada pela expressão (2.214):

$$p_y = p_{y0}(\alpha_p^v, \alpha_d^v, \alpha_d^s) = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v) \cdot \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)} \quad (2.214 - \text{rep.})$$

Na função da pressão de escoamento (2.214) o fator função da variável interna de plasticidade volumétrica pode produzir endurecimento ou amolecimento, em outras palavras, pode se tornar maior ou menor do que um. Por outro lado, os fatores associados às variáveis internas de dano produzem sempre valores menores do que um. Valores maiores do que um significam expansão da superfície de escoamento e valores menores do que um significam contração da superfície de escoamento.

A imposição da contração obrigatória da superfície de escoamento no trecho  $OA$  da Figura 4.45(b) pode ser assegurada pelo uso de apenas uma restrição, imposta sobre a variável interna de dano volumétrica. A variável interna de plasticidade volumétrica torna-se negativa neste trecho, já que os seus incrementos têm como fator o termo  $(p - p_y/2)$ , que é negativo em toda a região  $OA$ , mas valores negativos reduzem o valor de  $p_y$  dado por (2.214) e produzem,

portanto, contração. Por outro lado, os incrementos da variável interna de dano de distorção  $\alpha'_d$ , dados por (3.10), são sempre positivos, sobre toda a elipse (inclusive a parte não desenhada abaixo do eixo horizontal), e produzem sempre efeito de redução de  $p_y$ . Por fim, a variável interna de dano volumétrica, que deve variar entre 0 e 1, com crescimento monotônico, necessitou de restrição no programa de cálculo, onde foi imposta a condição de incremento nulo se o valor calculado resultasse negativo, o que, ademais, não tem sentido físico. Apesar desta restrição os valores da tensão de escoamento  $p_y$  calculados com base nos incrementos de tensão, utilizando a equação da elipse (2.204), e com base na equação (2.214), utilizando os valores atualizados da variável interna de plasticidade  $\alpha'_p$ , e das variáveis internas de dano  $\alpha'_d$ , e  $\alpha''_d$ , foram muito próximos. Discrepâncias foram observadas apenas para os valores limites das variáveis internas de dano, no entorno de 0,99.

Adiante se apresentam os resultados de simulação de trajetórias de carregamento com tensão  $p$  crescente, constante e decrescente, para os valores de  $r_p = 1,0; 1,1$  e  $1,414$ .

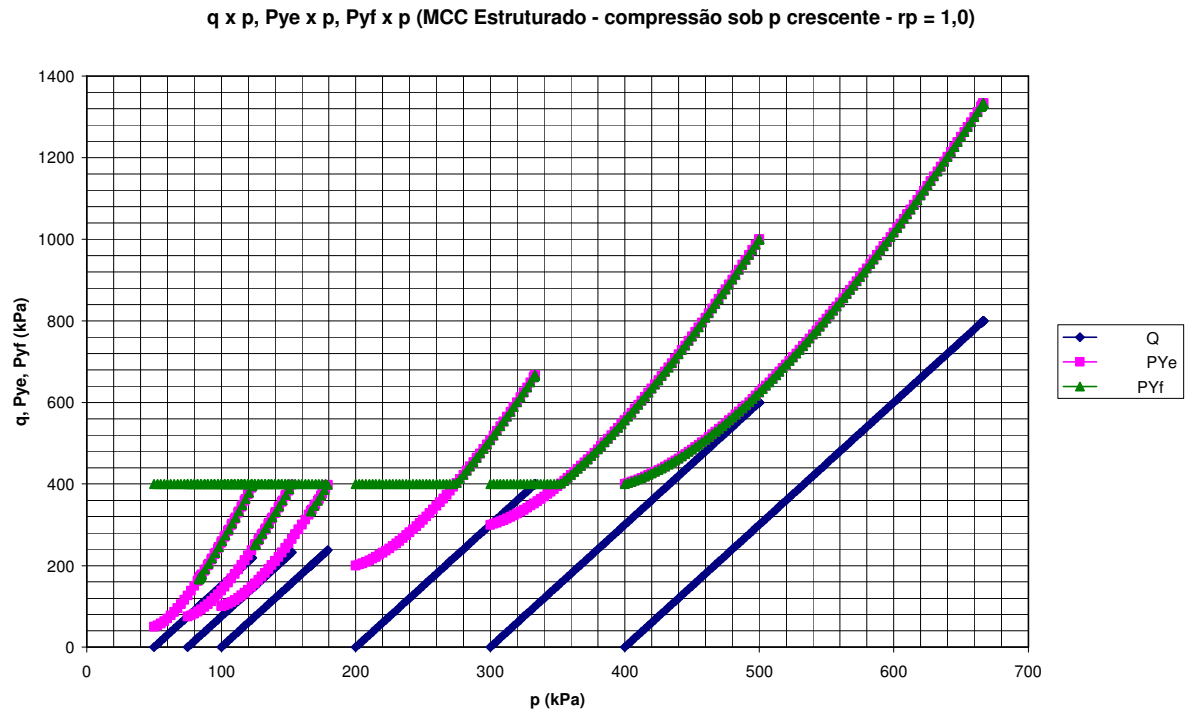
#### 4.2.1. Simulação de Ensaio de Compressão Triaxial Convencional (CTC)

A simulação dos ensaios de compressão triaxial convencional corresponde ao caso de tensão hidrostática crescente.

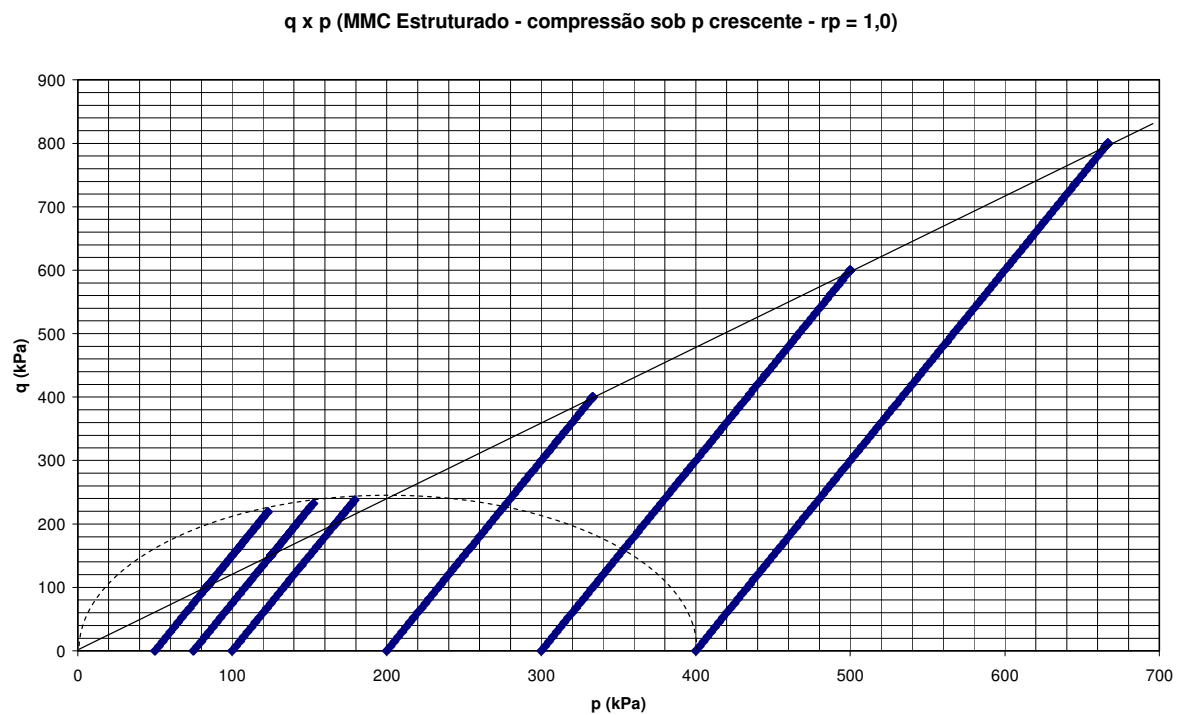
Como já citado no início deste capítulo, nos ensaios CTC é mantida constante a tensão confinante ( $\sigma_c = \sigma_2 = \sigma_3$ ) e é aumentada a tensão vertical ( $\sigma_v = \sigma_1$ ). A Figura 4.46 mostra as trajetórias de ensaio e a variação da tensão de escoamento ao longo do cálculo. As tensões  $P_{ye}$  e  $P_{yf}$ , referem-se às tensões de escoamento correspondentes ao novo diâmetro maior da elipse após o incremento de tensão ( $dp$ ,  $dq$ ) e à tensão de escoamento calculada por (2.214) para os valores das variáveis internas acumuladas até o ponto, respectivamente.

Foram simuladas as curvas de ensaio para tensões de adensamento isotrópicas iniciais de valores  $p = 50, 75, 100, 200, 300$  e  $400$  kPa. O efeito de estrutura é notável para valores maiores de razão de pré-adensamento, como pode ser observado nas figuras à frente.

**Figura 4.46. Trajetórias de tensões para simulação de ensaios CTC, (a) Curvas múltiplas e (b) curva  $q \times p$  ( $r_p = 1$ ).**



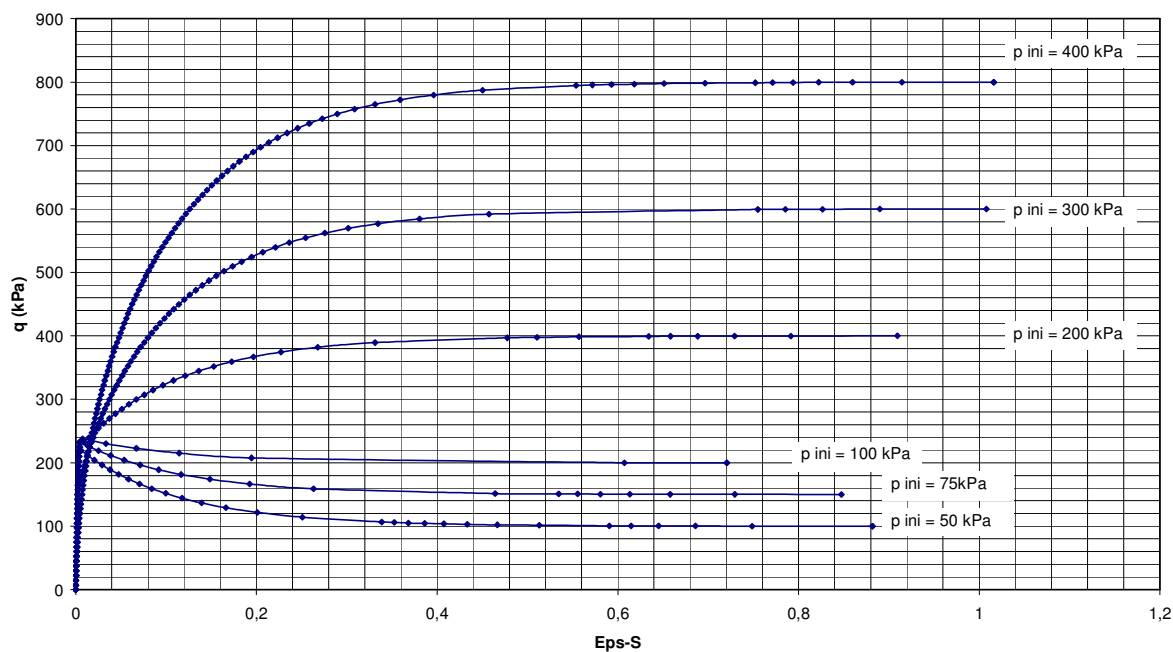
(a)



(b)

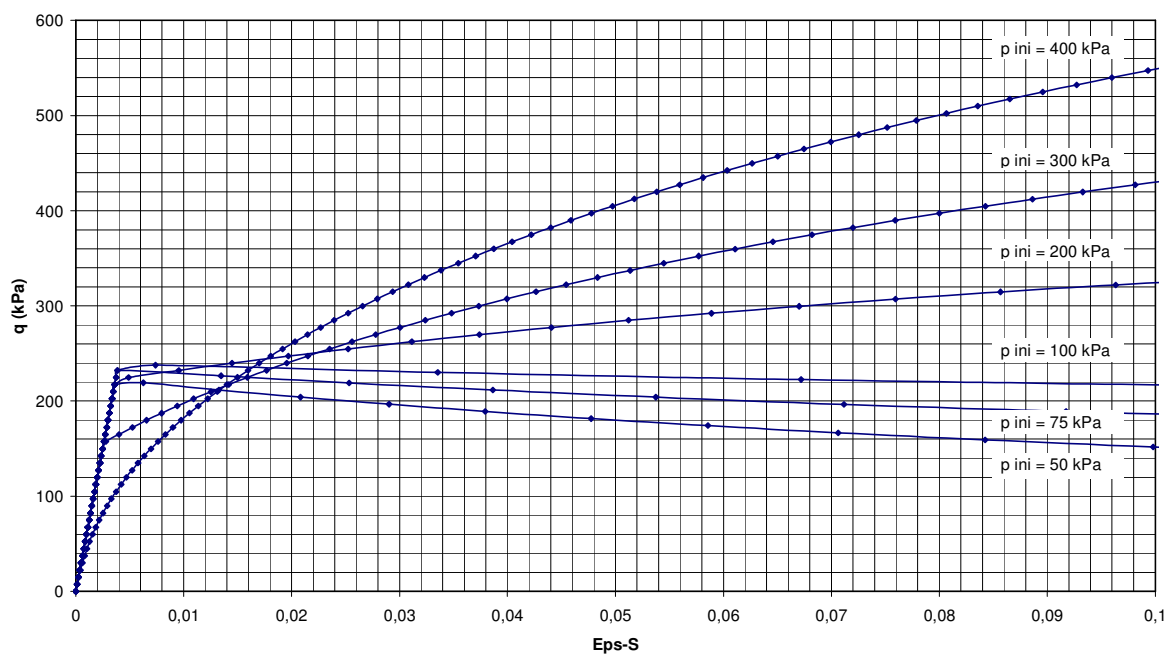
**Figura 4.47. Curvas tensão-deformação para simulação de ensaios CTC, (a) Curvas  $q$  x  $\epsilon_s$  e (b) Curvas  $q$  x  $\epsilon_s$ , para  $\epsilon_s$  limitado a 0,1, ou 10% ( $r_p = 1$ ).**

$q$  x Eps-S (MCC Estruturado - compressão sob  $p$  crescente -  $r_p = 1,0$ )



(a)

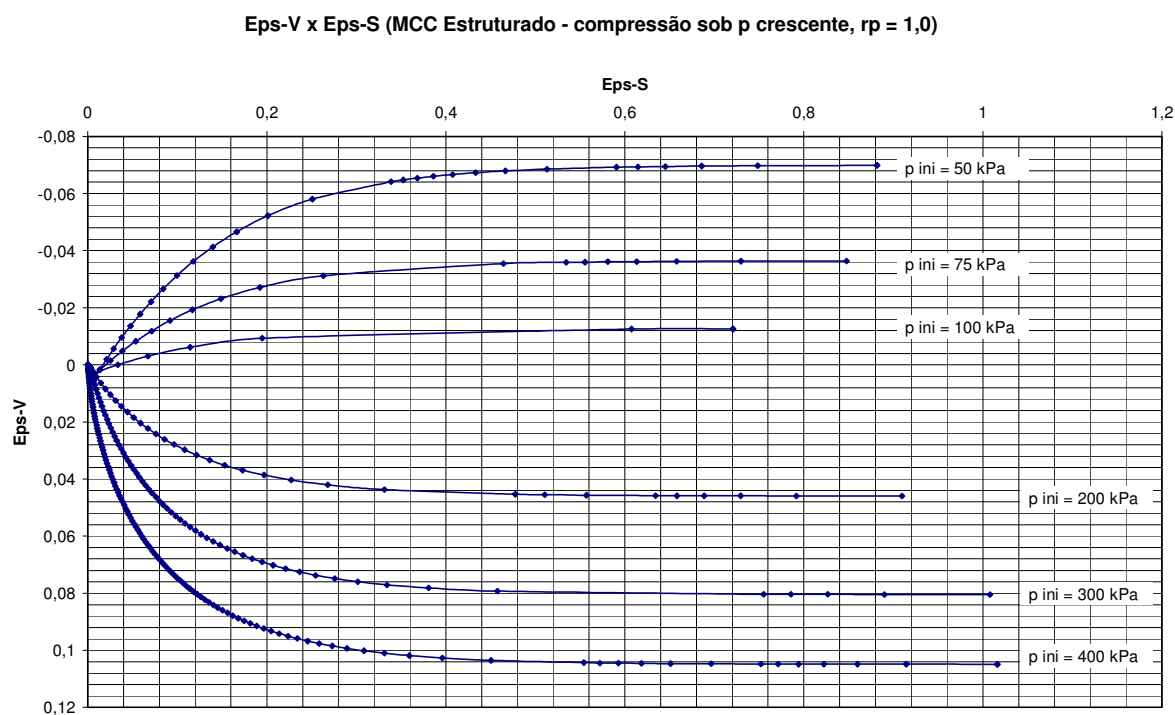
$q$  x Eps-S (MCC Estruturado - compressão sob  $p$  crescente -  $r_p = 1,0$ )



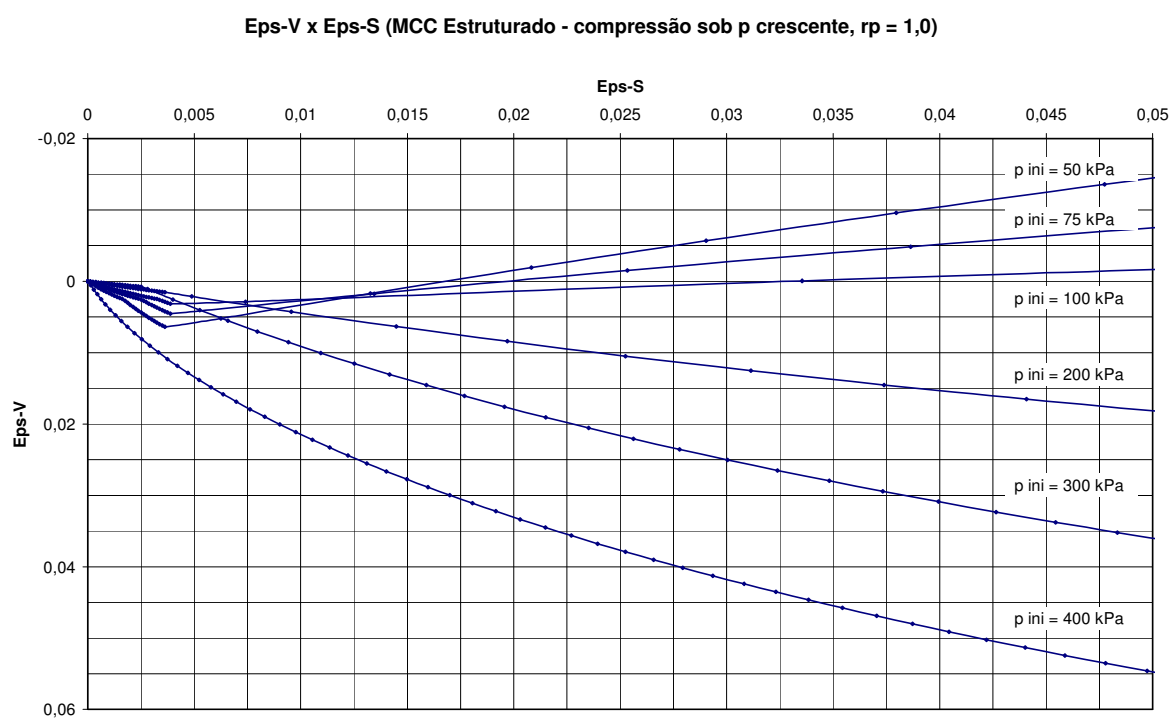
(b)



**Figura 4.48. Curvas  $\epsilon_v$  x  $\epsilon_s$ , para simulação de ensaios CTC, (a) Curvas para grandes deformações e (b) Curvas para  $\epsilon_s$ , limitado a 0,1, ou 10% ( $r_p = 1$ )**

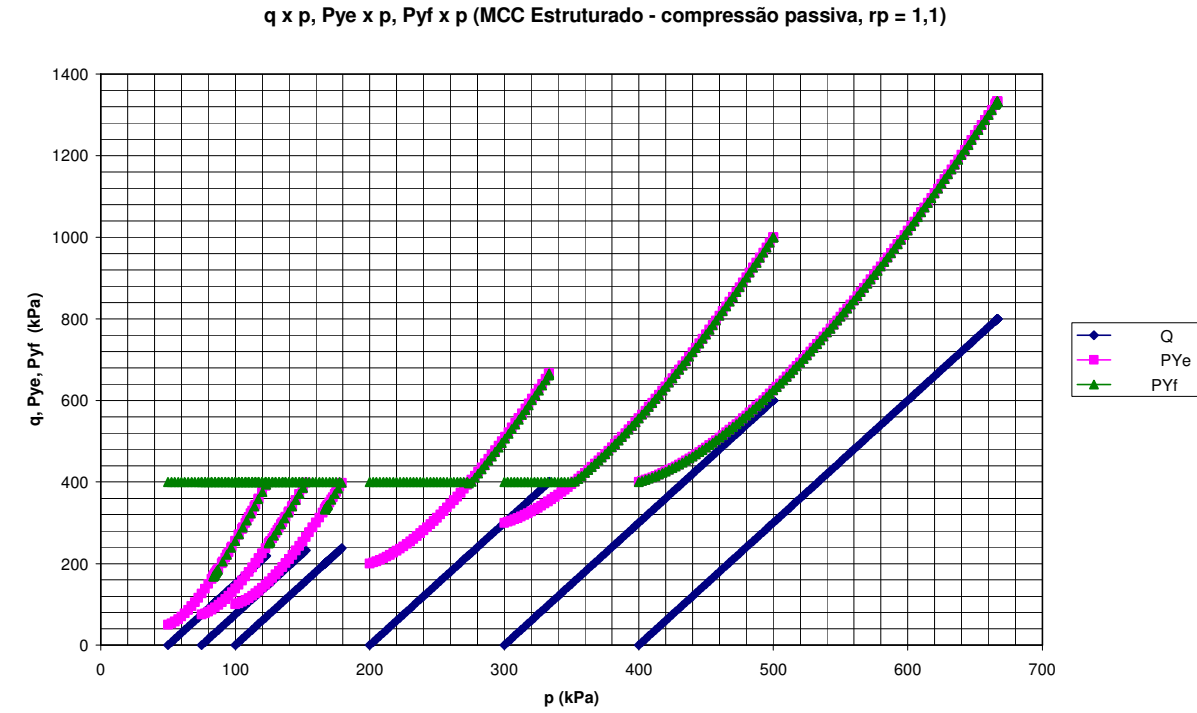


(a)

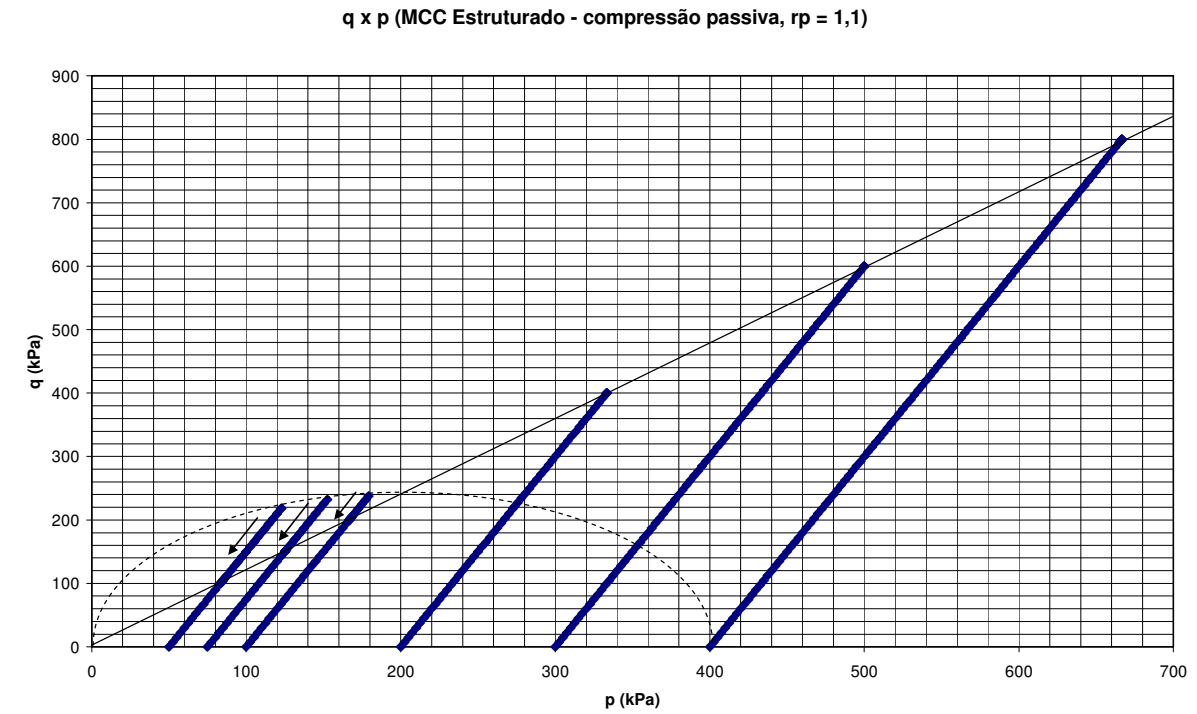


(b)

**Figura 4.49. Trajetórias de tensões para simulação de ensaios CTC, (a) Curvas múltiplas e (b) curva  $q \times p$  ( $r_p = 1,1$ ).**



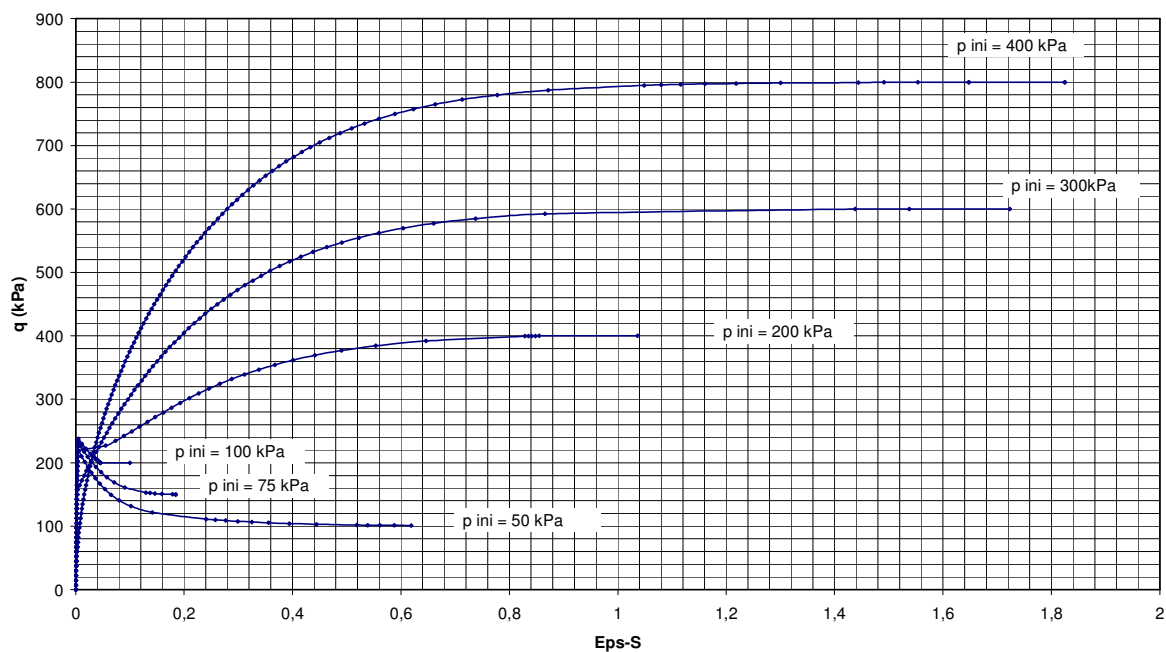
(a)



(b)

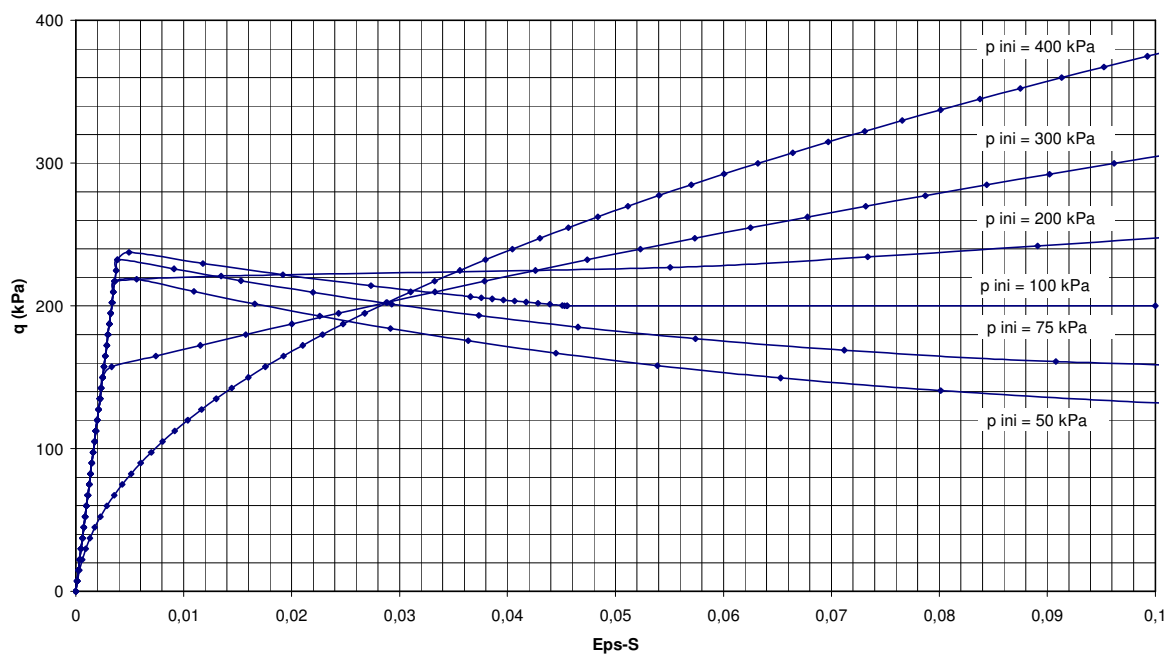
**Figura 4.50. Curvas tensão-deformação para simulação de ensaios CTC,**  
**(a) Curvas  $q \times \epsilon_s$  e (b) Curvas  $q \times \epsilon_s$ , para  $\epsilon_s$  limitado a 0,1, ou 10% ( $r_p = 1,1$ ).**

$q \times \text{Eps-S}$  (MCC Estruturado - com pressão passiva,  $r_p = 1,1$ )



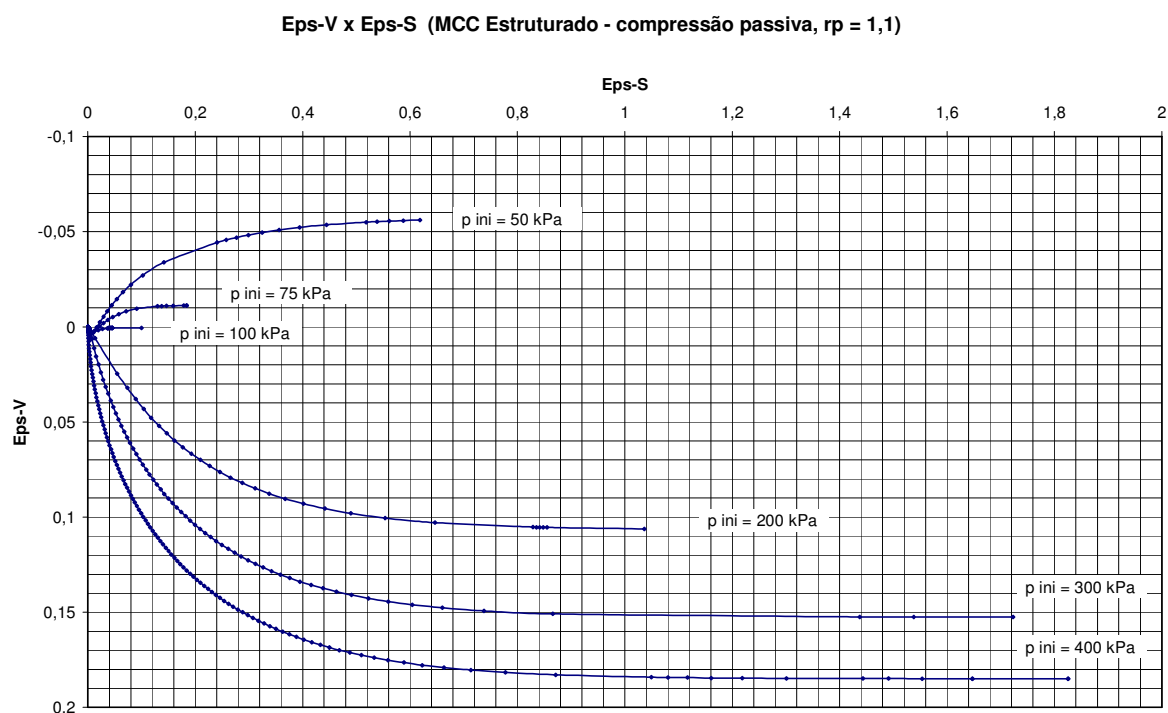
(a)

$q \times \text{Eps-S}$  (MCC Estruturado - compressão passiva,  $r_p = 1,1$ )

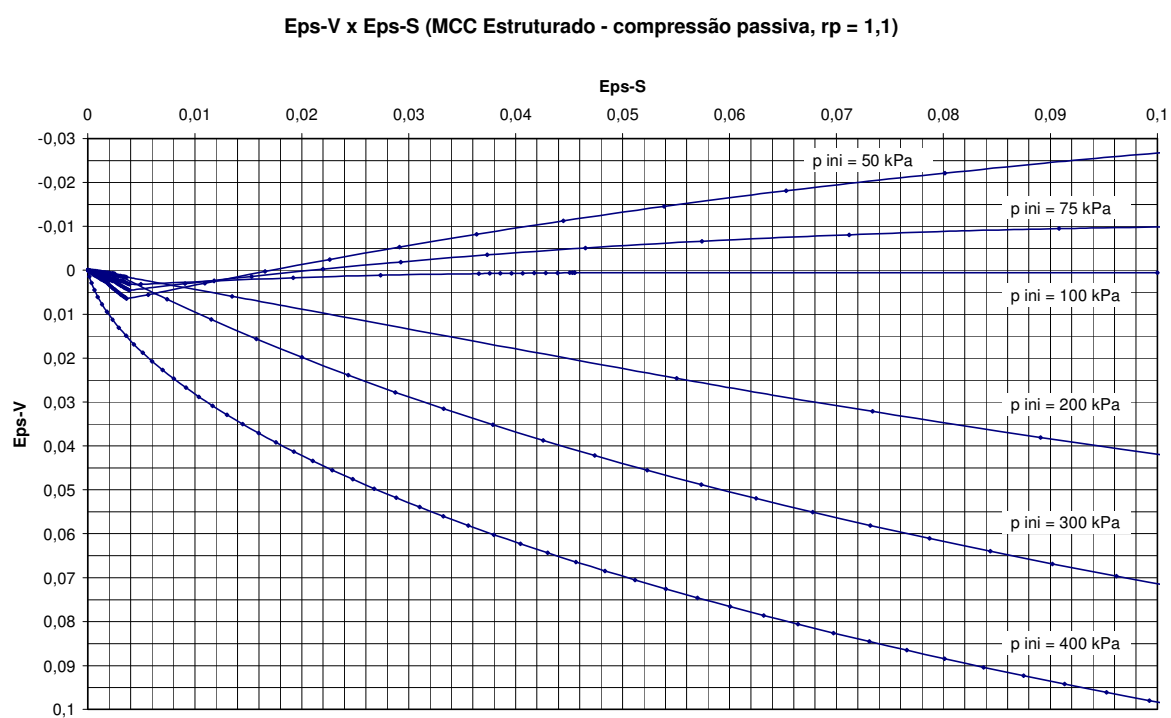


(b)

**Figura 4.51. Curvas  $\epsilon_v$  x  $\epsilon_s$ , para simulação de ensaios CTC, (a) Curvas para grandes deformações e (b) Curvas para  $\epsilon_s$ , limitado a 0,1, ou 10% ( $r_p = 1,1$ ).**



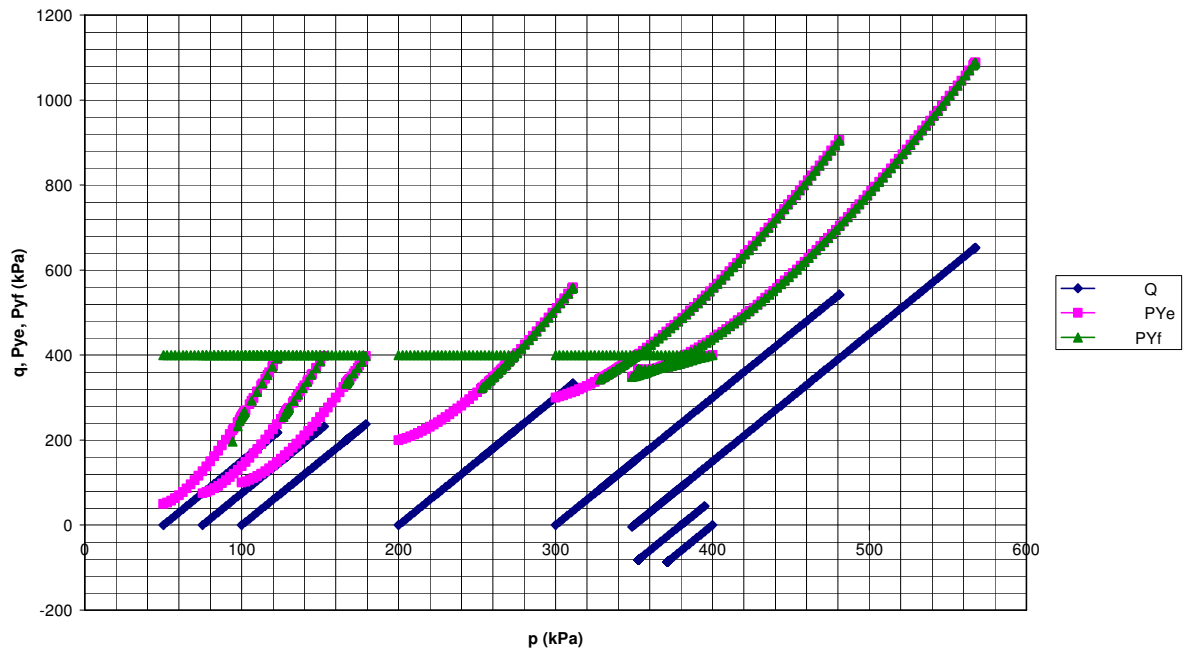
(a)



(b)

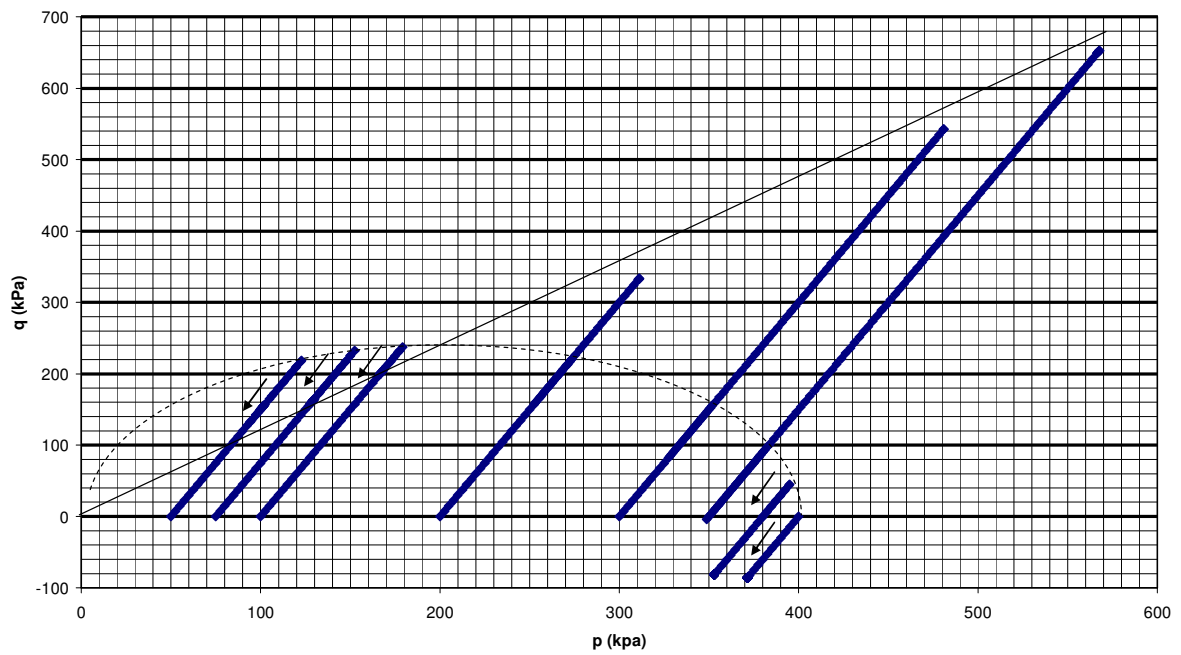
**Figura 4.52. Trajetórias de tensões para simulação de ensaios CTC,**  
**(a) Curvas múltiplas e (b) curva  $q \times p$  ( $r_p = 1,414$ ).**

$q \times p$ ,  $P_{ye} \times p$ ,  $P_{yf} \times p$  (MCC Estruturado - compressão com  $p$  crescente,  $r_p = r_d = 1,414$ )



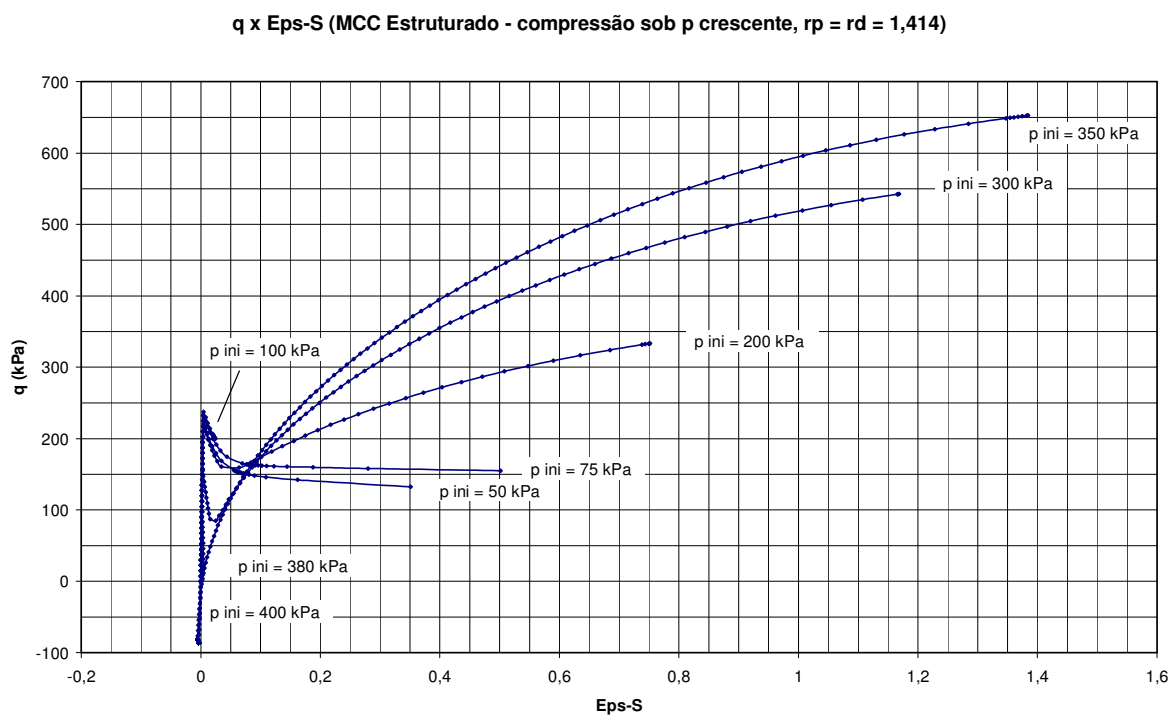
(a)

$q \times p$  (MCC Estruturado - compressão com  $p$  crescente,  $r_p = r_d = 1,414$ )

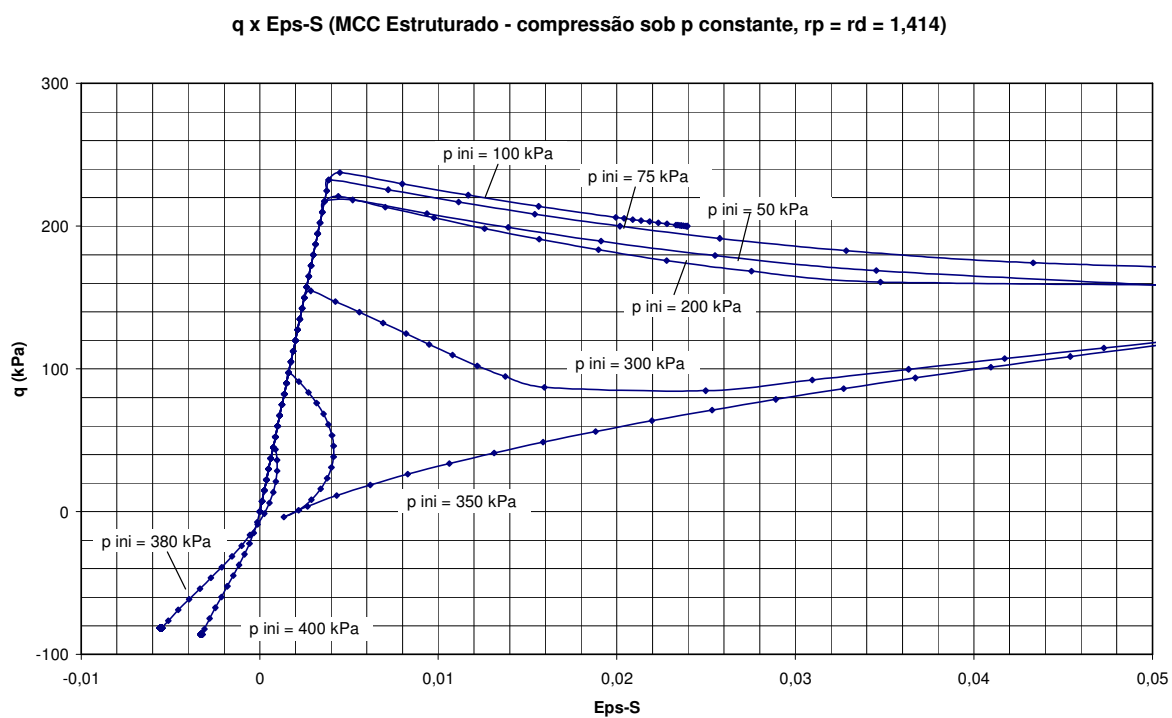


(b)

**Figura 4.53. Curvas tensão-deformação para simulação de ensaios CTC,**  
**(a) Curvas  $q \times \epsilon_s$  e (b) Curvas  $q \times \epsilon_s$ , para  $\epsilon_s$  limitado a 0,1, ou 10% ( $r_p = 1,414$ ).**



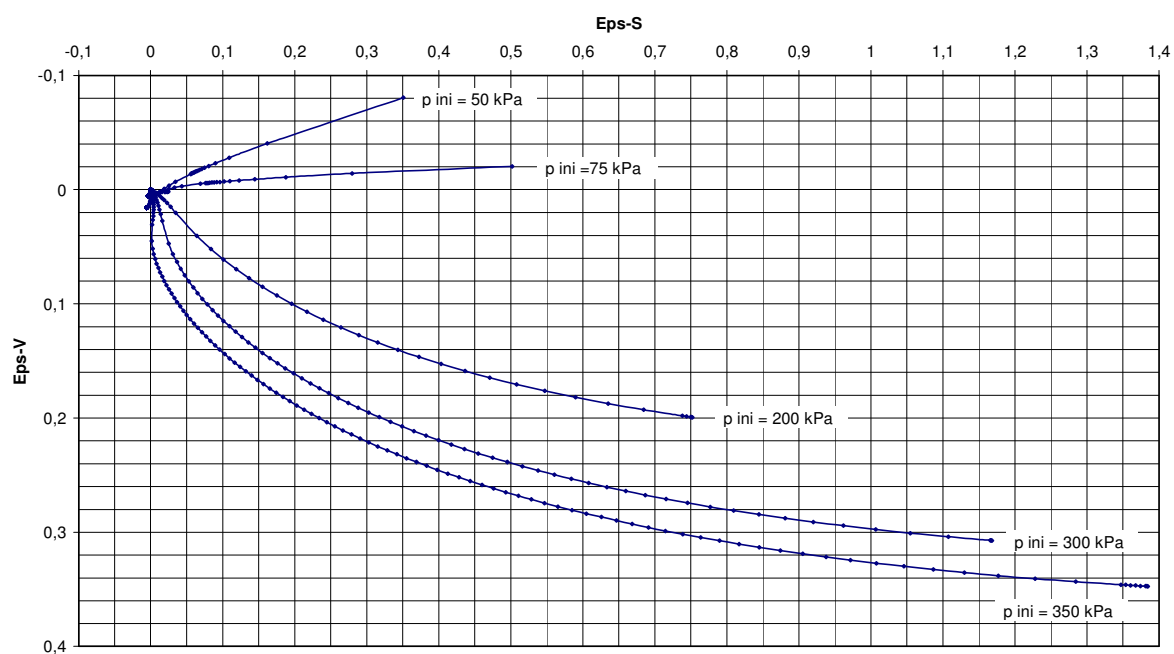
(a)



(b)

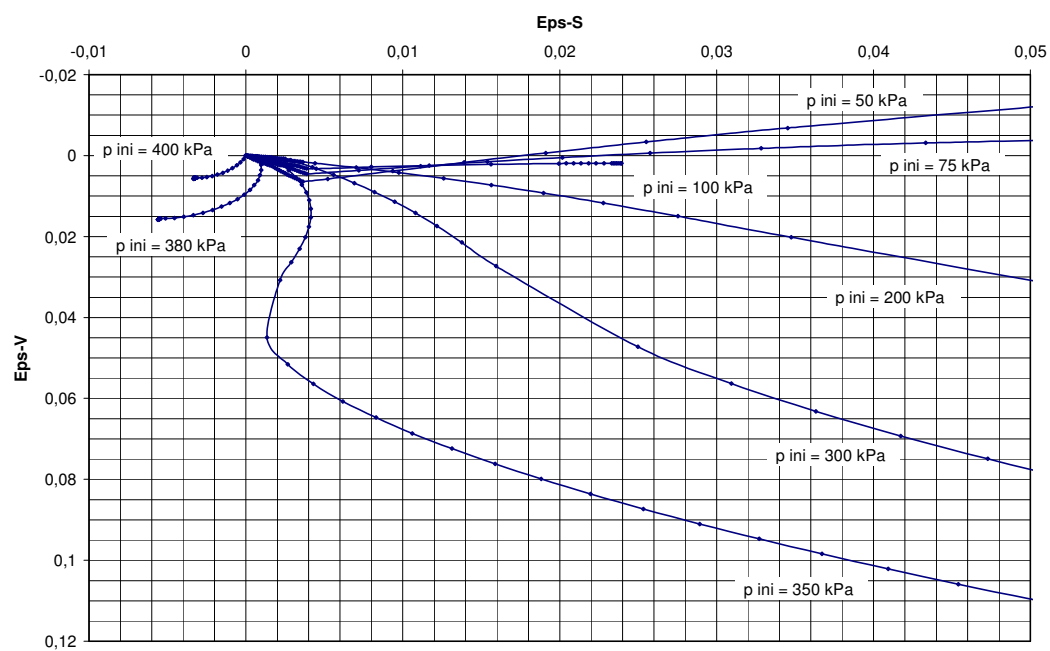
**Figura 4.54. Curvas  $\varepsilon_v$  x  $\varepsilon_s$ , para simulação de ensaios CTC, (a) Curvas para grandes deformações e (b) Curvas para  $\varepsilon_s$ , limitado a 0,1, ou 10% ( $r_p = 1,414$ ).**

Eps-V x Eps-S (MCC Estruturado - compressão com p crescente,  $r_p = r_d = 1,414$ )



(a)

Eps-V x Eps-S (MCC Estruturado - compressão com p crescente,  $r_p = r_d = 1,414$ )



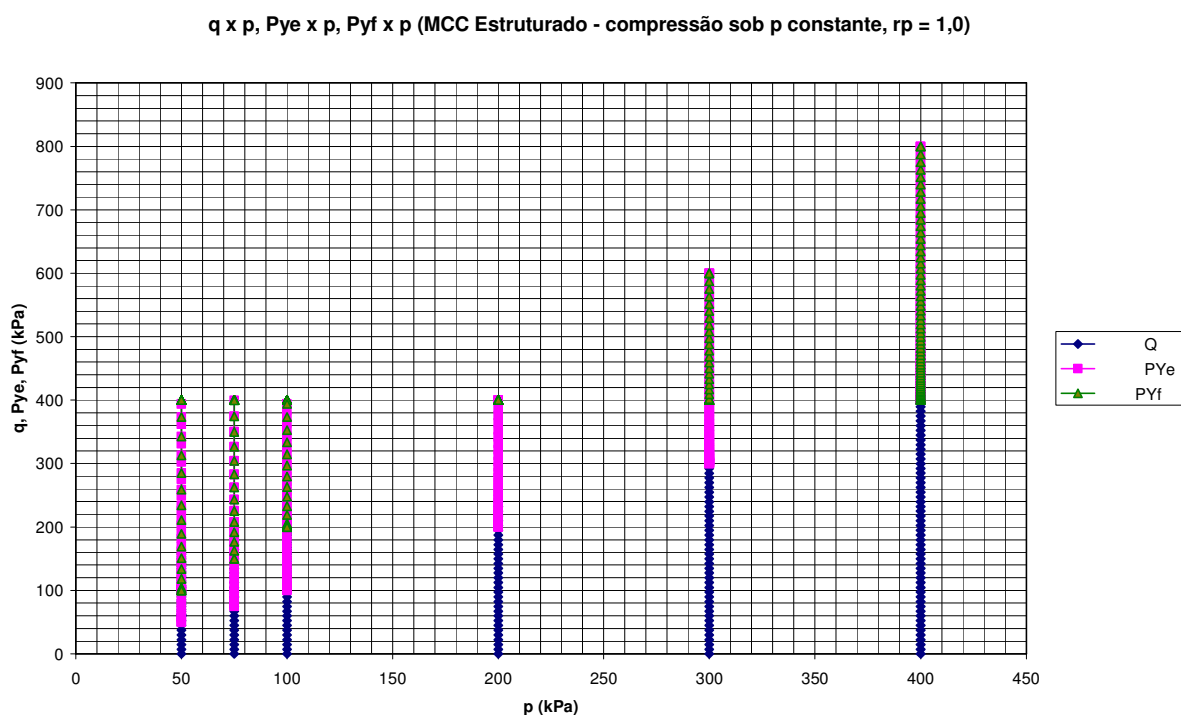
(b)

### 4.2.2. Simulação de Ensaio de Compressão Triaxial com Tensão Normal Média Constante

Nestes ensaios é mantida constante a tensão normal média ( $p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = \text{cte}$ ), e é aumentada a tensão vertical e reduzida a tensão horizontal. Na simulação utilizou-se  $dp = 0$  e  $dq = \delta$ . Nos exemplos mostrados os incrementos de tensão desviadora utilizados foram de  $dq = 0,15$  kPa.

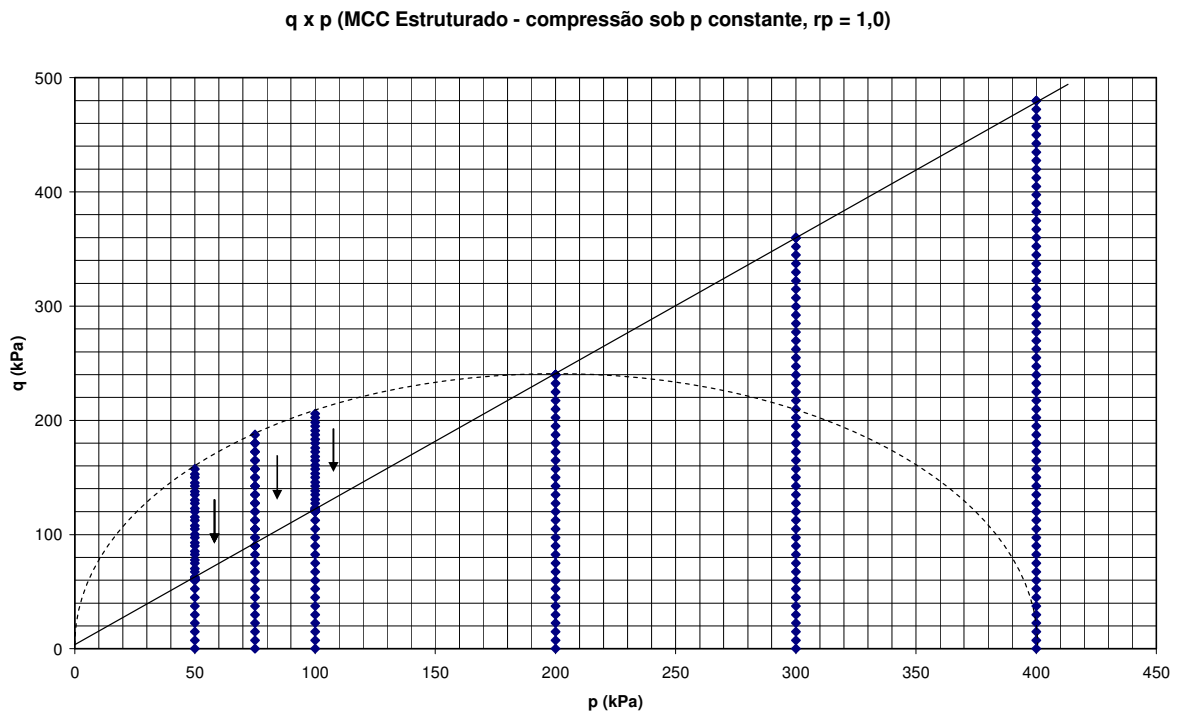
Foram simuladas os ensaios para valores de tensões iniciais de adensamento isotrópicas  $p_{\text{ini}} = 50, 75, 100, 200, 300$  e  $400$  kPa, e para valores de  $r_p = 1,0; 1,1$  e  $1,414$ .

**Figura 4.55. Trajetórias de tensões para simulação de ensaios sob tensão normal média constante, (a) gráfico de curvas múltiplas e (b) curvas  $q \times p$  ( $r_p = 1,0$ ).**



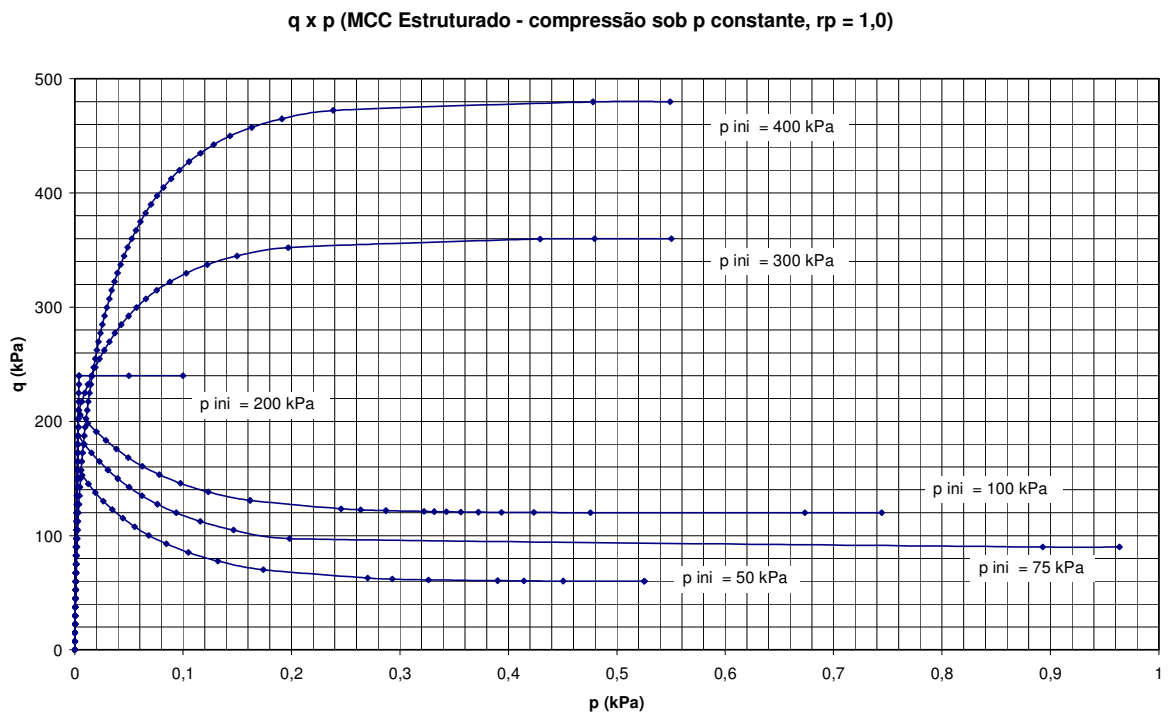
(a)





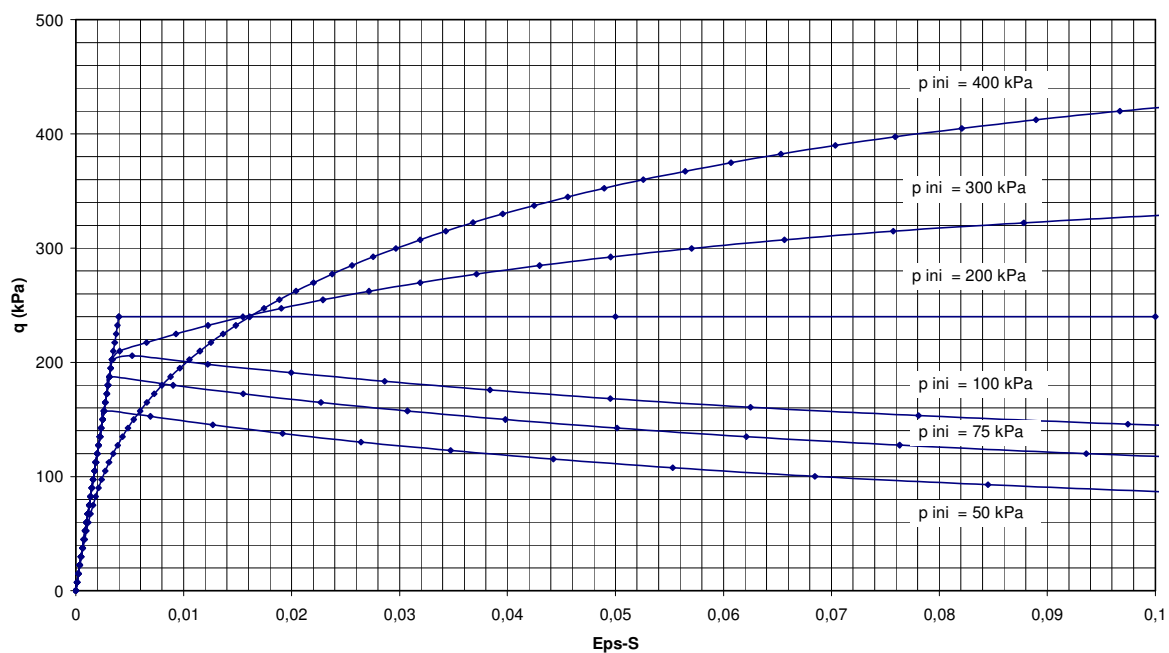
(b)

**Figura 4.56. Curvas tensão-deformação para simulação de ensaios sob tensão normal  $p$  constante: (a) Curvas  $q \times \epsilon_s$  e (b) Curvas  $q \times \epsilon_s$ , para  $\epsilon_s$  limitado a 0,1, ou 10% ( $r_p = 1,0$ ).**



(a)

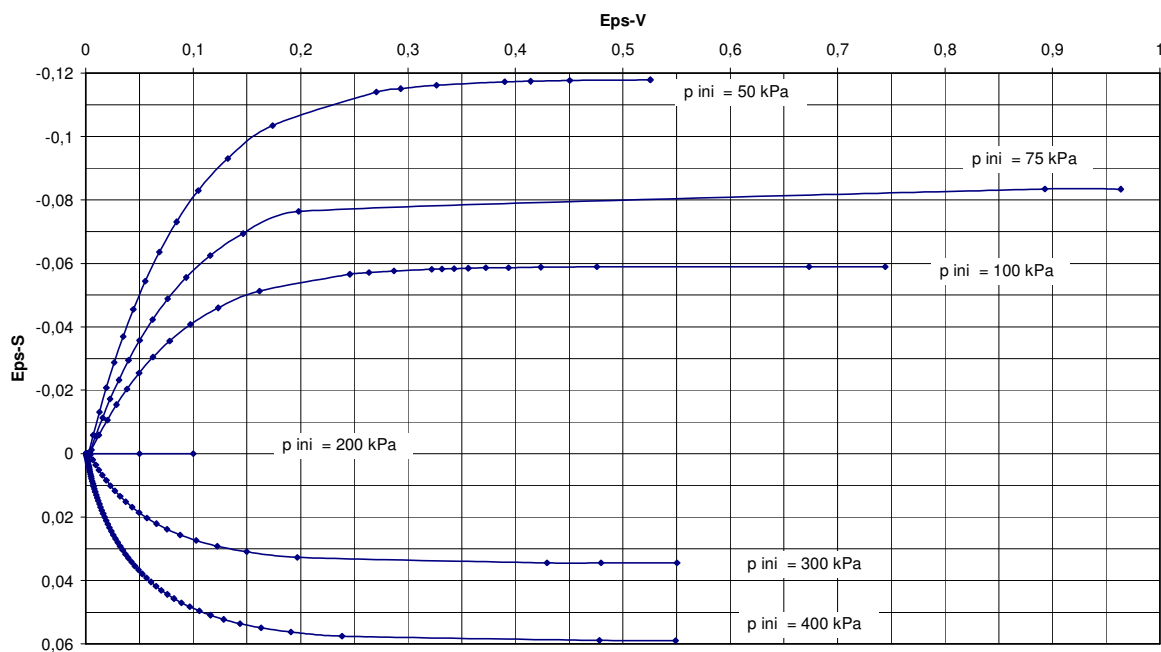
**q x Eps-S (MM Estruturado - compressão sob p constante,  $r_p = 1,0$ )**



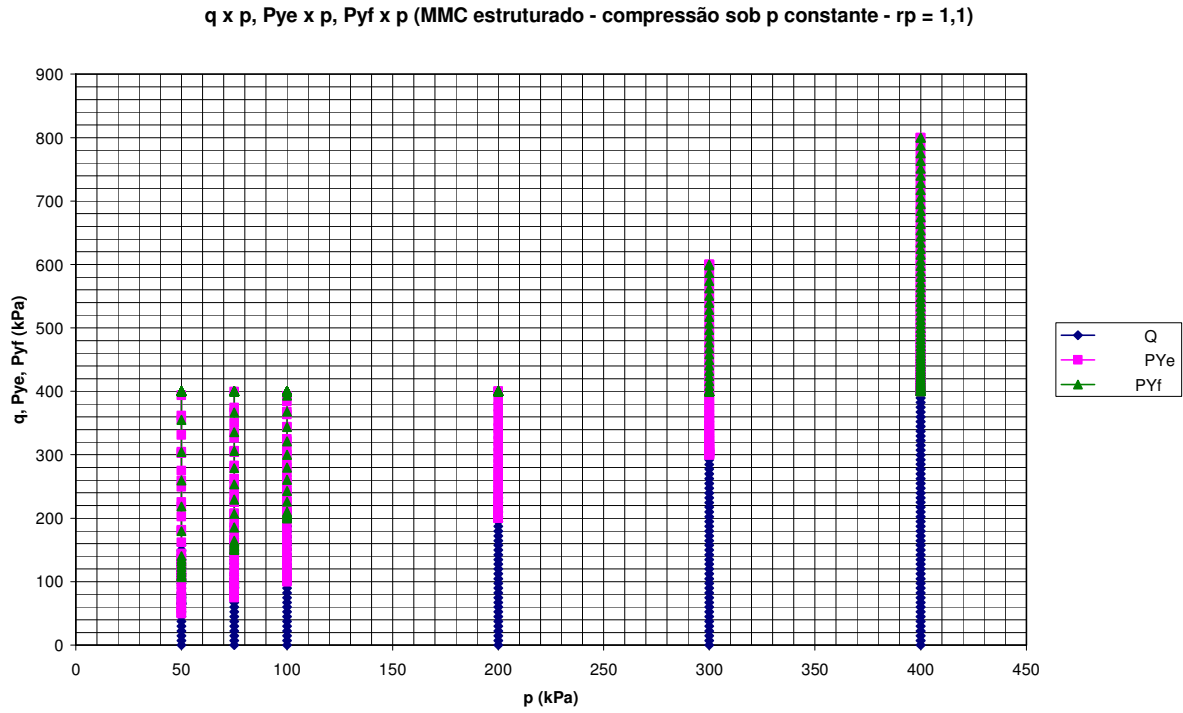
(b)

**Figura 4.57. Curvas  $\epsilon_v$  x  $\epsilon_s$ , para simulação de ensaios sob tensão normal  $p$  constante, curvas para grandes deformações ( $r_p = 1,0$ ).**

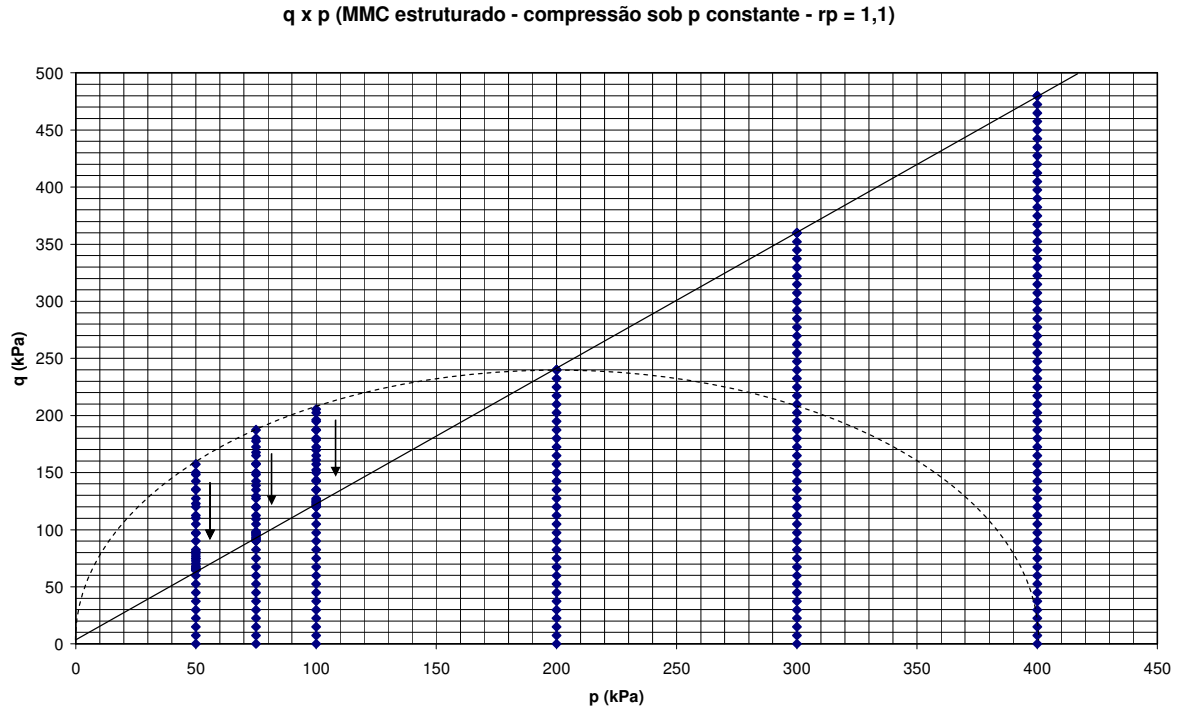
**Eps-V x Eps-S (MCC Estruturado - compressão sob p constante,  $r_p = 1,0$ )**



**Figura 4.58. Trajetórias de tensões para simulação de ensaios sob tensão normal  $p$  constante, (a) gráfico de curvas múltiplas e (b) curvas  $q \times p$  ( $r_p = 1,1$ ).**

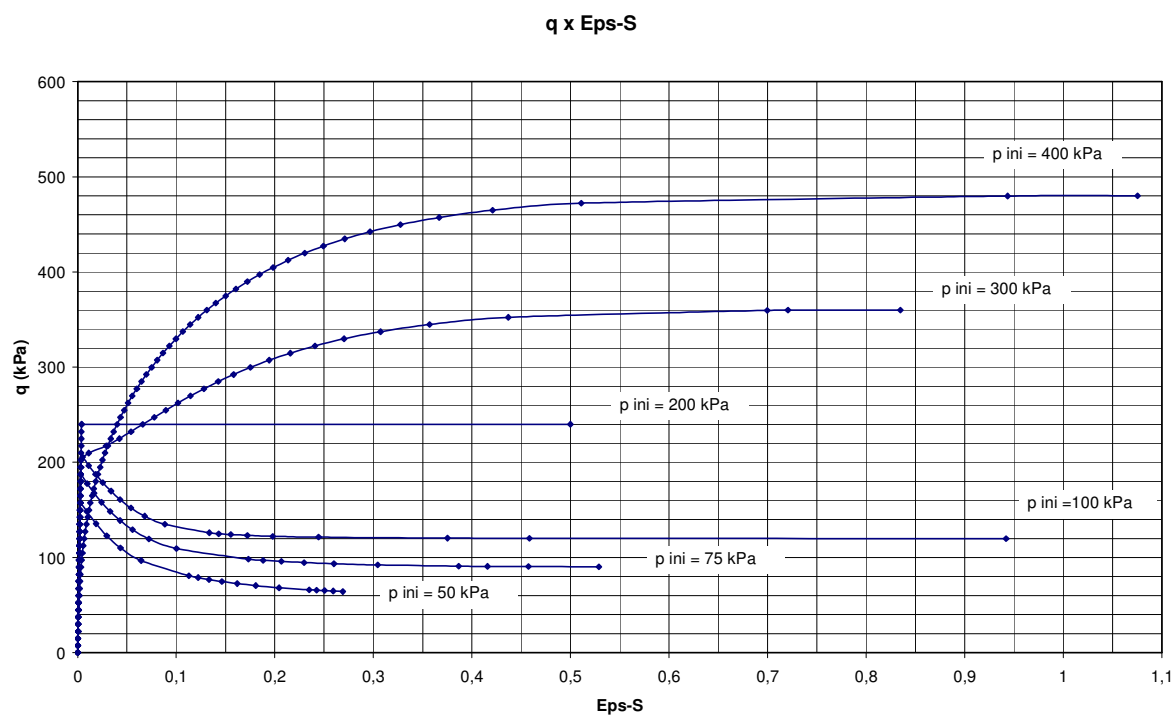


(a)

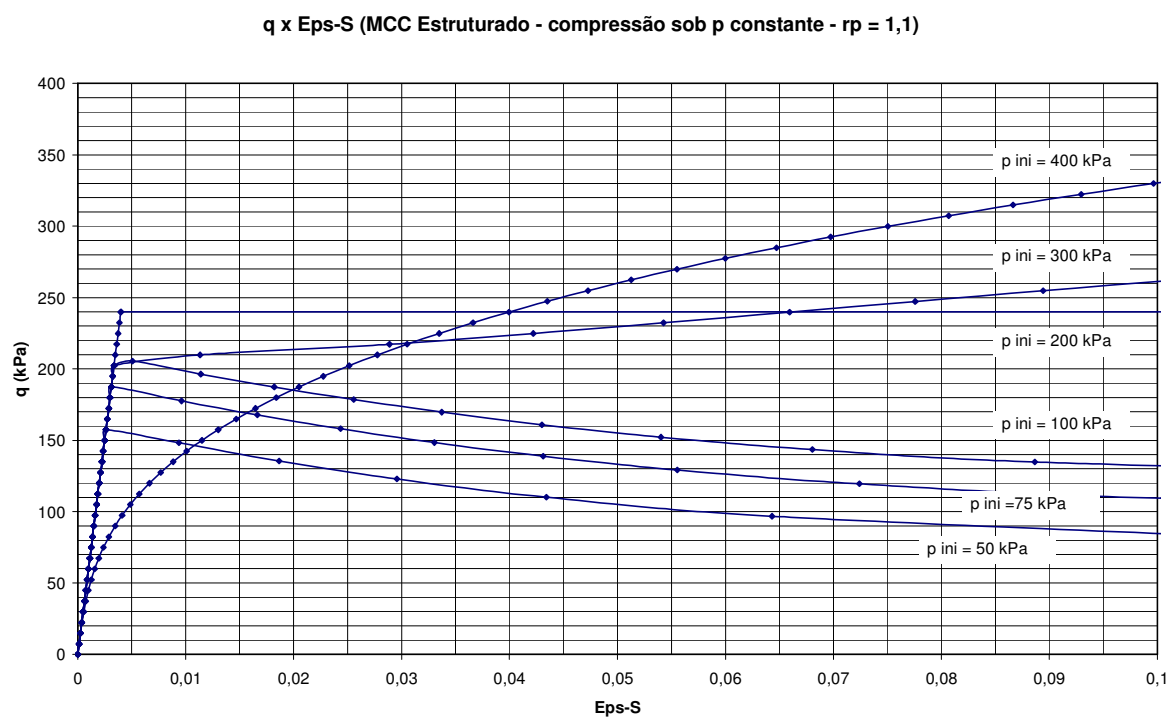


(b)

**Figura 4.59. Curvas tensão-deformação para simulação de ensaios sob tensão normal  $p$  constante: (a) Curvas  $q$  x  $\epsilon_s$  e (b) Curvas  $q$  x  $\epsilon_s$ , para  $\epsilon_s$  limitado a 0,1, ou 10% ( $r_p = 1,1$ ).**

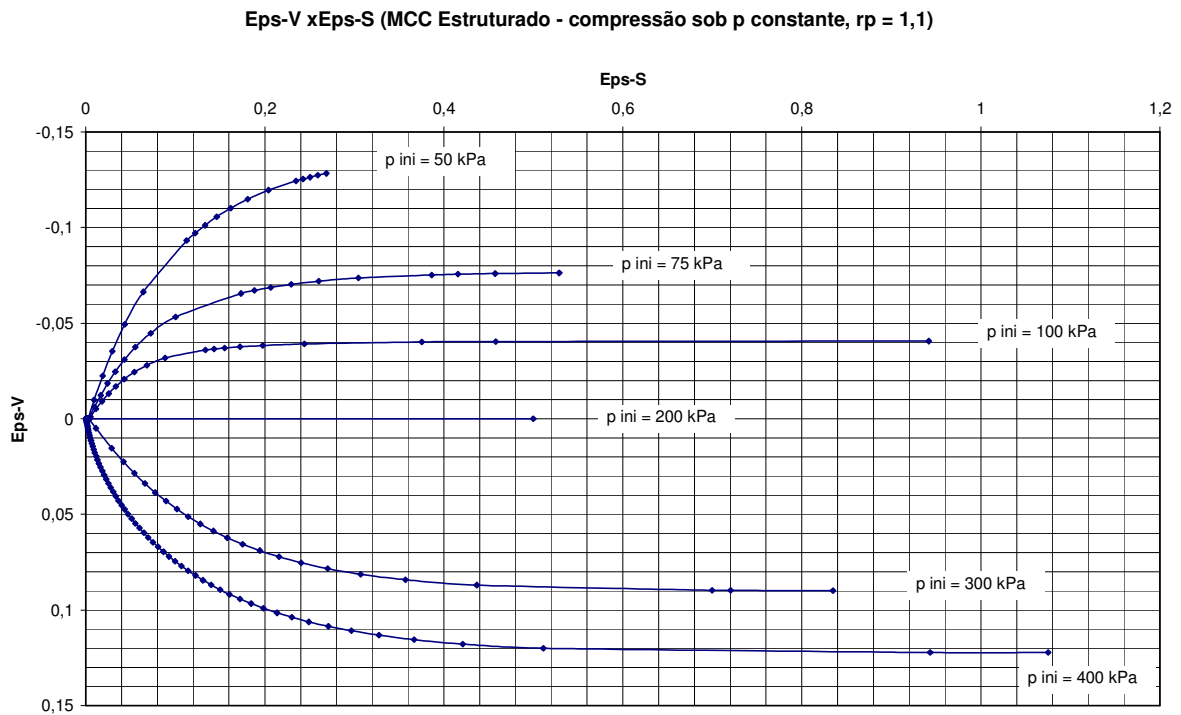


(a)

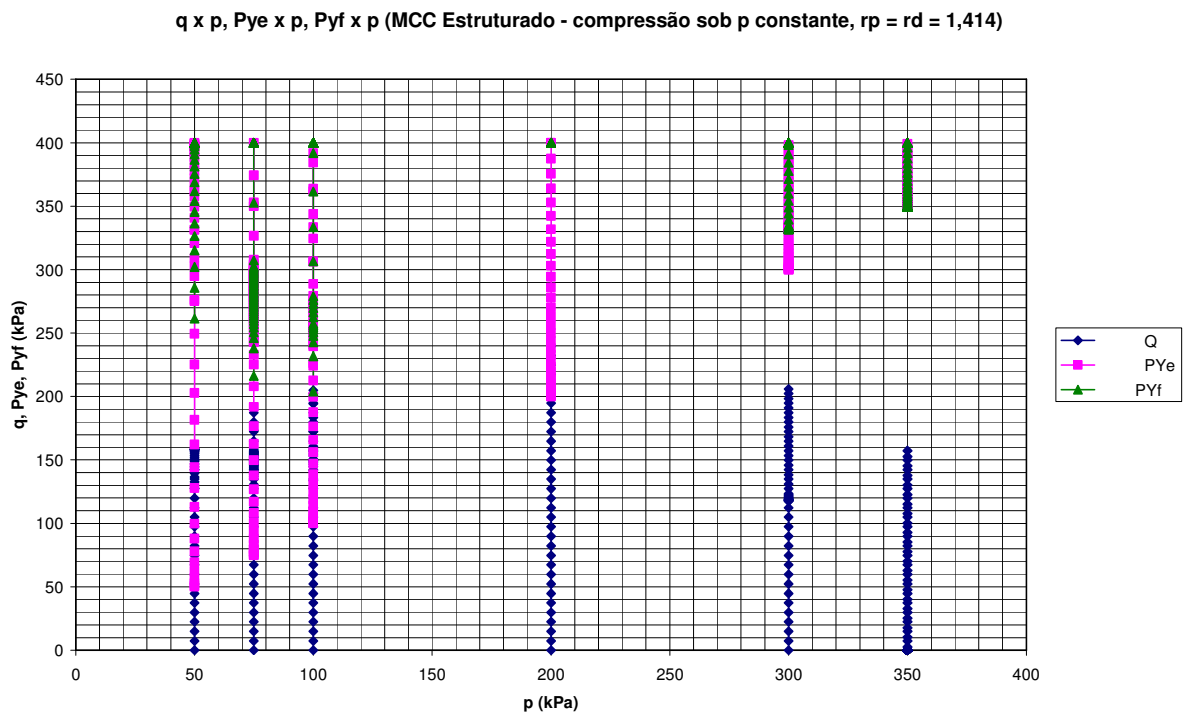


(b)

**Figura 4.60. Curvas  $\epsilon_v$  x  $\epsilon_s$ , para simulação de ensaios sob tensão normal  $p$  constante, curvas para grandes deformações ( $r_p = 1,1$ ).**

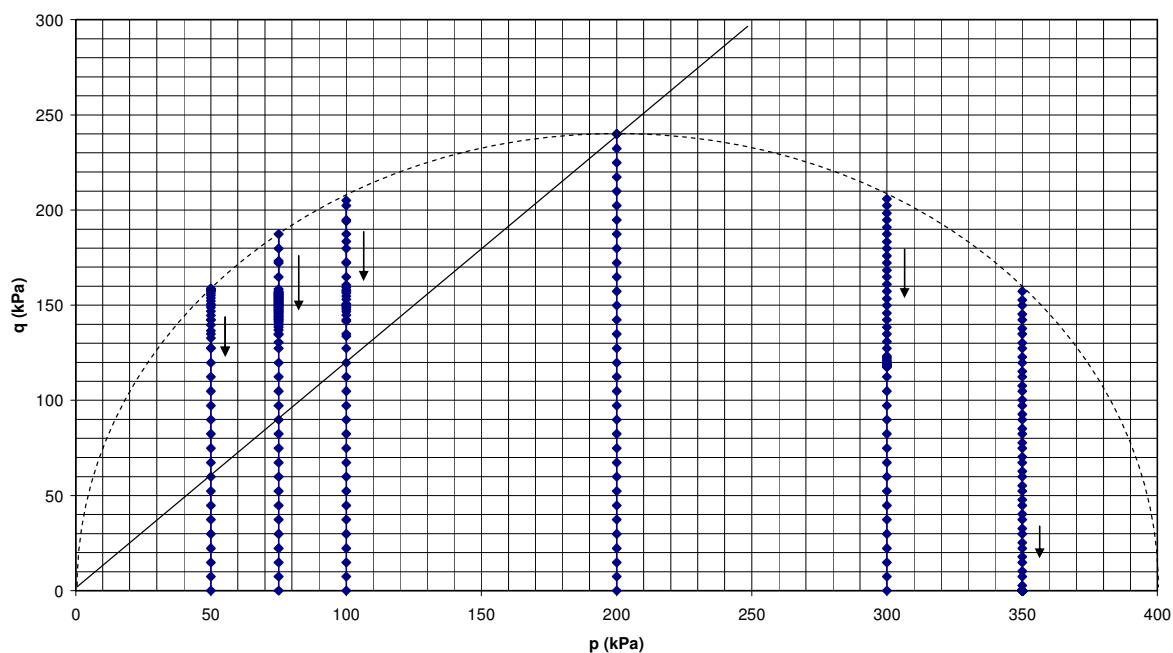


**Figura 4.61. Trajetórias de tensões para simulação de ensaios sob tensão normal  $p$  constante, (a) gráfico de curvas múltiplas e (b) curvas  $q$  x  $p$  ( $r_p = 1,414$ ).**



(a)

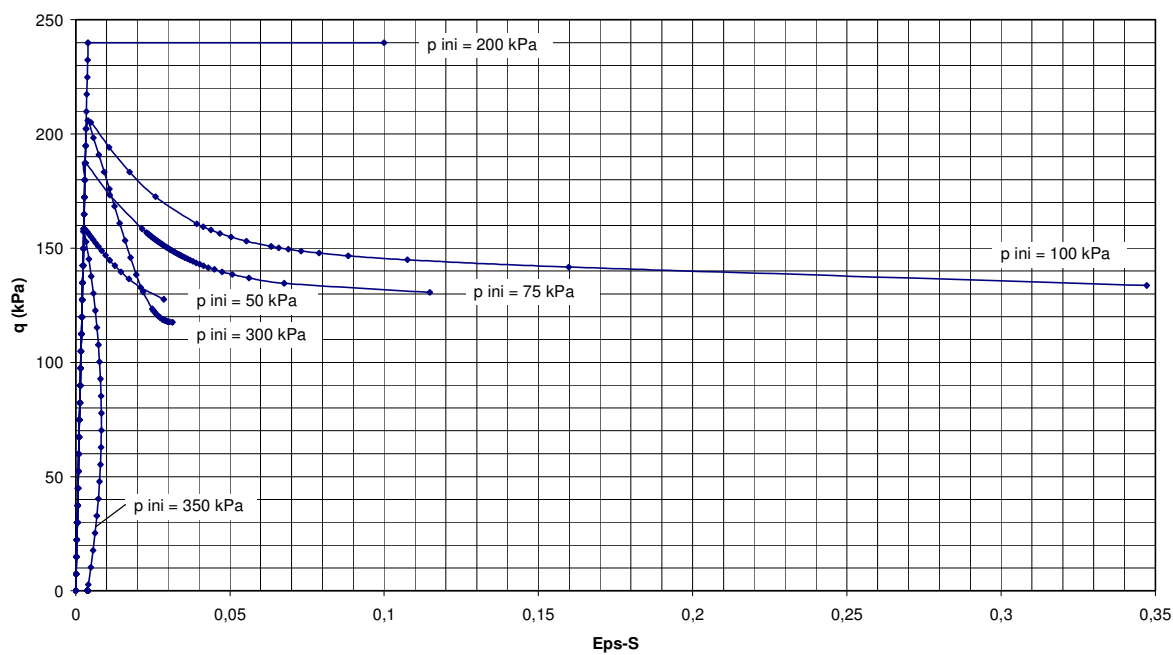
q x p (MCC Estruturado - compressão sob p constante,  $r_p = r_d = 1,414$ )



(b)

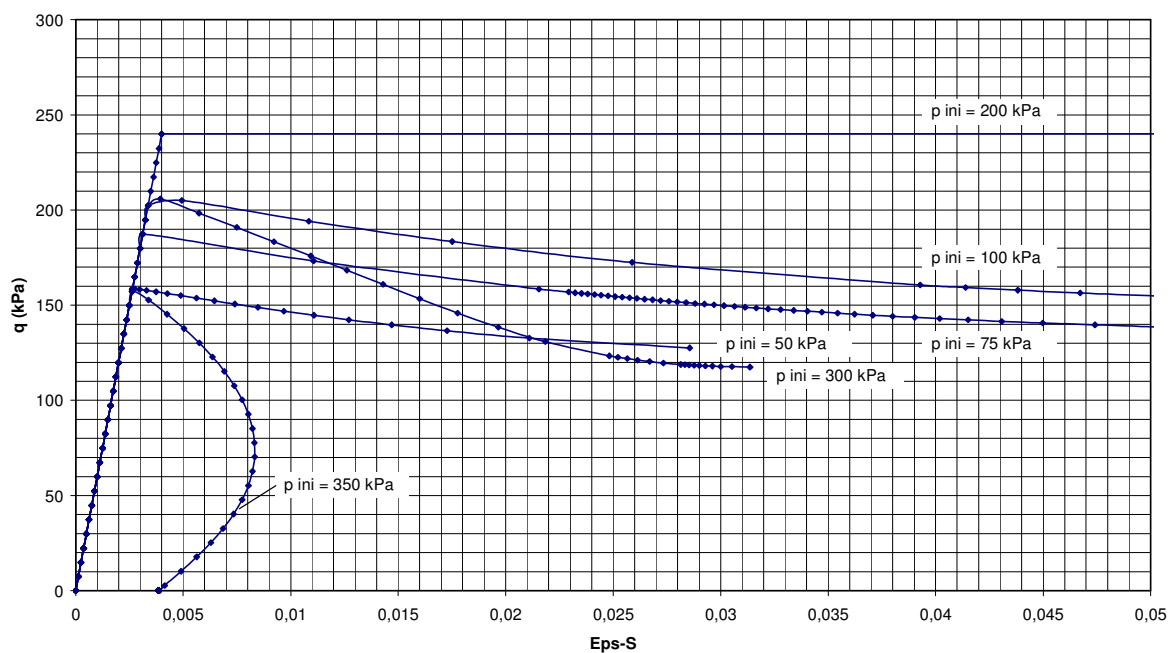
**Figura 4.62. Curvas tensão-deformação para simulação de ensaios sob tensão normal  $p$  constante: (a) Curvas  $q$  x  $\epsilon_s$  e (b) Curvas  $q$  x  $\epsilon_s$ , para  $\epsilon_s$  limitado a 0,05, ou 5%. ( $r_p = 1,414$ )**

q x Eps-S (MCC Estruturado - compressão sob p constante,  $r_p = r_d = 1,414$ )



(a)

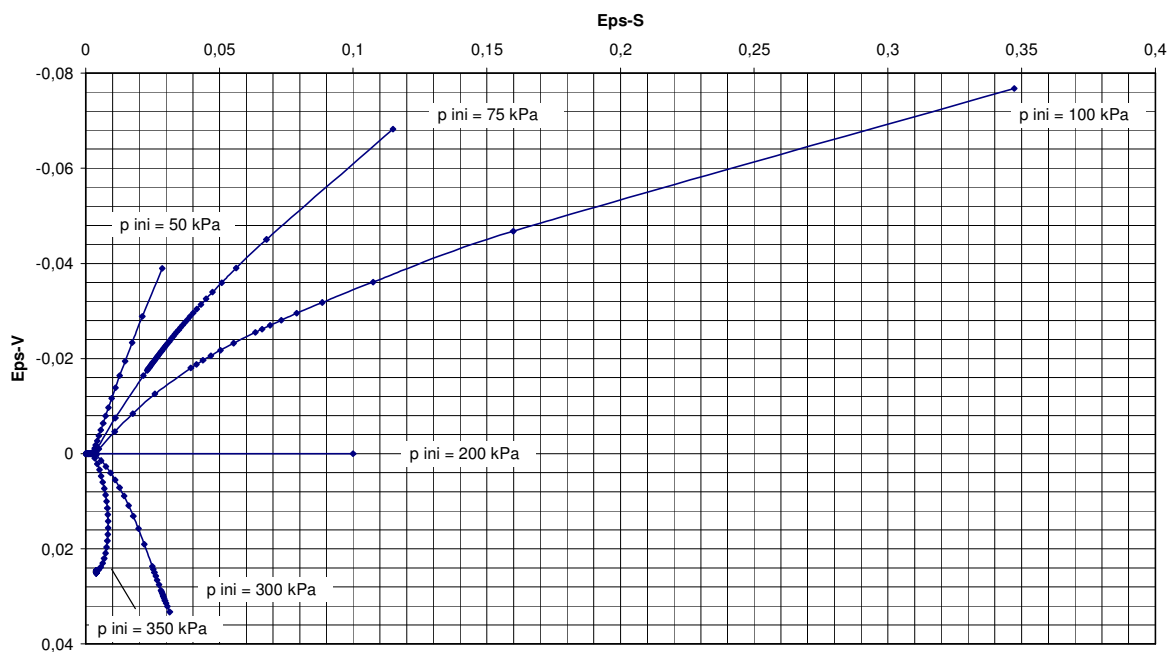
**q x Eps-S (MCC Estruturado - compressão sob p constante,  $r_p = r_d = 1,414$ )**



(b)

**Figura 4.63. Curvas  $\epsilon_v$  x  $\epsilon_s$ , para simulação de ensaios sob tensão normal  $p$  constante, curvas para grandes deformações ( $r_p = 1,414$ ).**

**Eps-V x Eps-S (MCC Estruturado - compressão sob p constante,  $r_p = r_d = 1,414$ )**

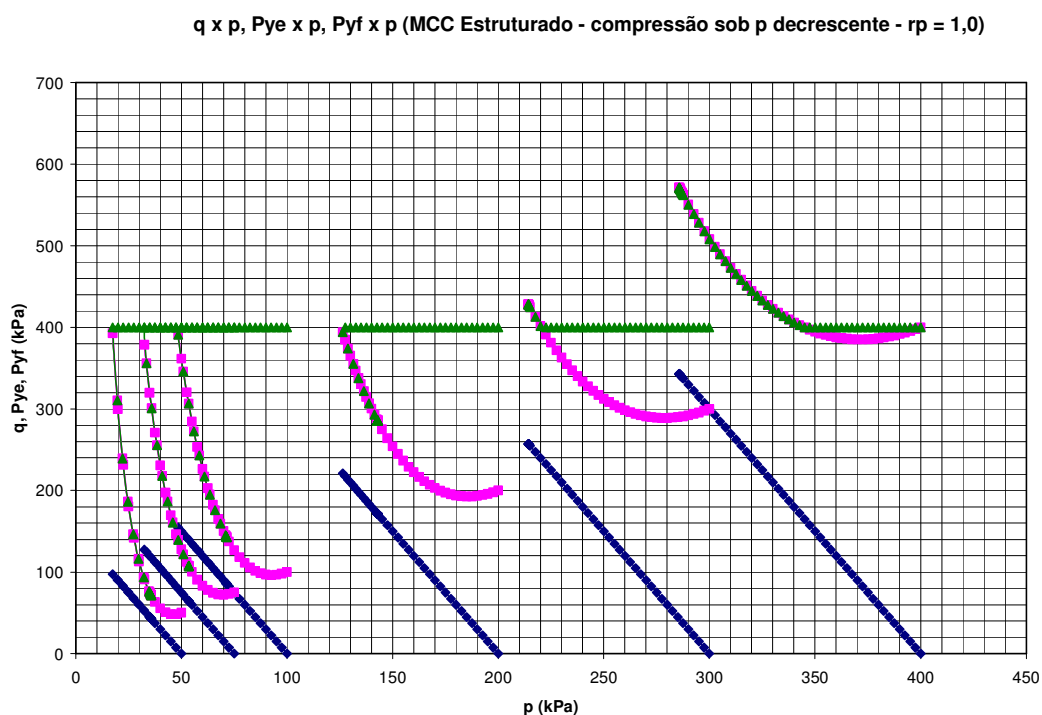


### 4.2.3. Simulação de Ensaio com Redução de Tensão Normal Média - $p$

Nestas simulações a tensão normal média  $p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$ , é reduzida e são aplicados incrementos de tensão desviadora. Na simulação aplicou-se  $dp = -\delta$  e  $dq = 3\delta$ . Nos exemplos mostrados os incrementos de tensão utilizados foram de  $dp = -0,05$  kPa e  $dq = 0,15$  kPa.

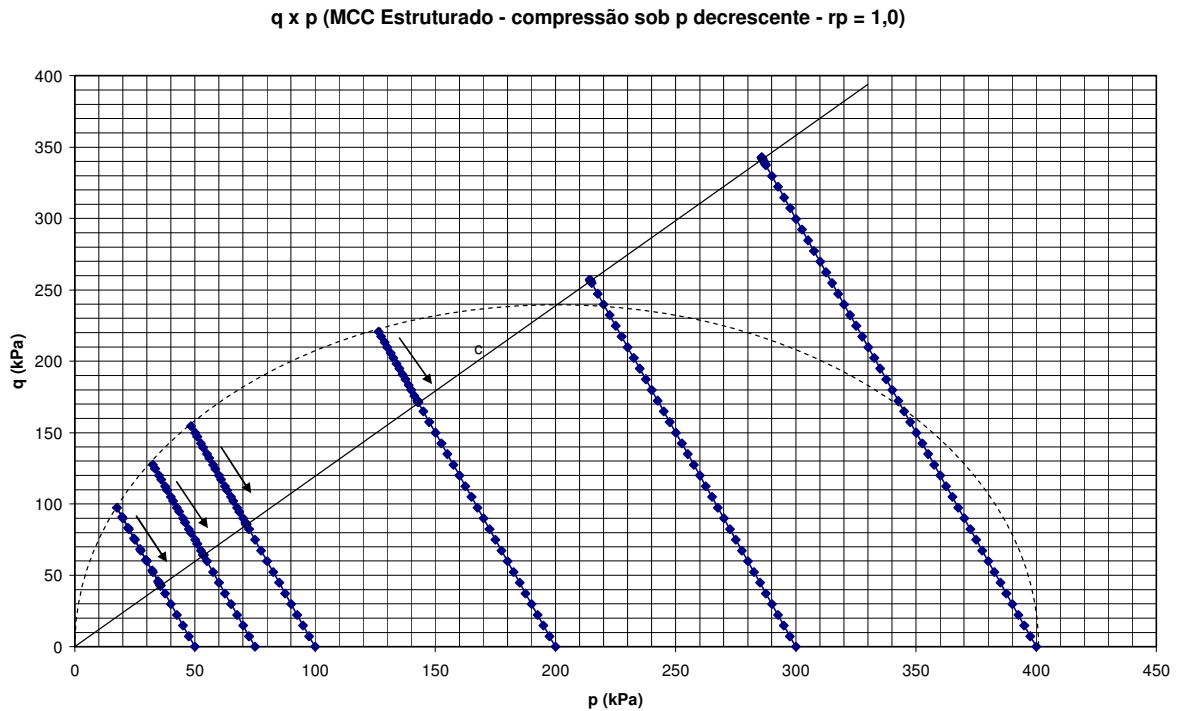
Foram simuladas os ensaios para valores de tensões iniciais de adensamento isotrópicas  $p_{ini} = 50, 75, 100, 200, 300$  e  $400$  kPa, e para valores de  $r_p = 1,0; 1,1$  e  $1,414$ .

**Figura 4.64. Trajetórias de tensões para simulação de ensaios sob tensão normal média decrescente, gráfico de curvas múltiplas ( $r_p = 1,0$ ).**



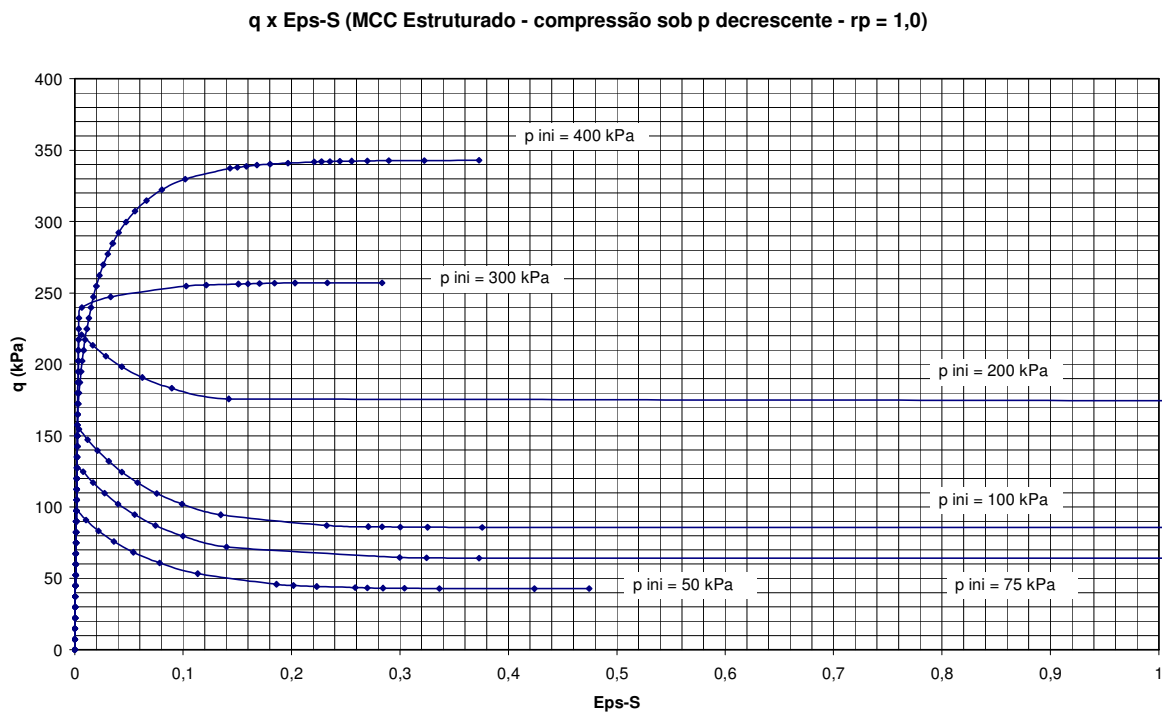
(a)



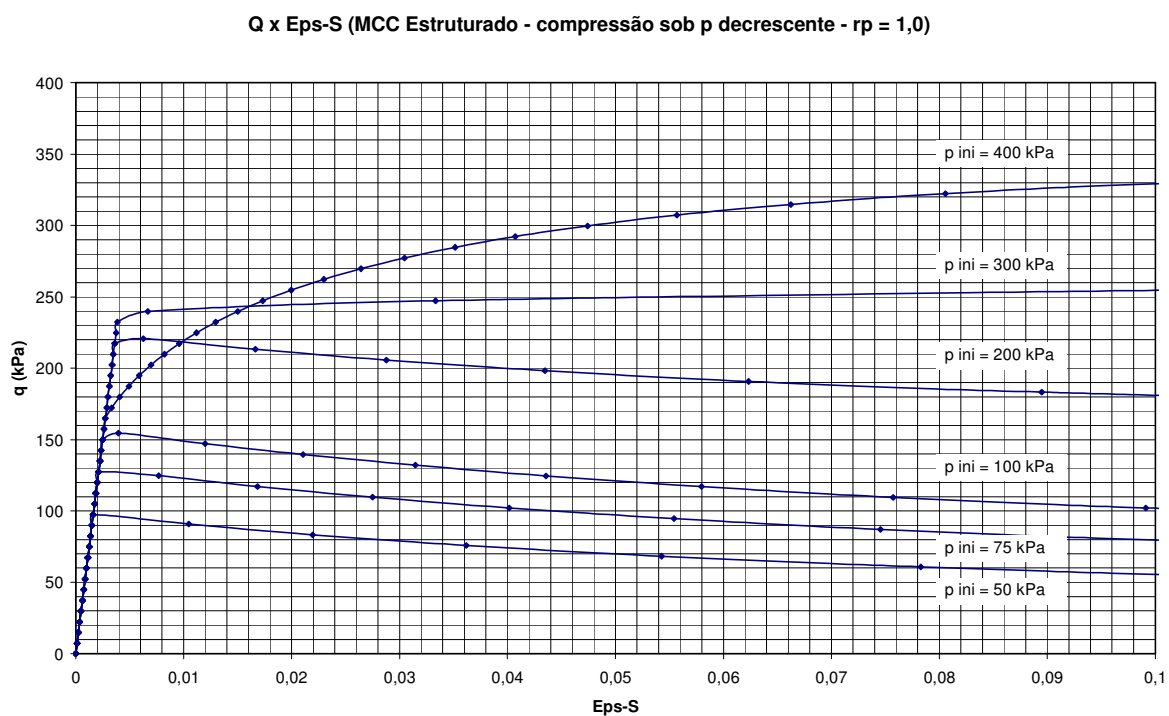


(b)

**Figura 4.65. Curvas tensão-deformação para simulação de ensaios sob tensão normal média decrescente: (a) Curvas  $q \times \epsilon_s$  e (b) Curvas  $q \times \epsilon_s$ , para  $\epsilon_s$  limitado a 0,1, ou 10% ( $r_p = 1,0$ ).**

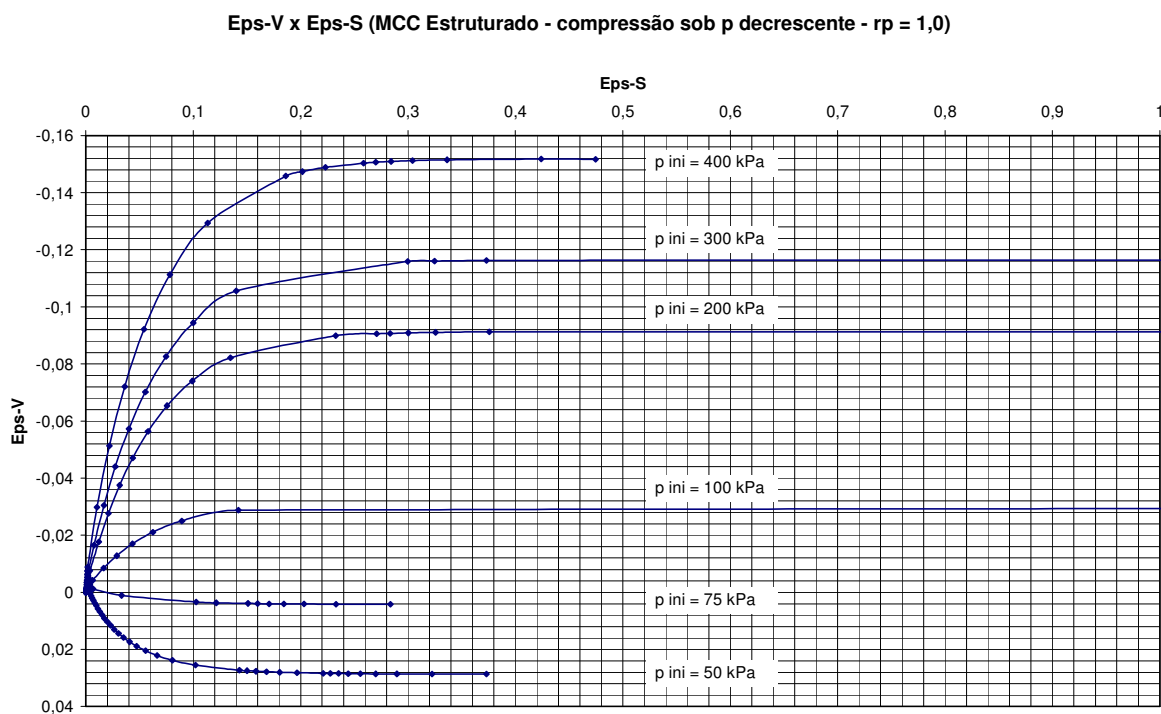


(a)

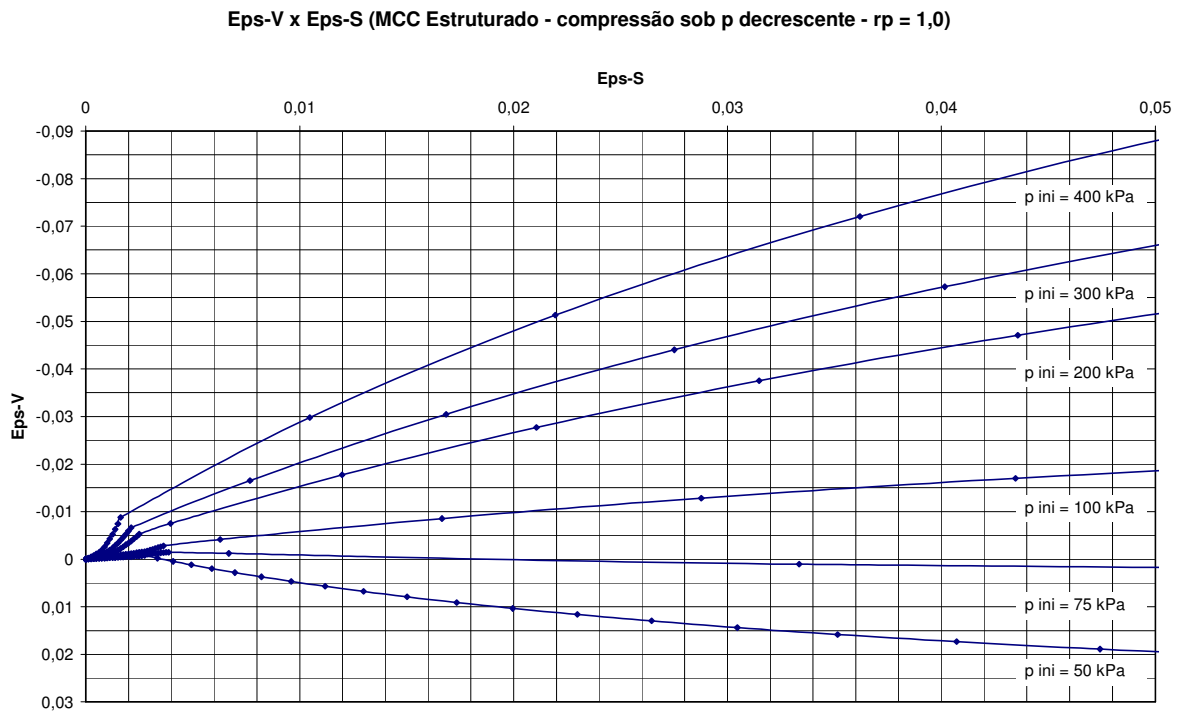


(b)

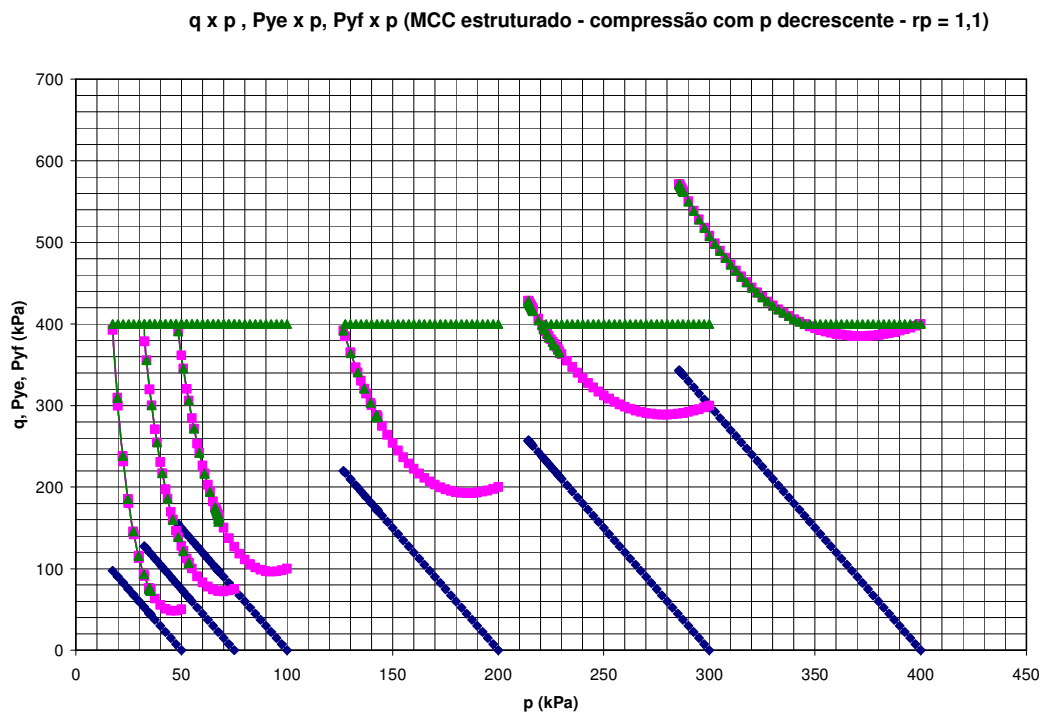
**Figura 4.66. Curvas  $\epsilon_v$  x  $\epsilon_s$ , para simulação de ensaios sob tensão normal média decrescente: (a) Curvas para grandes deformações e (b) curvas para  $\epsilon_s$  limitado a 0,05, ou 5% ( $r_p = 1,0$ ).**

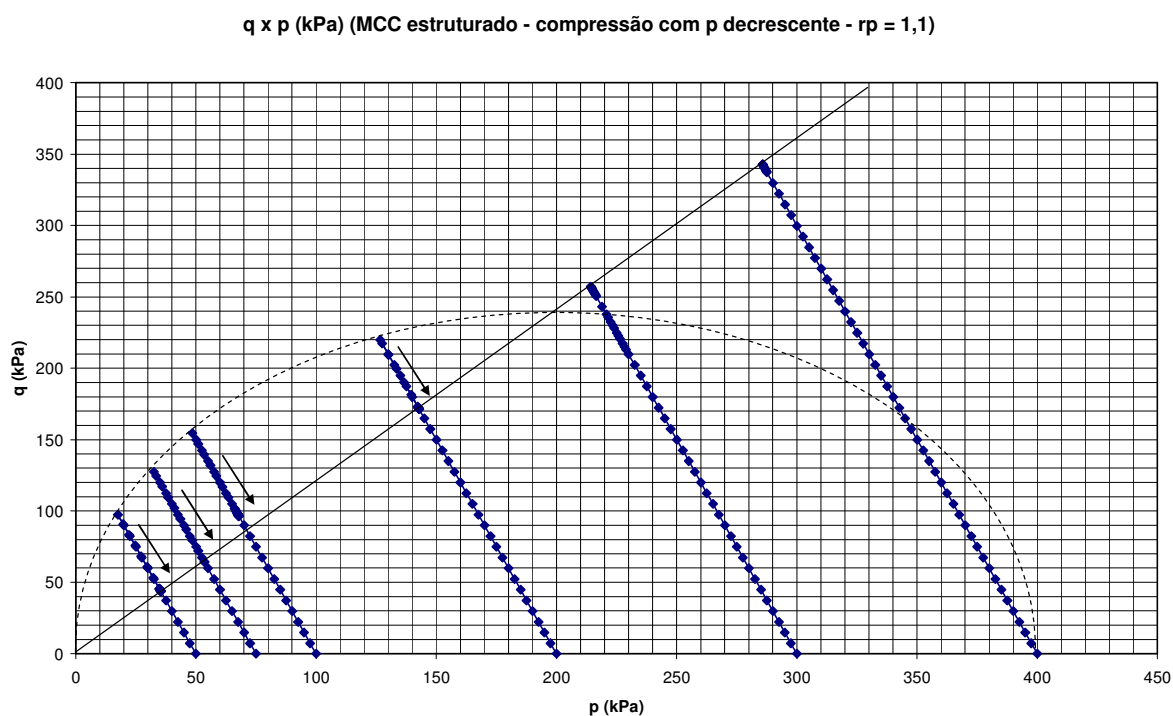


(a)



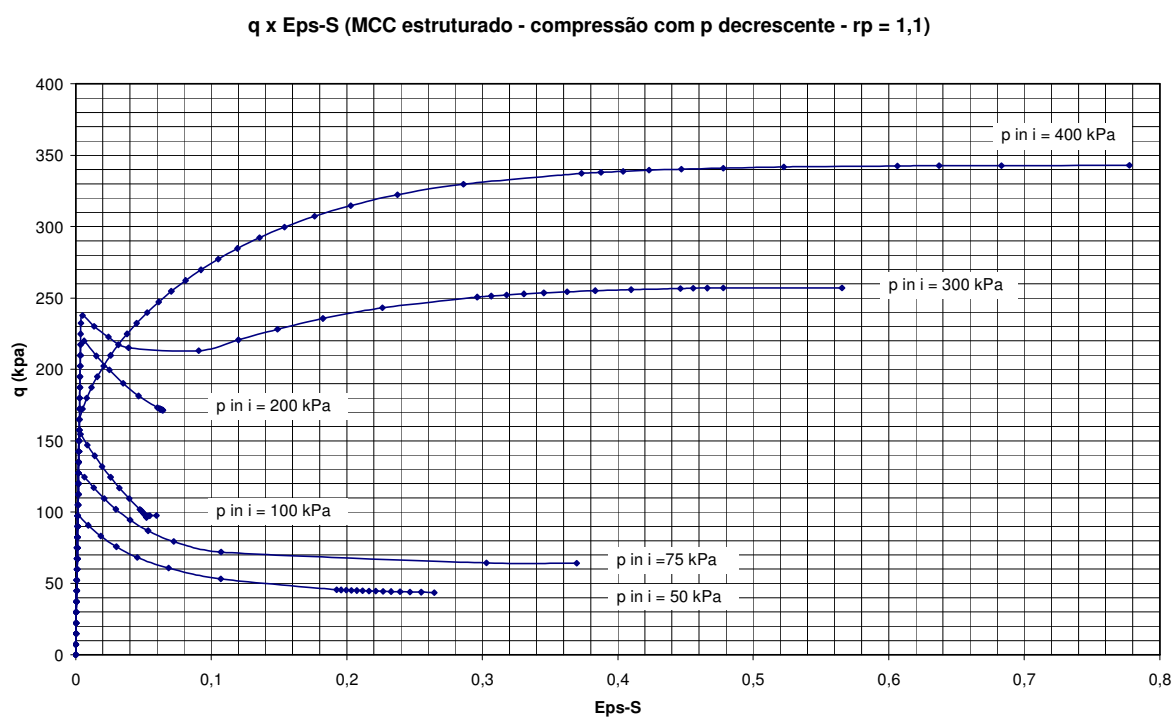
**Figura 4.67. Trajetórias de tensões (a) e (b) para simulação de ensaios sob tensão normal média decrescente, gráfico de curvas múltiplas ( $r_p = 1,1$ ).**



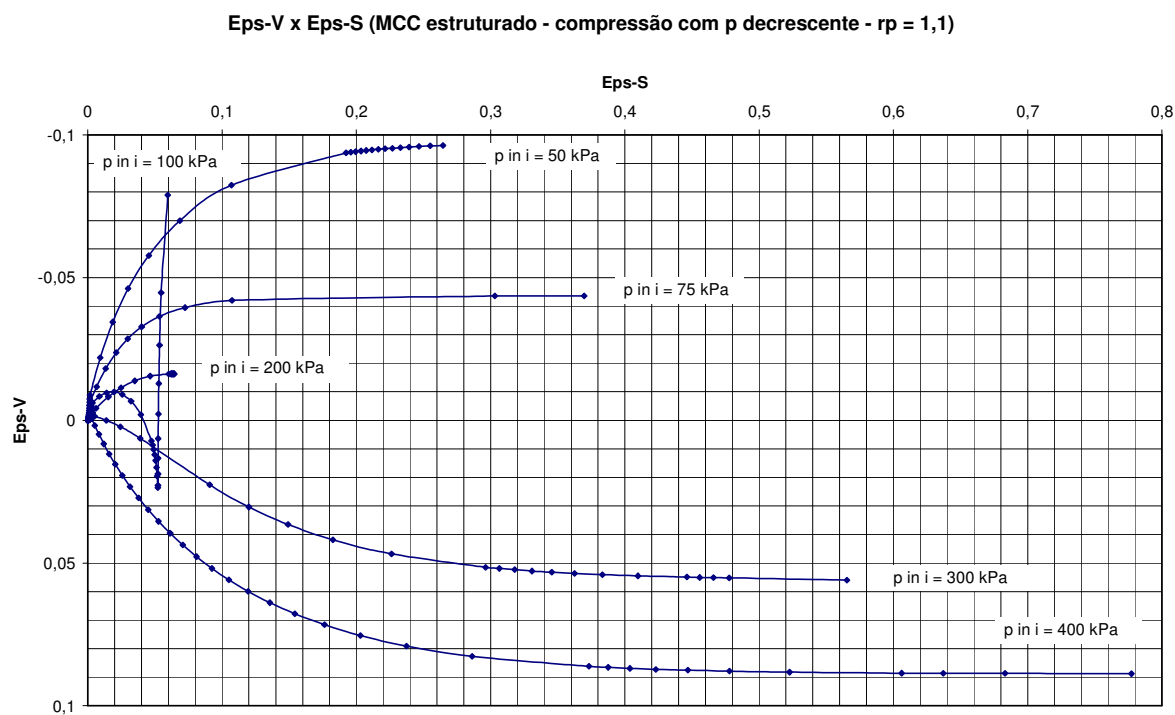


(b)

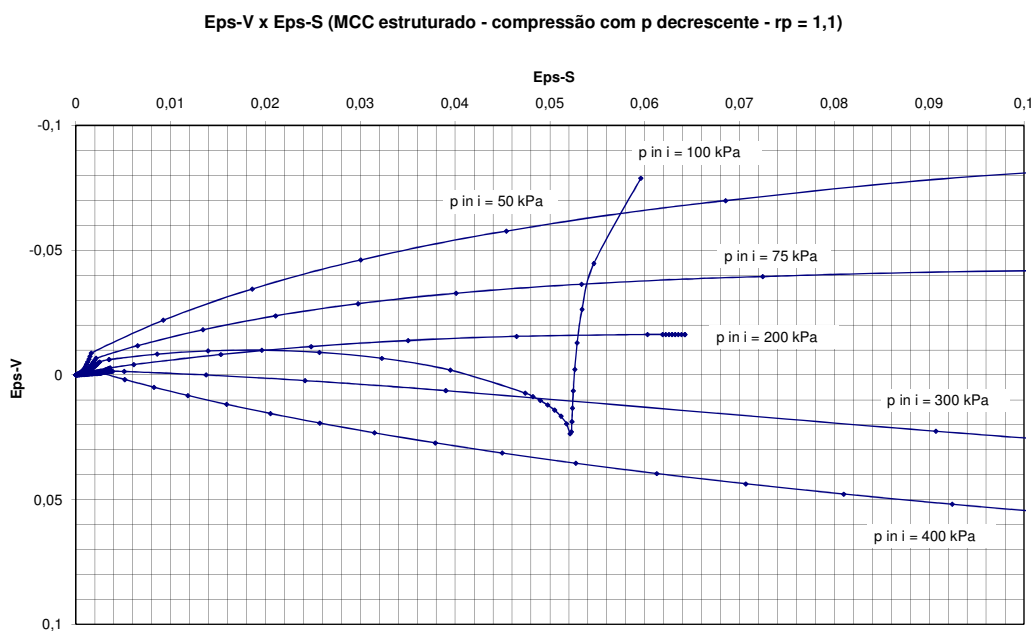
**Figura 4.68. Curvas tensão-deformação para simulação de ensaios sob tensão normal média decrescente: (a) Curvas  $q \times \epsilon_s$  e (b) Curvas  $q \times \epsilon_s$ , para  $\epsilon_s$  limitado a 0,1, ou 10% ( $r_p = 1,1$ ).**



**Figura 4.69. Curvas  $\epsilon_v \times \epsilon_s$ , para simulação de ensaios sob tensão normal média decrescente: (a) Curvas para grandes deformações e (b) curvas para  $\epsilon_s$  limitado a 0,1, ou 10% ( $r_p = 1,1$ ).**



(a)



(b)

#### **4.2.4. Simulação de Ensaio de Compressão Confinada**

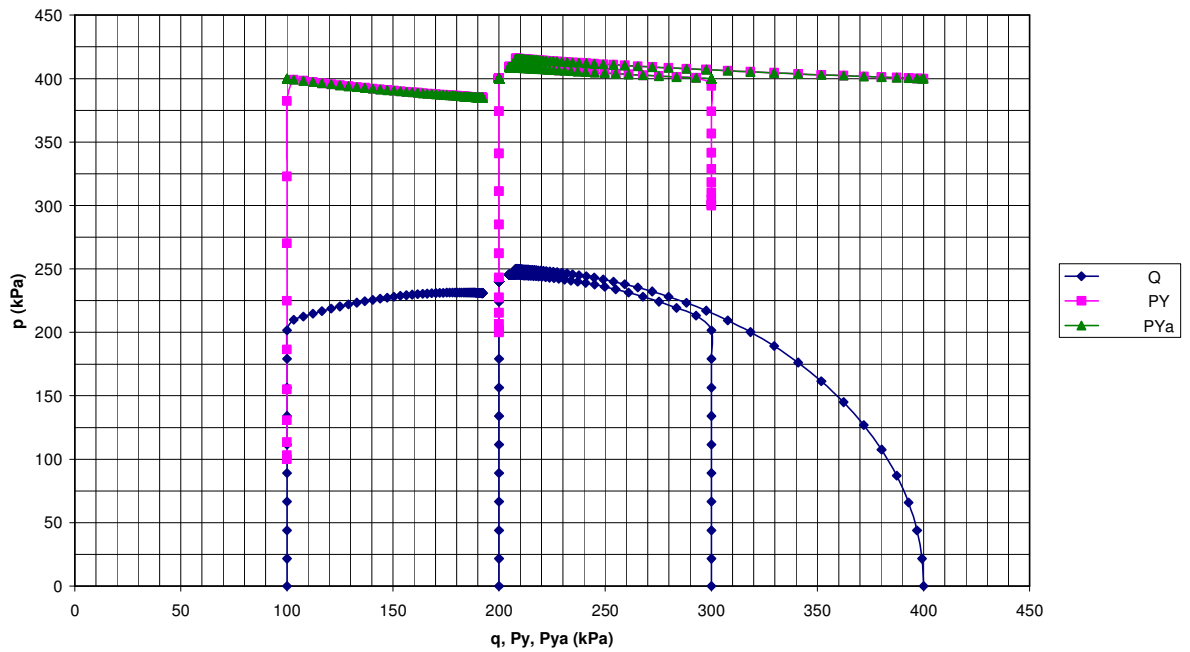
Para a compressão confinada, como as trajetórias de tensão (resultantes da trajetória de deformações imposta) não atingem a superfície de ruptura, os resultados do MCC com dano acoplado e do MCC Estruturado com dano acoplado produzem os mesmos resultados.

#### **4.2.5. Simulação de Ensaio de Compressão Não-Drenada**

Foram repetidas as simulações feitas para o modelo MCC com dano acoplado, para o modelo estruturado. A diferença a observar está no fato de que agora as trajetórias de tensão, resultantes da imposição de trajetória de deformações, com variação volumétrica nula, podem ultrapassar a superfície de ruptura, para estados de tensão  $(p, q)$  onde ao ser atingida a superfície de escoamento estruturada,  $0 \leq p < p_y/2$ . No modelo MCC com dano acoplado as trajetórias de tensão estavam limitadas pela superfície de ruptura, o que pode ser visto nas Figuras 4.38(b), 4.40(b) e 4.42(b). As figuras a seguir resumem as simulações feitas para o modelo estruturado, para quatro valores iniciais de tensão de adensamento isotrópica  $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa e valores de  $r_p = 1,0; 1,1$  e  $1,414$ .

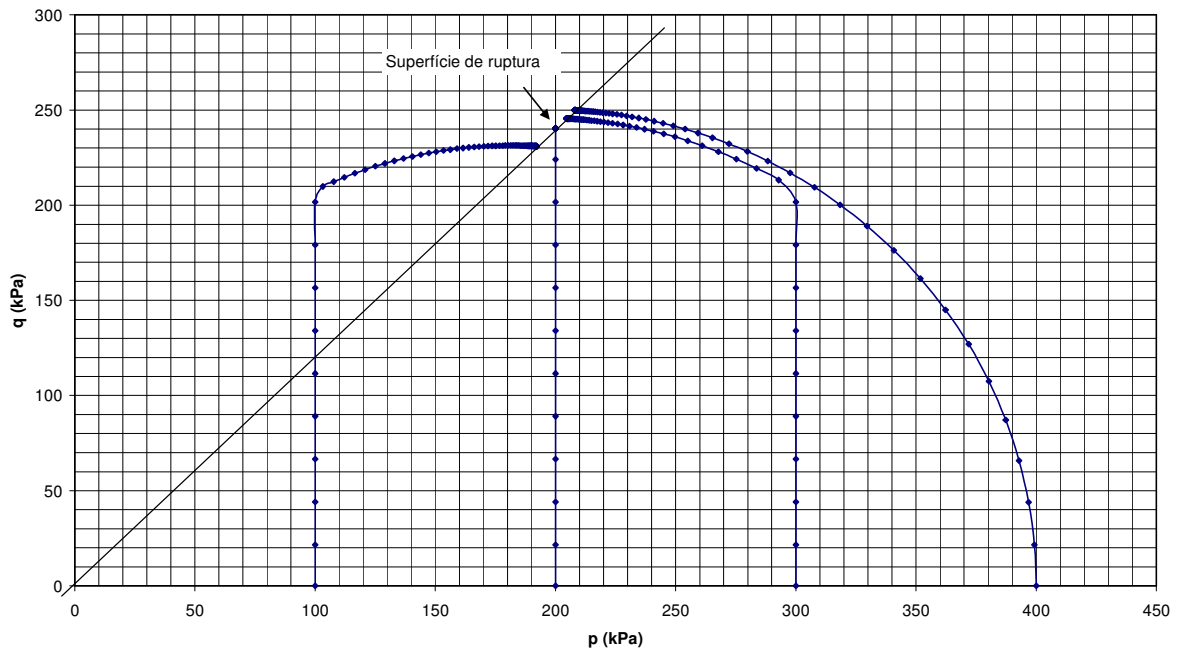
**Figura 4.70. (a) Curvas múltiplas e (b) curvas  $q \times p$ , para compressão confinada ( $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa, e  $r_p = 1,0$ ).**

$q \times p$ ,  $P_y \times p$ ,  $P_{ya} \times p$  (Compressão não-drenada,  $r_p = 1$ )



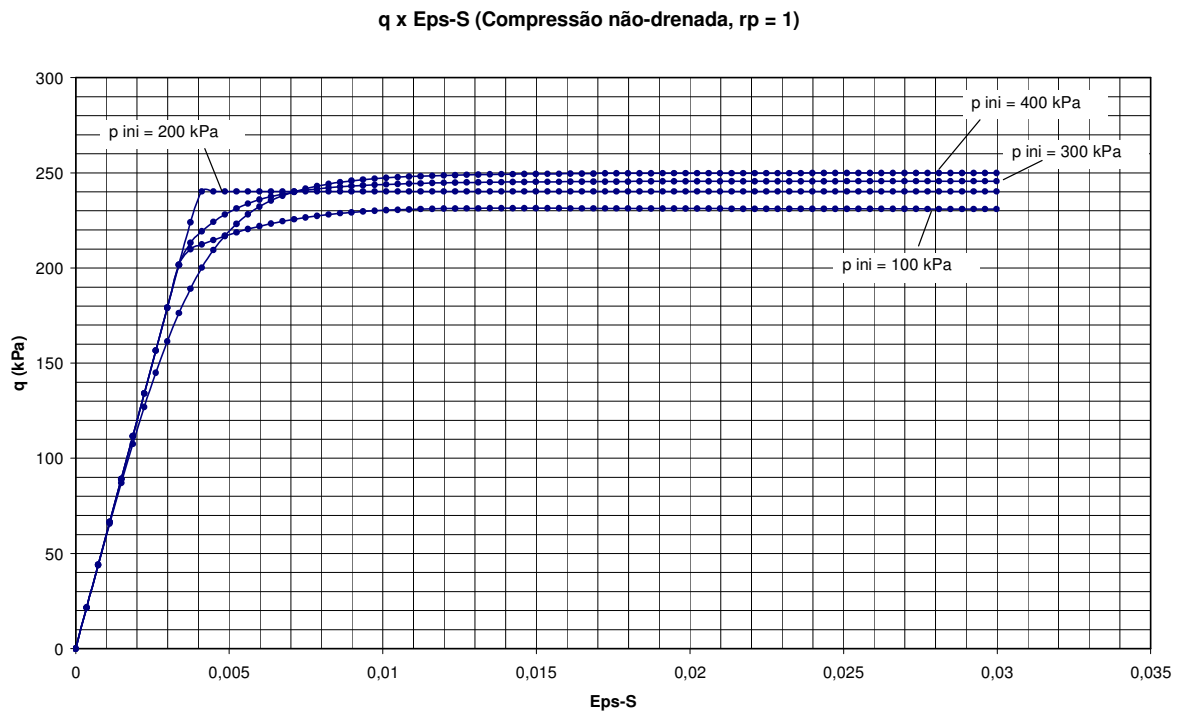
(a)

$q \times p$  (Compressão não-drenada,  $r_p = 1$ )

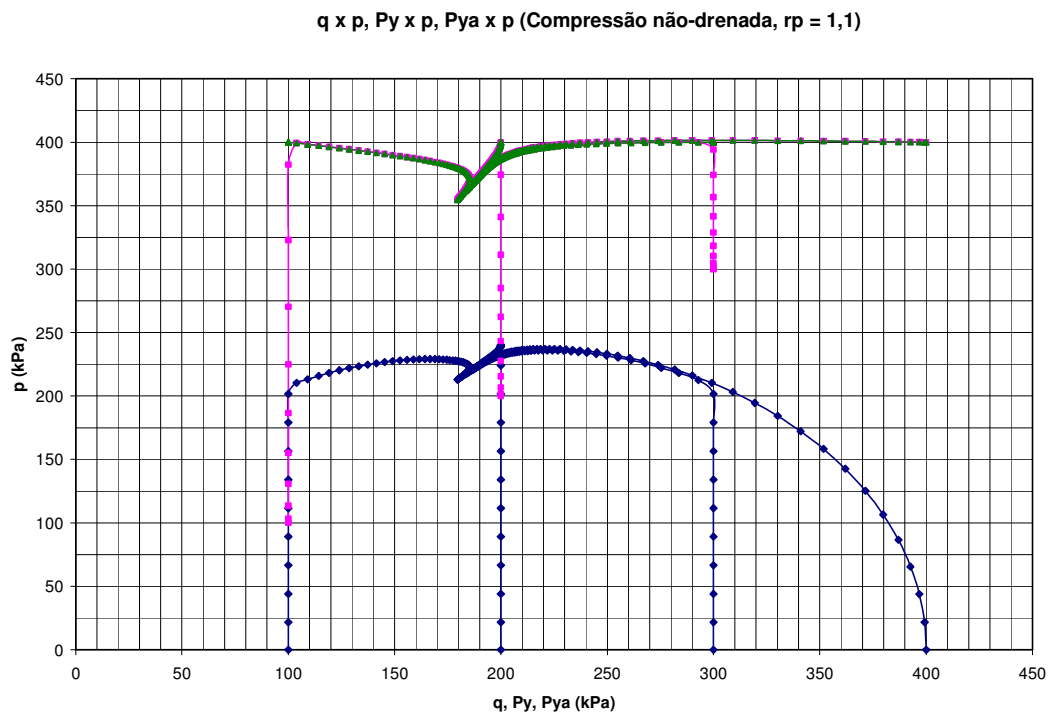


(b)

**Figura 4.71. (a) Curvas  $q \times \varepsilon_s$ , caso de compressão confinada**  
**( $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa, e  $r_p = 1,0$ ).**

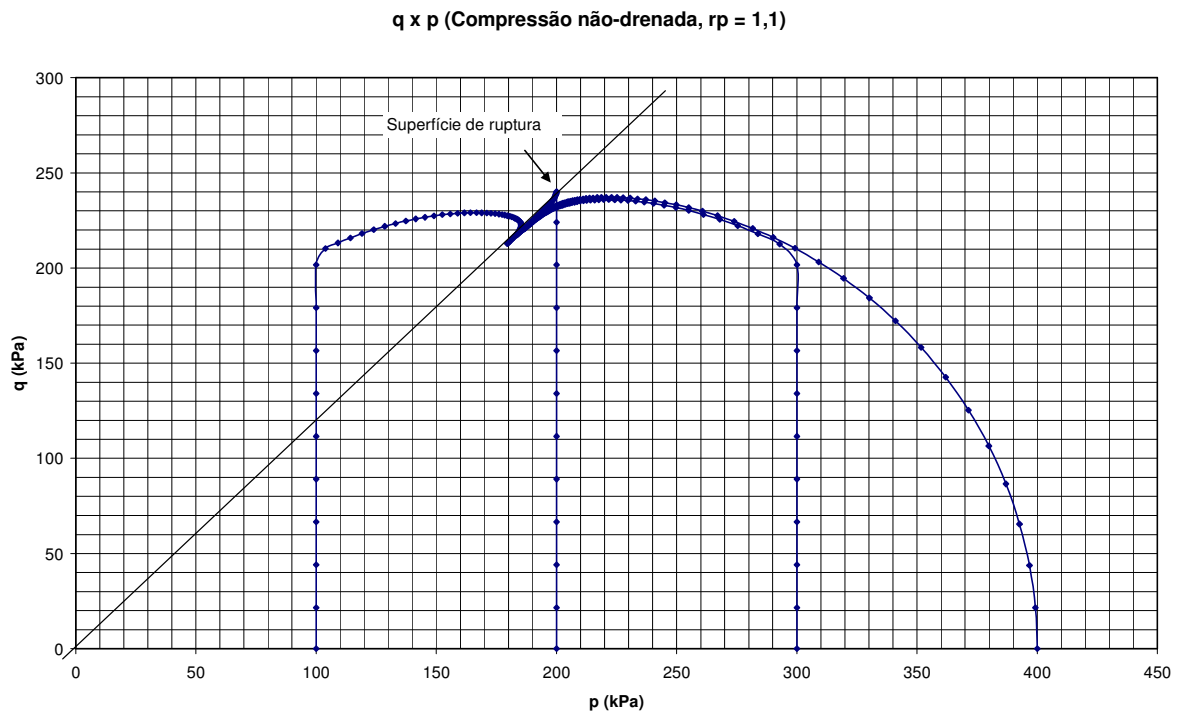


**Figura 4.72. (a) Curvas múltiplas e (b) curvas  $q \times p$ , para compressão confinada**  
**( $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa, e  $r_p = 1,1$ ).**



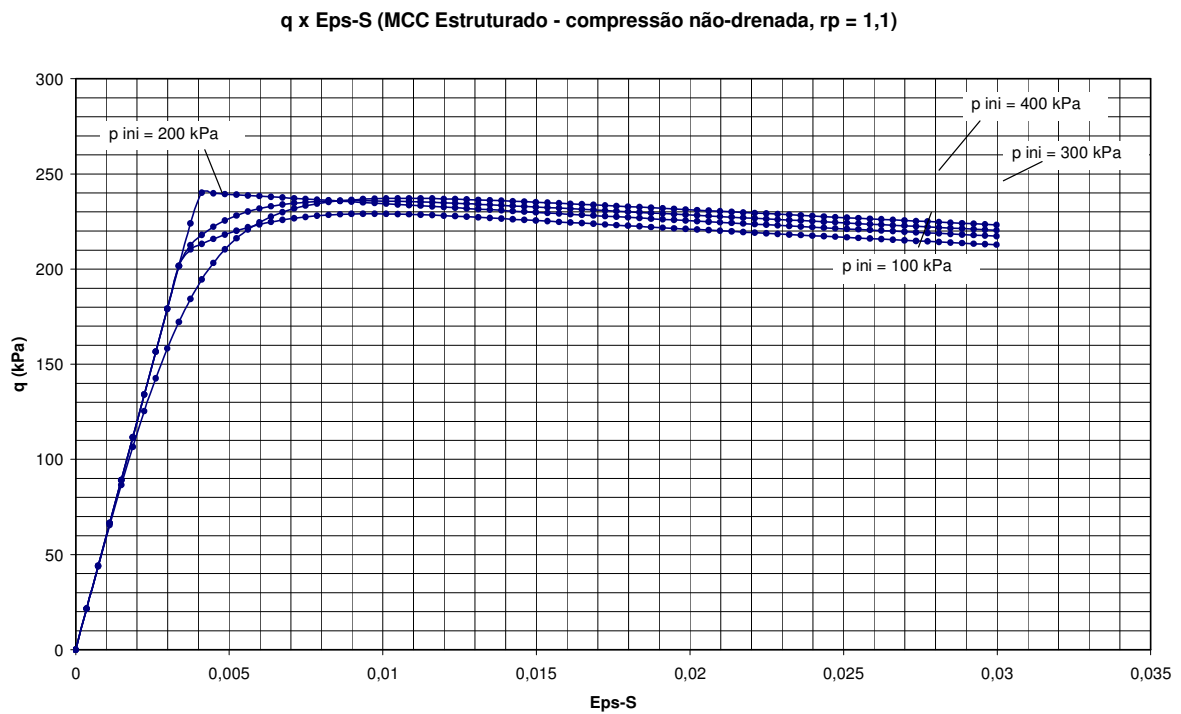
(a)



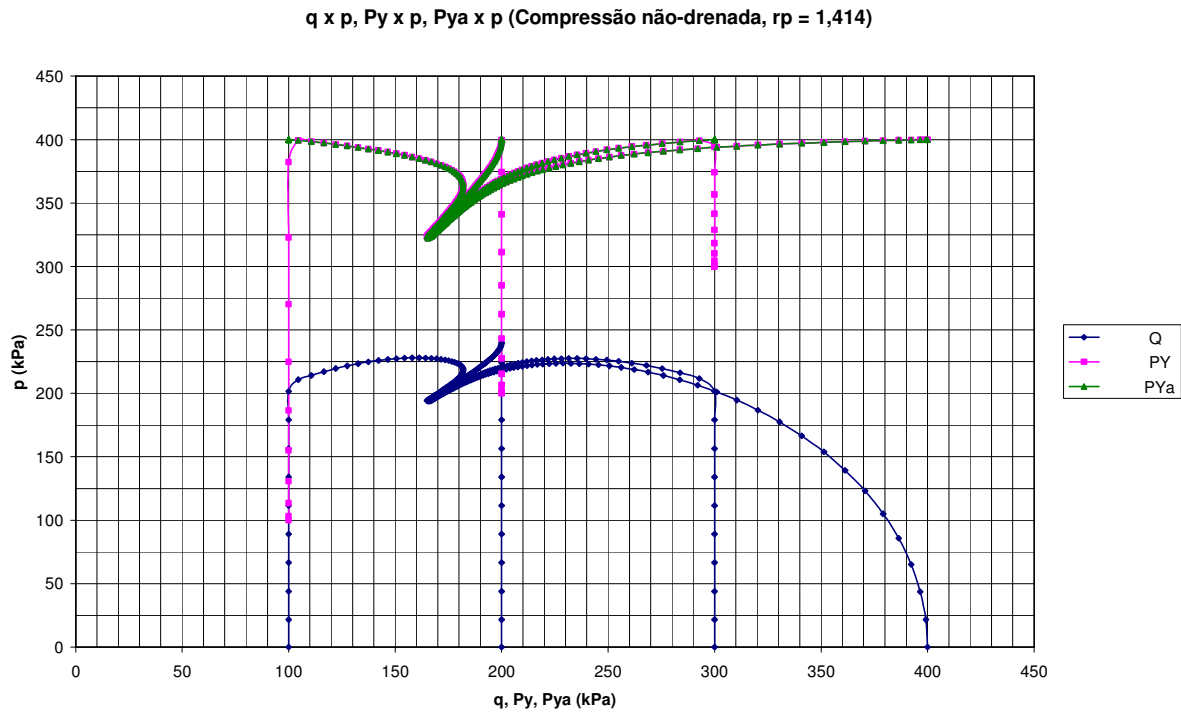


(b)

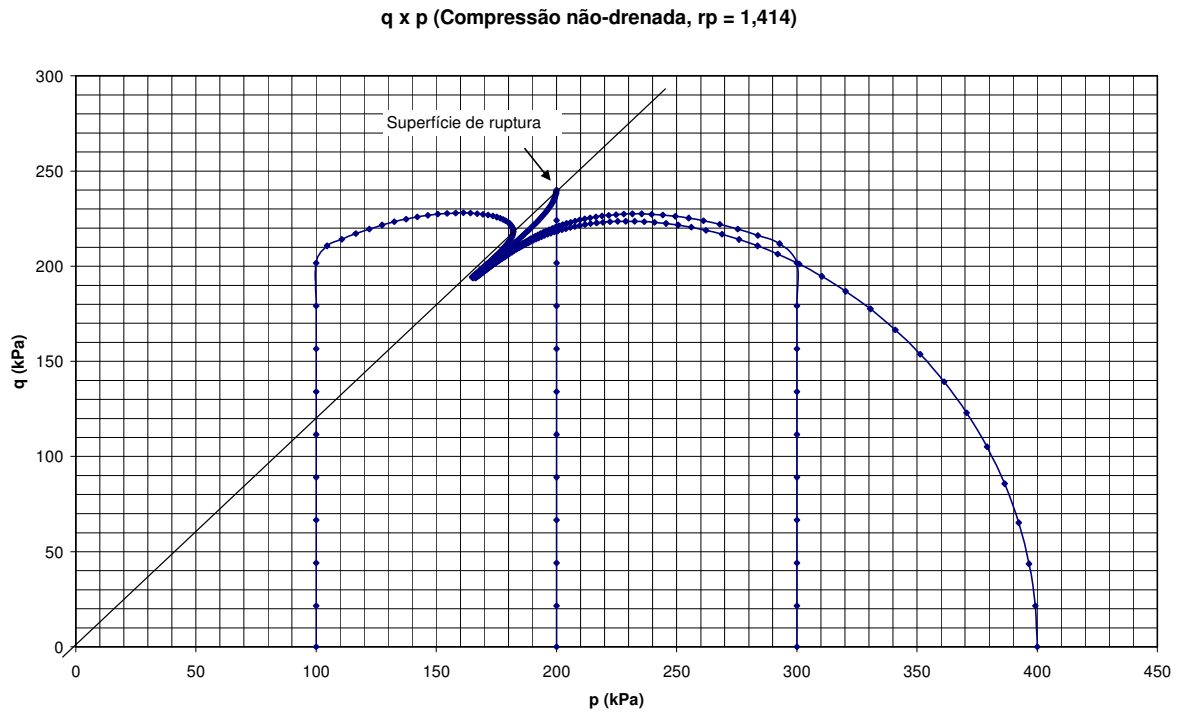
**Figura 4.73. Curvas  $q$  x  $\epsilon_s$ , caso de compressão confinada**  
**( $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa, e  $r_p = 1,1$ ).**



**Figura 4.74. (a) Curvas múltiplas e (b) curvas  $q \times p$ , para compressão confinada ( $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa, e  $r_p = 1,414$ ).**

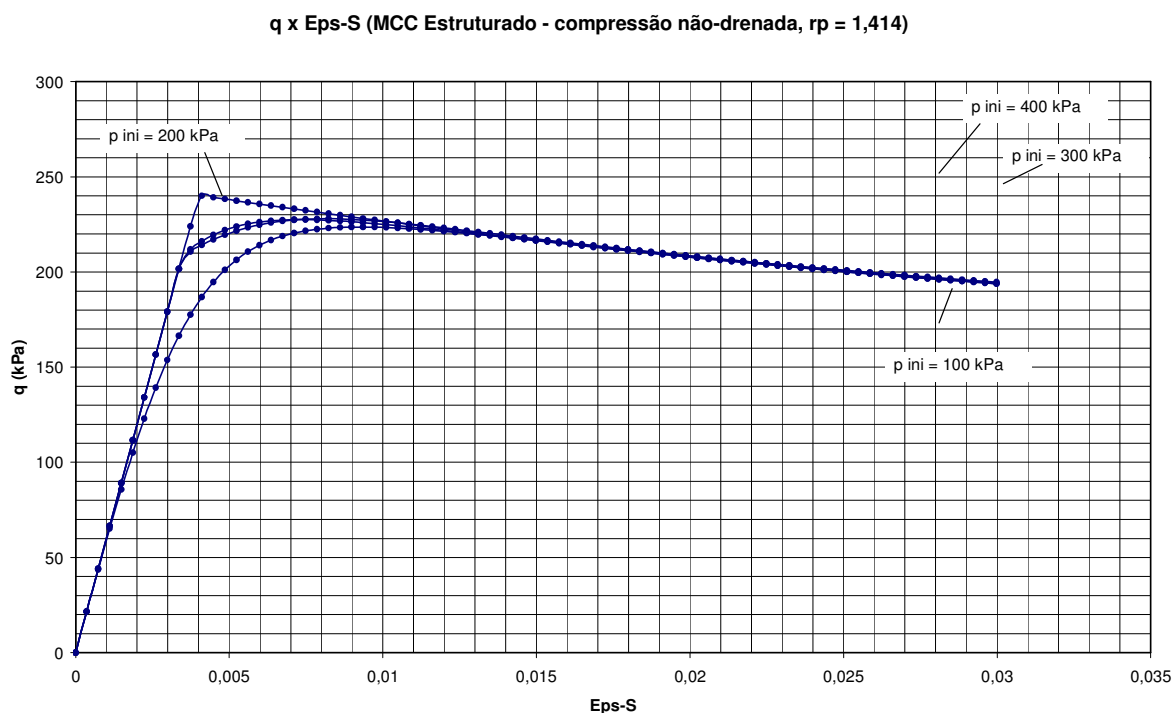


(a)



(b)

**Figura 4.75. (a) Curvas  $q \times \varepsilon_s$ , caso de compressão confinada**  
**( $p_{ini} = 100, 200, 300$  e  $400$  kPa, e  $r_p = 1,1$ ).**



Para as simulações feitas para  $r_p = 1,0$  as trajetórias de tensão convergem para pontos críticos definidos, sobre a superfície de ruptura. Observa-se pequena diferença na resistência final decorrente da tensão inicial de adensamento. Para as curvas com influência maior do dano, correspondentes a  $r_p = 1,1$  e  $r_p = 1,414$  os trechos finais das trajetórias de tensões, dos gráficos  $q \times p$ , das Figuras 4.72(b) e 4.74(b), têm tendência de coincidência, e de acompanhar a superfície de ruptura, o que se reflete no comportamento observado das curvas  $q \times \varepsilon_s$ , apresentadas nas Figuras 4.73 e 4.75.

### **4.3 EXEMPLOS DE MODELAGEM DE SOLOS RESIDUAIS**

O modelo descrito nos itens anteriores foi aplicado a dados da literatura para verificar as suas qualidades e defeitos na simulação do comportamento tensão-deformação real de alguns casos de solos residuais. Tais dados foram copiados do trabalho de Ibañez (2003), que utilizou resultados de ensaios com: solo residual de biotita gnaiss saturado, solo residual de arenito não-saturado e silte eólico não-saturado compactado. A modelagem requer como ensaios básicos o ensaio de compressão hidrostática e ensaios de definição da envoltória de resistência, e exige uma forma de ajuste com observação do conjunto de curvas de ensaios, como será descrito na modelagem do primeiro solo examinado.

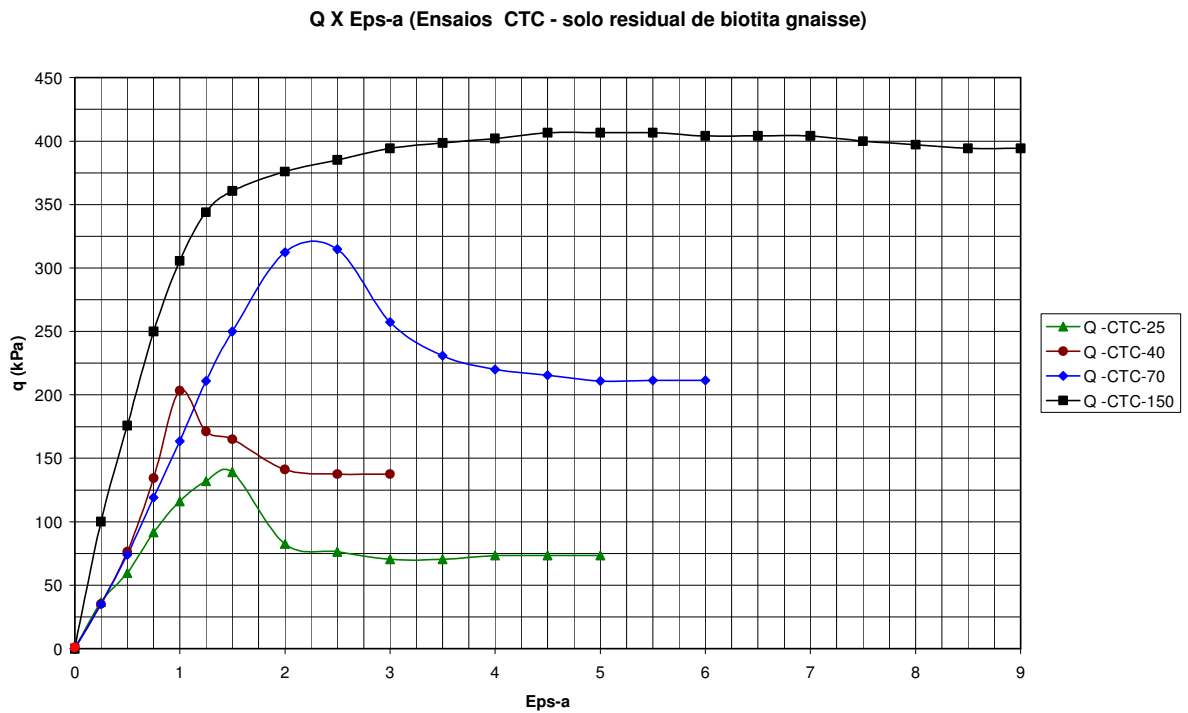
#### **4.3.1. Modelagem de Solo Residual de Biotita Gnaiss Saturado**

Segundo Ibañez (2003): “Trata-se de um solo residual jovem de biotita gnaiss, em condição saturada, proveniente do município do Rio de Janeiro – RJ. Este solo faz parte do sistema chamado de Serras da Carioca, as quais, por sua vez, compõem o maciço da Tijuca (Oliveira, 2000).

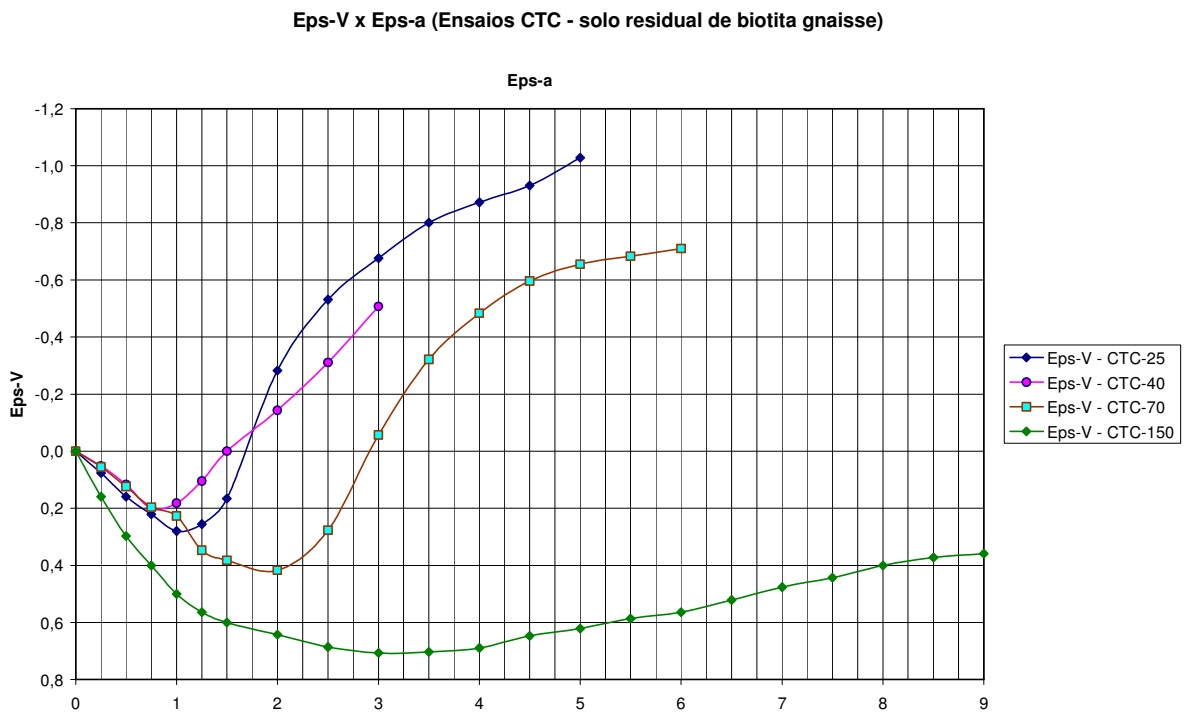
A investigação de laboratório compreendeu a execução dos seguintes ensaios:

- a) Ensaios triaxiais de compressão axial (CTC) considerando tensões de confinamento de 25, 40, 70 e 150 kPa (Figura 4.76).
- b) Ensaios triaxiais de extensão axial (RTE) considerando tensões de confinamento de 25, 40, 70 e 150 kPa (Figura 4.77).
- c) Ensaios triaxiais de compressão lateral (CTE) para tensões de confinamento de 20 e 70 kPa (Figura 4.77).
- d) Ensaios de compressão isotrópica (HC) (Figura 4.78).
- e) Ensaio oedométrico (EDO).”

**Figura 4.76. (a) Curvas  $q$  x  $\epsilon_a$ , caso de compressão CTC, (b) Curvas Eps-a x Eps-V**  
**( $p_{ini} = 25, 40, 70$  e  $150$  kPa)**

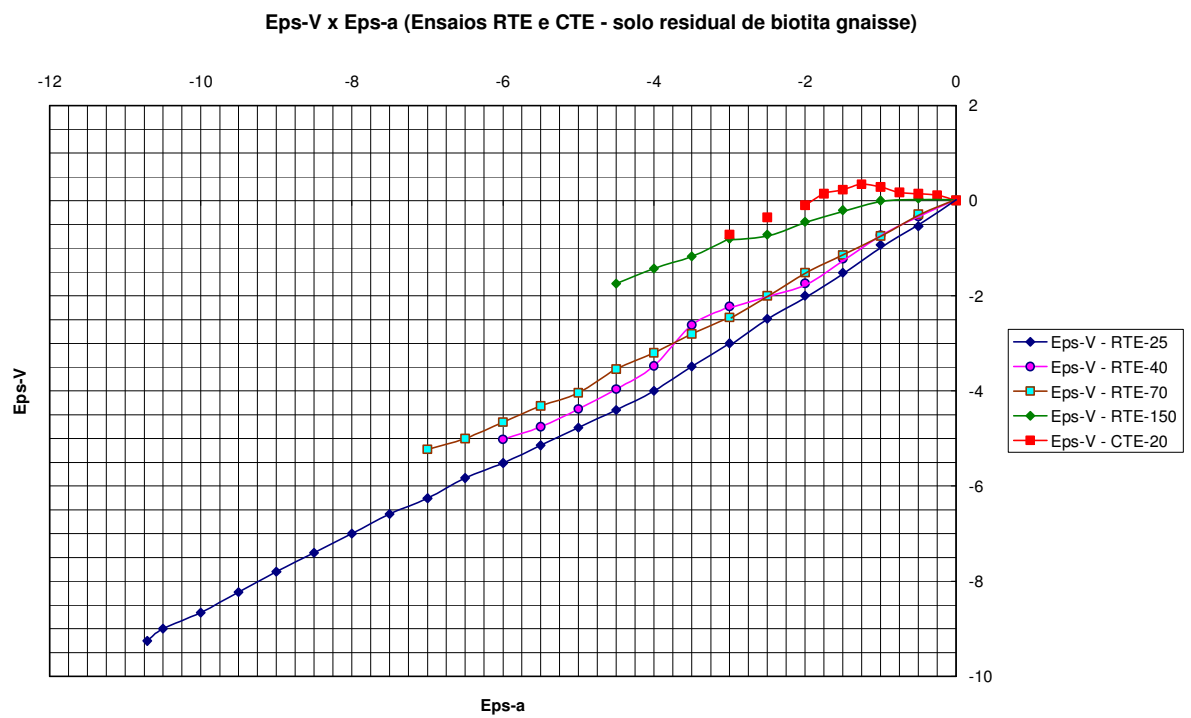
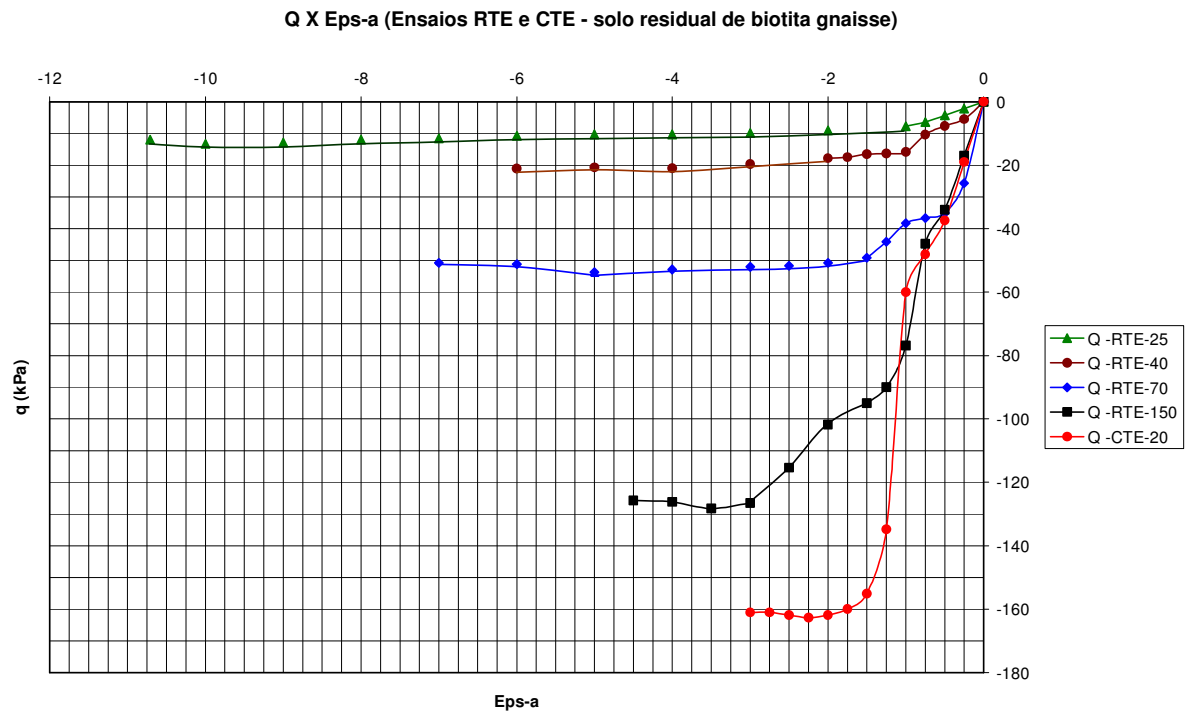


**(a)**



**(b)**

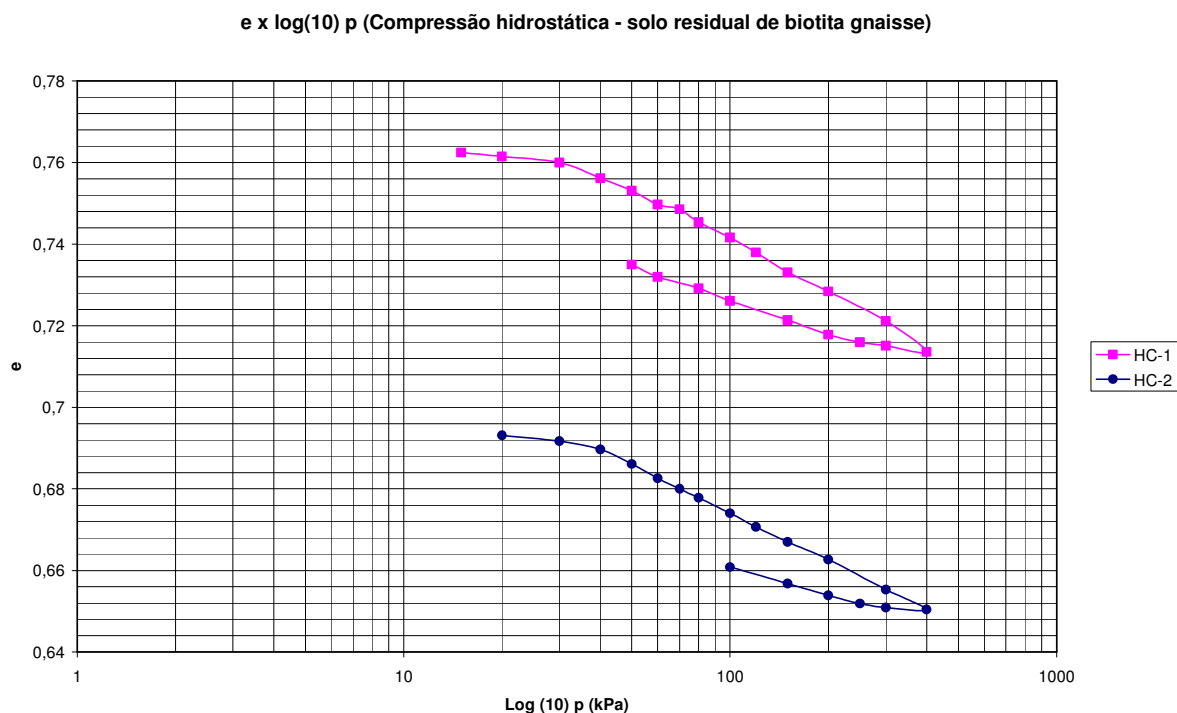
**Figura 4.77. (a) Curvas  $q$  x  $\epsilon_a$ , caso de compressão RTE ( $p_{ini} = 25, 40, 70$  e  $150$  kPa), e CTE ( $p_{ini} = 20$  kPa), (b) Curvas Eps-V x Eps-a.**



A curva do ensaio CTE-70 kPa não foi reproduzida na Figura 4.77, por conter apenas trecho inicial de carregamento.

A curva de reconstituição produzida por meio do modelo permite entender o comportamento esperado com a progressão do carregamento, como será mostrado à frente.

**Figura 4.78. Curvas de consolidação isotrópica  $e \times \log_{10} p$ .**



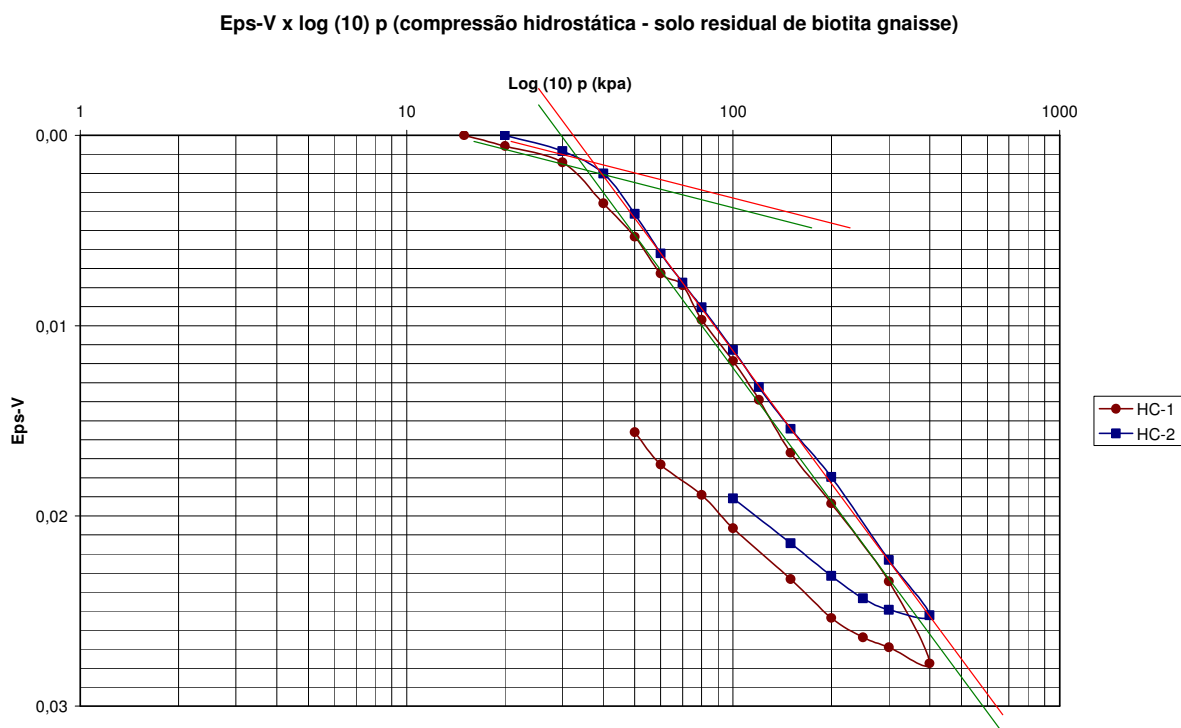
### **Determinação dos parâmetros do modelo MCC hiperplástico com dano acoplado (estruturado)**

Os parâmetros utilizados no modelo são os módulos  $k^*$  e  $\lambda^*$ ,  $G$ ,  $p_{y0}$ ,  $M$ ,  $\delta_{rem}$ ,  $D_{95}$  e o valor de  $r_p$ , que pode ser estabelecido por tentativas.

Os parâmetros  $k^*$  e  $\lambda^*$  são os coeficientes de compressão e de recompressão das curvas de compressão hidrostática  $\varepsilon_v \times \ln p$ . As deformações volumétricas  $\varepsilon_v$ , foram calculadas a partir das curvas  $e \times \log p$ , plotadas com ordenadas  $\Delta e / (1 + e_0)$ , onde  $e_0$  foi tomado como o índice de vazios inicial das curvas HC-1 e HC-2, para a pressão hidrostática inicial. Tal gráfico, expresso contra o  $\log_{10} p$ , está apresentado na Figura 4.79. A plotagem  $\varepsilon_v$

x  $\ln p$  produz gráficos que preservam a declividade das curvas do gráfico  $\varepsilon_v \times \log_{10} p$ . O efeito de dano acumulado é facilmente observável pela mudança de declividade do trecho de descarregamento, em relação à declividade do trecho de recompressão inicial.

**Figura 4.79. Curvas de consolidação isotrópica  $\varepsilon_v \times \log_{10} p$ .**



O gráfico  $\varepsilon_v \times \ln p$  está mostrado na Figura 4.80, que serviu de base para o cálculo dos coeficientes  $k^*$  e  $\lambda^*$ .

As duas curvas de ensaios, HC-1 e HC-2, mostraram trechos de recompressão e de compressão virgem com declividades similares. O valor de  $k^*$  foi obtido por meio de proporção:

$$k^* \rightarrow 0,0046$$

$$1 \rightarrow 2,4$$

$$\Rightarrow$$

$$k^* = 0,00192$$

Da mesma forma para o coeficiente de recompressão:

$$\lambda^* \rightarrow 0,03$$

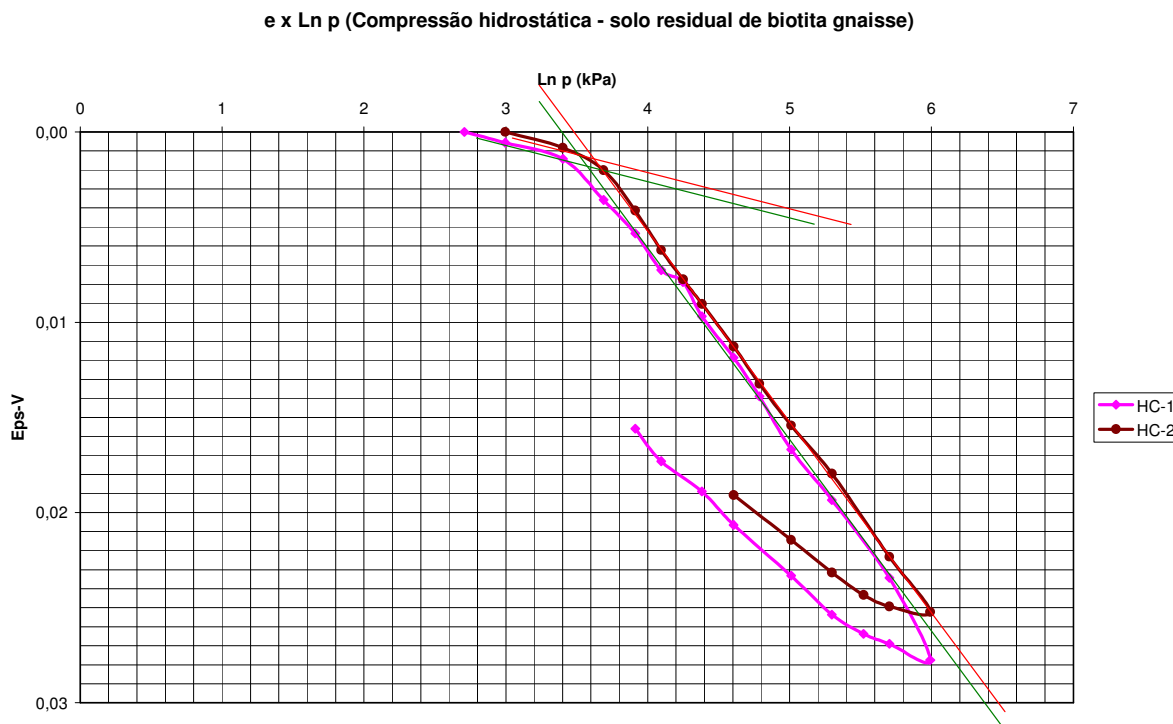
$$1 \rightarrow 2,9514$$

$$\Rightarrow$$

$$\lambda^* = 0,01016$$



**Figura 4.80. Curvas de consolidação isotrópica  $\varepsilon_v$  x  $\ln p$ .**



Em relação à tensão de pré-adensamento parece haver erro de potência de 10 na escala do gráfico apresentado no trabalho de Ibañez (2003). Tal conclusão está baseada no aspecto das curvas CTC-25, CTC-40 e CTC-70 kPa, da Figura 4.76, que mostram comportamento de material estruturado. A última curva CTC-150 é típica de material com endurecimento. Com base nesta hipótese foi tomado valor médio da pressão de adensamento entre as curvas HC-1 e HC-2 da Figura 4.79 como:

Pressão de pré-adensamento:

$$p_{y0} = 350 \text{ Kpa}$$

A determinação do módulo cisalhante  $G$ , que está relacionado à declividade do trecho elástico inicial dos gráficos  $q$  x  $\varepsilon_s$ , exigiu a replotagem dos gráficos  $q$  x  $\varepsilon_a$ , onde  $\varepsilon_a$  é a deformação específica vertical dos corpos de prova, em termos de  $q$  contra a deformação específica de distorção. Tais curvas estão apresentadas contra as curvas obtidas com o uso do modelo à frente, ver Figura 4.83(a). Para a determinação do módulo cisalhante foram utilizadas somente as curvas dos ensaios CTC, que apresentam curvas mais uniformes, como pode ser observado na Figura 4.76.

A deformação específica vertical  $\varepsilon_a$  e de distorção  $\varepsilon_s$  estão relacionadas por meio da equação:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_a - \frac{\varepsilon_v}{3} \quad (4.2)$$

Os valores de  $G$  obtidos no trecho inicial das curvas dos ensaios CTC, pela relação  $\varepsilon_s = q / 3G$ , estão resumidos na Tabela 4.1.

**Tabela 4.1. Valores de módulo cisalhante  $G$  dos ensaios CTC.**

Ensaio	q (kPa)	$\varepsilon_s$	$G$ (kpa)
CTC-25	136	0,01	4533
CTC-40	230	0,0079	9704
CTC-70	330	0,018	6111
CTC-150	435	0,01	14500

Foi adotado o valor médio:

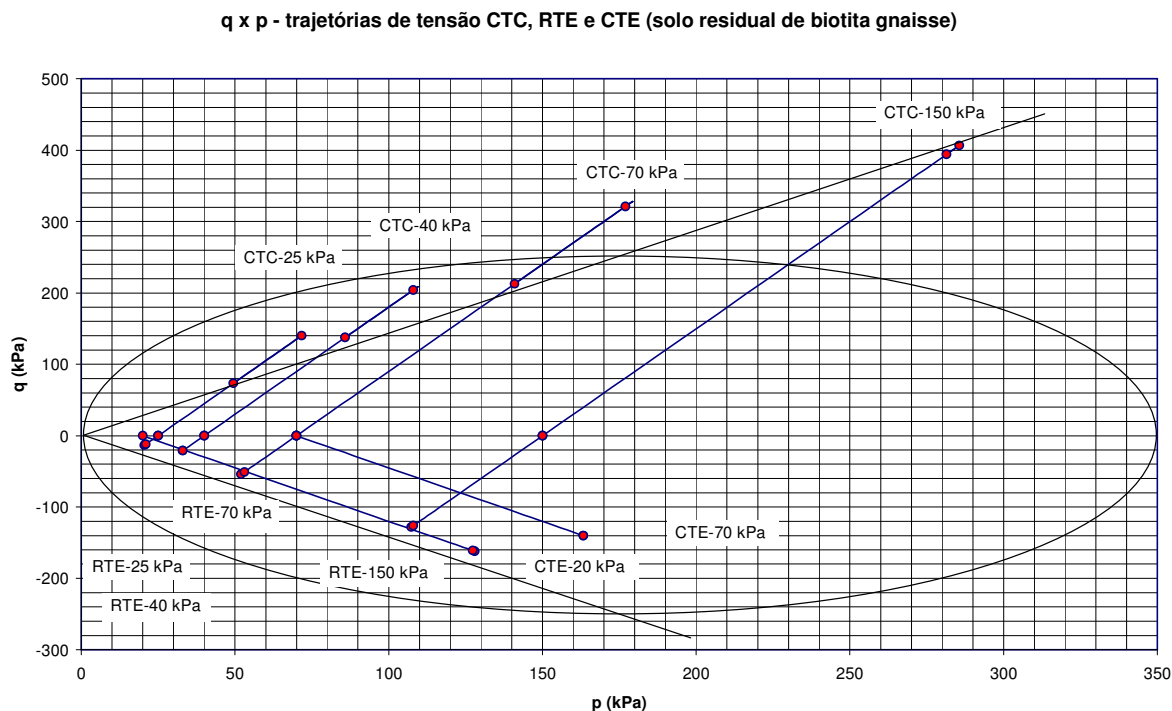
$$G = 8700 \text{ kPa}$$

O parâmetro  $M$ , que indica a declividade da superfície de ruptura definida pelos estados de tensão residual, no trecho estruturado, ou de pico, no trecho de endurecimento, dos diversos ensaios, é razoavelmente bem definido para os ensaios CTC, como pode ser visto na Figura 4.81.

O ajuste da elipse inicial de escoamento é feito pela escolha dos seus diâmetros. O diâmetro ao longo do eixo  $p$  é definido pela tensão de pré-adensamento  $p_{y0} = 350 \text{ Kpa}$ , determinada no ensaio de compressão hidrostática. E o diâmetro ao longo da direção do eixo  $q$  é escolhido em função da posição dos pontos de tensão residual, no trecho estruturado e da envoltória para os valores de resistência de pico, na região de endurecimento. Tal critério levou à determinação do valor de declividade da superfície de ruptura 1: $M$ , na forma H:V.

Parâmetro  $M$ :

$$M = 1,433.$$

**Figura 4.81. Trajetórias de tensão dos ensaios CTC, RTE e CTE.**

Na Figura 4.81 observa-se certa dispersão das resistências de pico dos ensaios CTC, em relação à elipse de escoamento, no trecho estruturado. Os ensaios CTE e RTE, plotados no lado inferior da elipse, mostram tendência de convergência para a superfície de ruptura e não para o trecho estruturado da superfície de escoamento elíptica. De fato, como é possível observar na Figura 4.77(a) tais ensaios não mostraram resistências de pico. Na simulação com o modelo estruturado, já era possível esperar, portanto, concordância apenas com os valores residuais de resistência.

O parâmetro  $\delta_{rem}$ , fração da pressão de pré-adensamento remanescente após processo conjunto de endurecimento e dano, foi fixado em 50 %, embora o gráfico de compressão hidrostática não mostre tal efeito de maneira evidente. A quantidade de dano  $D_{95}$ , correspondente a 95 % da queda na tensão de pré-adensamento, foi tomada igual a 0,93.

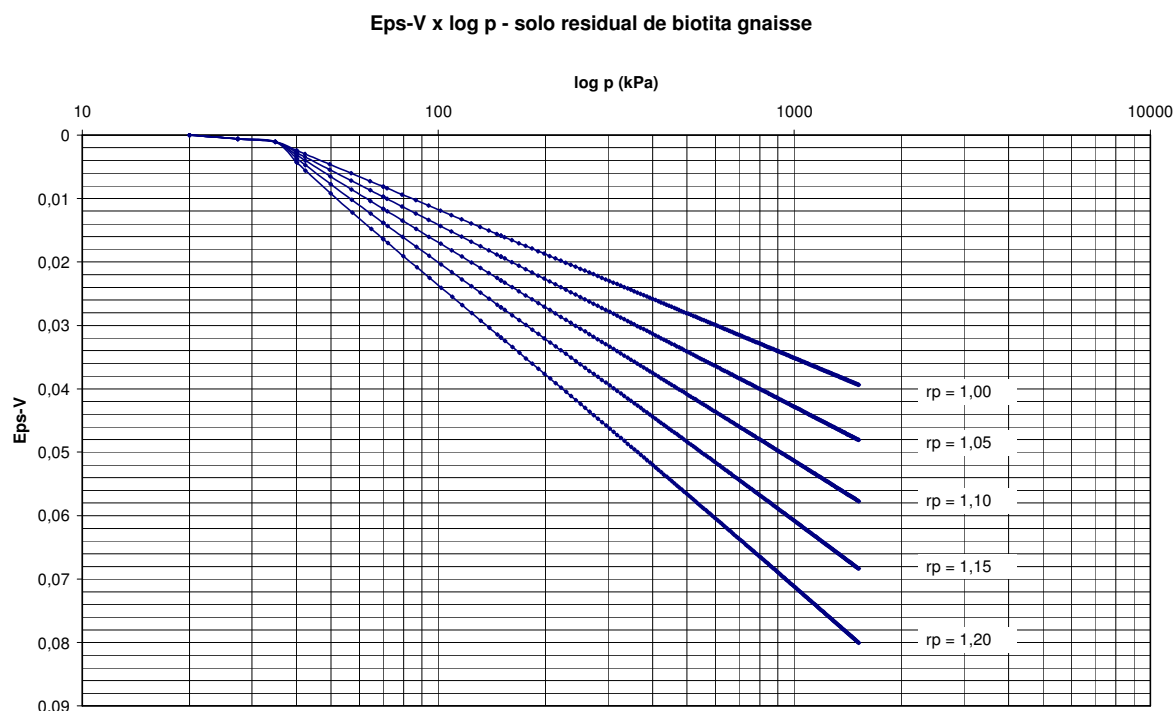
Parâmetro  $\delta_{rem}$ :

$$\delta_{rem} = 0,50$$

Parâmetro  $D_{95}$ :

$$D_{95} = 0,93$$

Para a escolha inicial de  $r_p$  foram plotadas as curvas, de variação da pressão de pré-adensamento em função de  $r_p$ , apresentadas na Figura 4.82.

**Figura 4.82. Função de endurecimento/amolecimento.**

Do gráfico da Figura 4.82, pode-se inferir que, ao se assumir efeito de dano diferente de zero, ou seja, valores de  $r_p > 1,0$ , pode ser mais correto tomar valores do parâmetro  $\lambda^*$  menores, de tal forma que associados ao valor de  $r_p > 1,0$ , reproduzam a reta de compressão virgem com a declividade correspondente à  $r_p = 1,0$ . Na modelagem a seguir, entretanto, foi utilizado valor de  $r_p = 1,1$  e o parâmetro  $\lambda^*$  retirado das curvas de ensaio de adensamento hidrostático.

O valor de  $r_p$  reflete a proporção de endurecimento/dano. A presença de dano é evidente, tanto pela mudança da declividade do trecho de descarregamento no ensaio de compressão hidrostática, como já observado, na Figura 4.79, quanto pela presença das resistências de pico para as curvas CTC-25 kPa, CTC-40 kPa, e CTC-70 kPa, na Figura 4.76. O pequeno decaimento da curva  $q \times Eps-S$  que pode ser observado no gráfico da Figura 4.83, para a curva CTC-150 kPa, também é resultante de efeito de dano. Desta forma a utilização de valor  $r_p > 1,0$  é indicada, tendo sido escolhido o valor:

Parâmetro  $r_p$ :

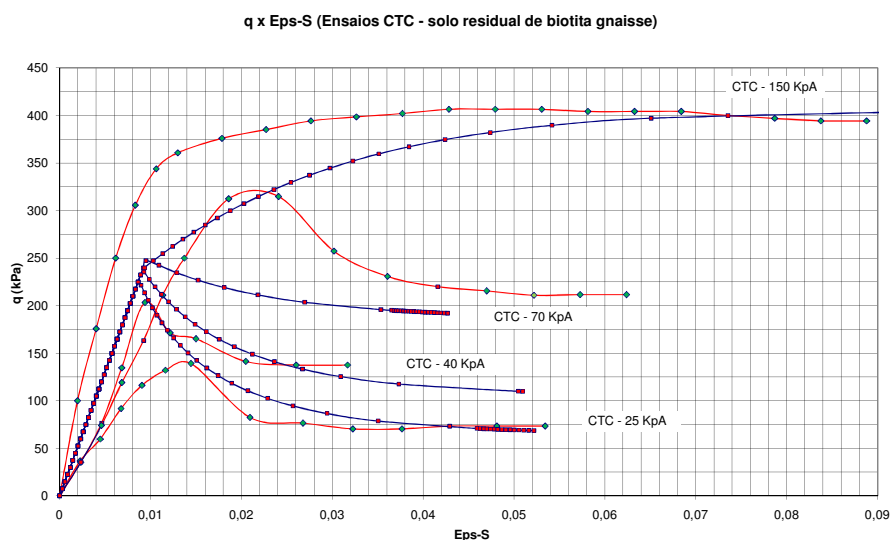
$$r_p = 1,1$$

O emprego dos valores dos parâmetros escolhidos, para modelagem do solo residual de biotita gnaisse, produziu os resultados descritos a seguir. Para os ensaios CTC as curvas de ensaios e de simulação com o modelo estão representadas nas Figuras 4.83(a) e 4.83(b).

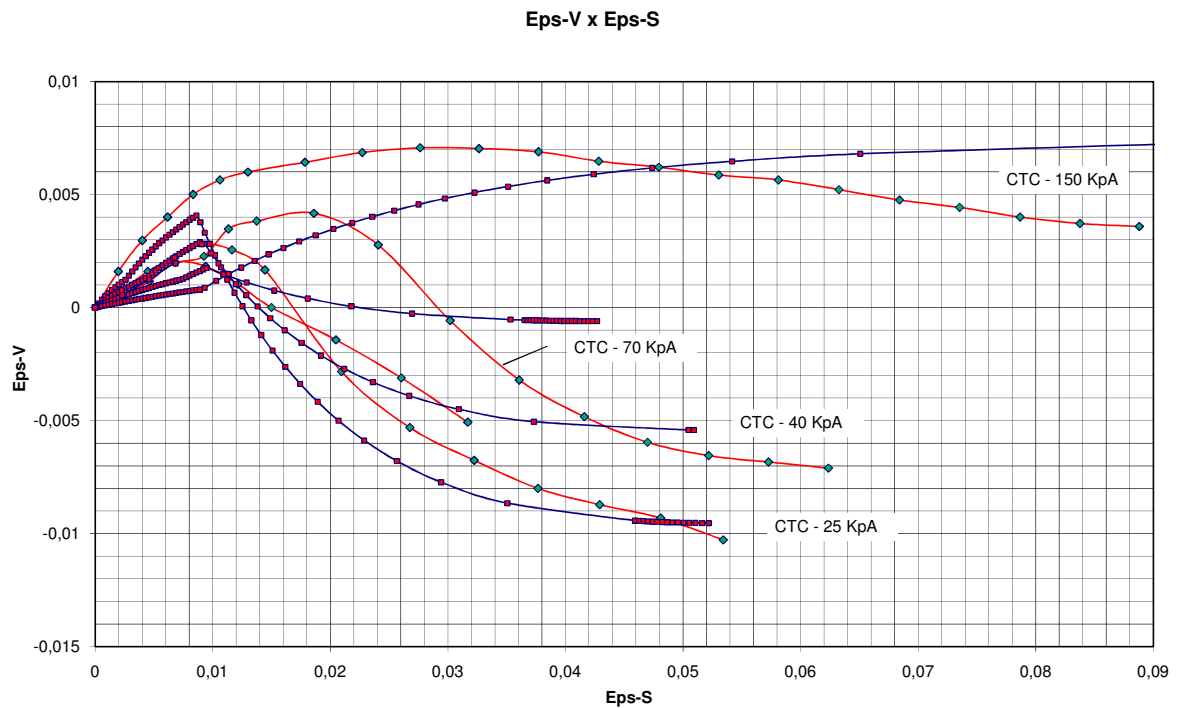
Para os ensaios RTE e CTE, os resultados obtidos com o modelo estruturado, estão resumidos nas Figuras 4.84 a 4.86.

Observar que nas Figuras 4.83(a) e 4.83(b) as deformações  $Eps-S$  estão representadas em valor decimal, ao passo que na Figura 4.76(a) as deformações  $Eps-a$  estão expressas em porcentagem. Estas deformações específicas estão relacionadas pela expressão (4.2), isto é,  $\varepsilon_s = \varepsilon_a - \varepsilon_v/3$ .

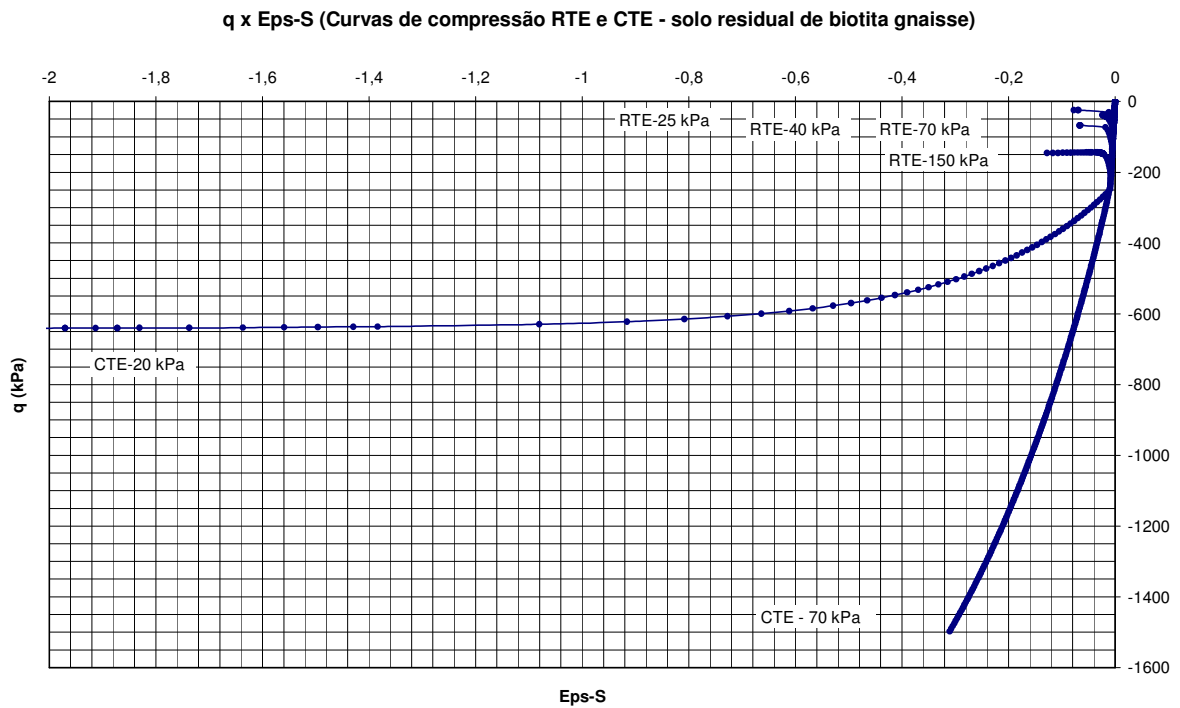
**Figura 4.83. Ensaios CTC, (a) curvas  $q$  x  $Eps-S$ , (b) Curvas  $Eps-V$  x  $Eps-S$ .**

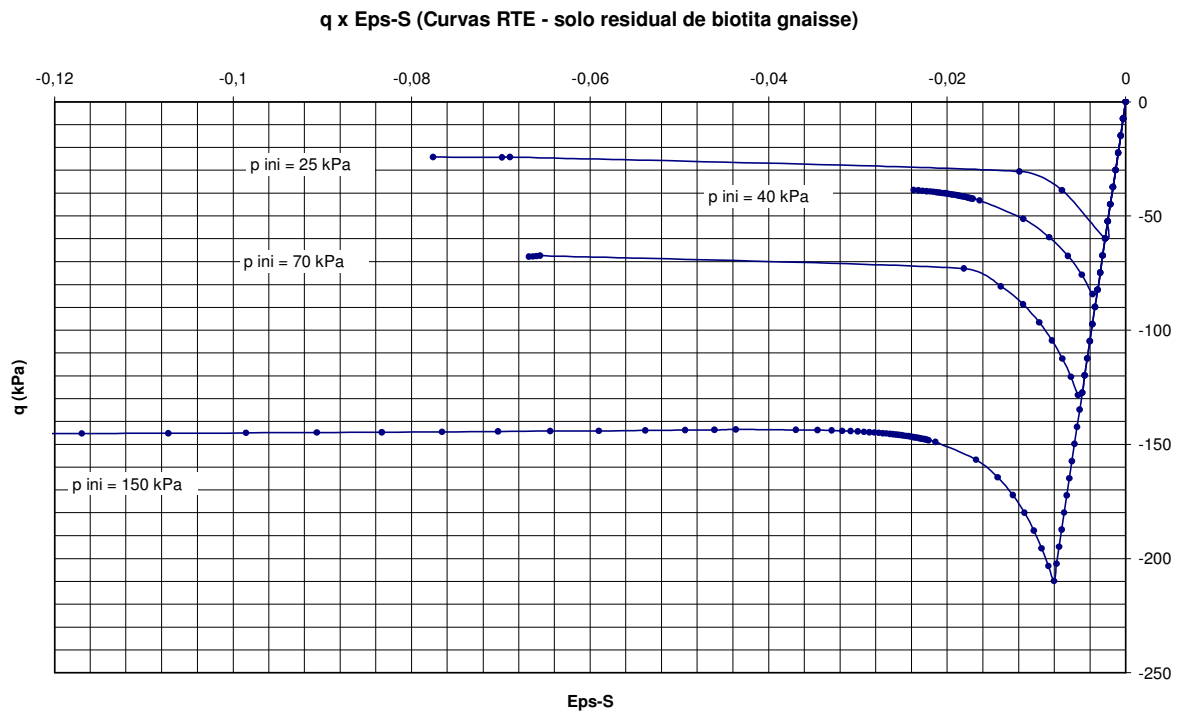


(a)

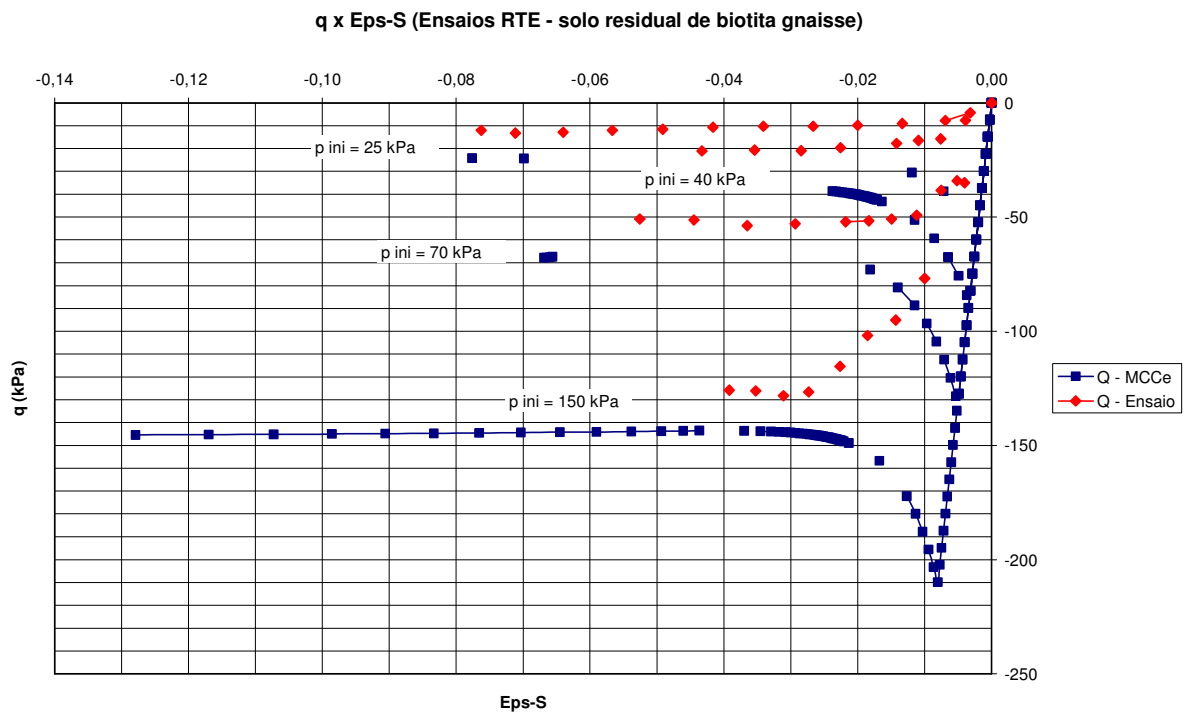


**Figura 4.84. Ensaaios RTE e CTE, (a) curvas  $q \times Eps-S$ , (b) Curvas  $q \times Eps-S$  de modelagem RTE e (c) Curvas RTE de ensaio e de modelagem.**



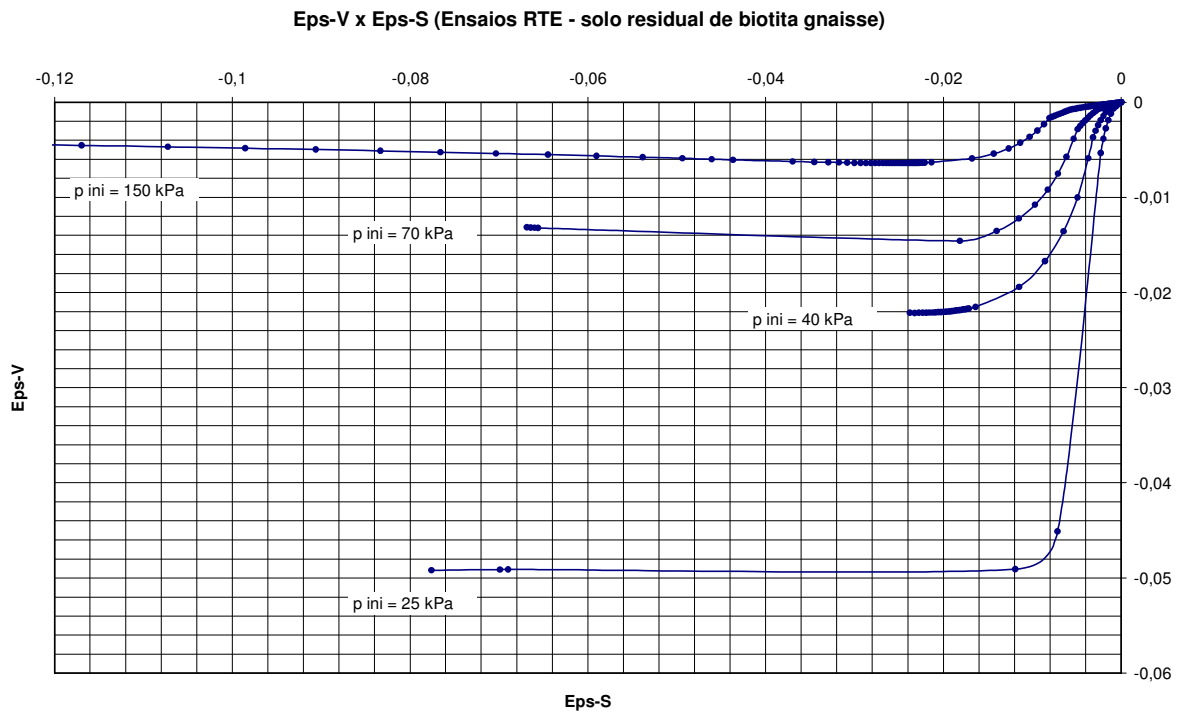


(b)

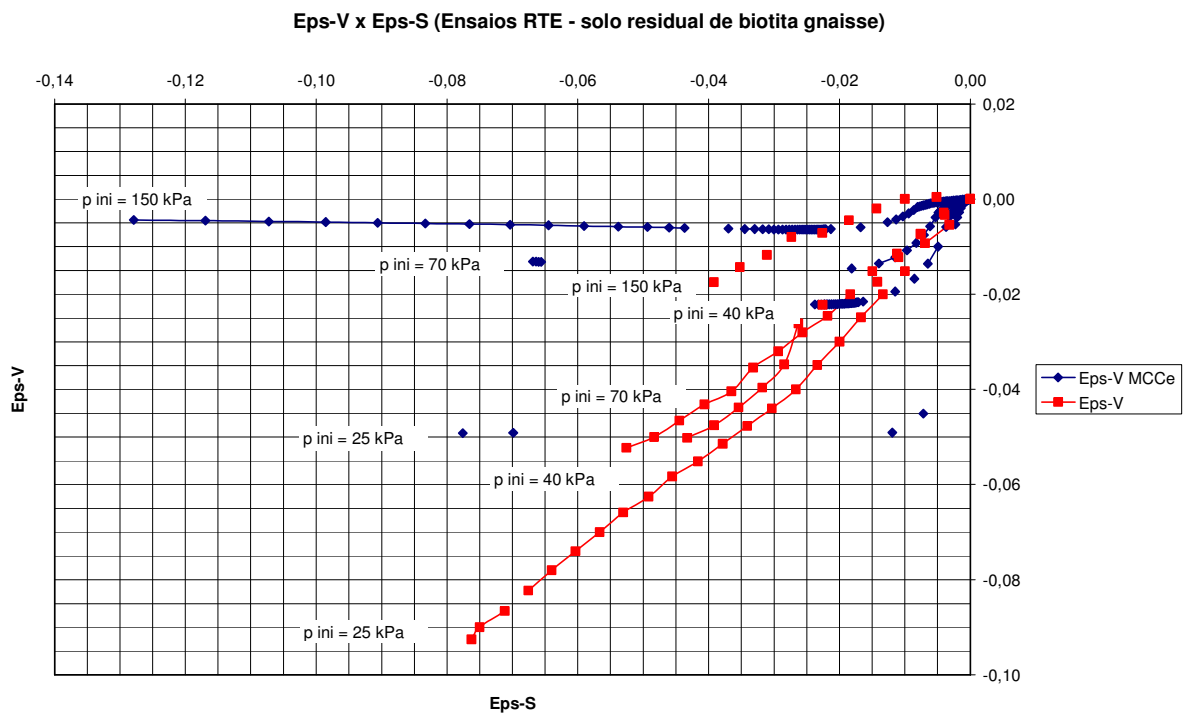


(c)

**Figura 4.85. Ensaio RTE: (a) Curvas Eps-V x Eps-S de modelagem e (b) Curvas Eps-V x Eps-S de modelagem e de ensaio.**



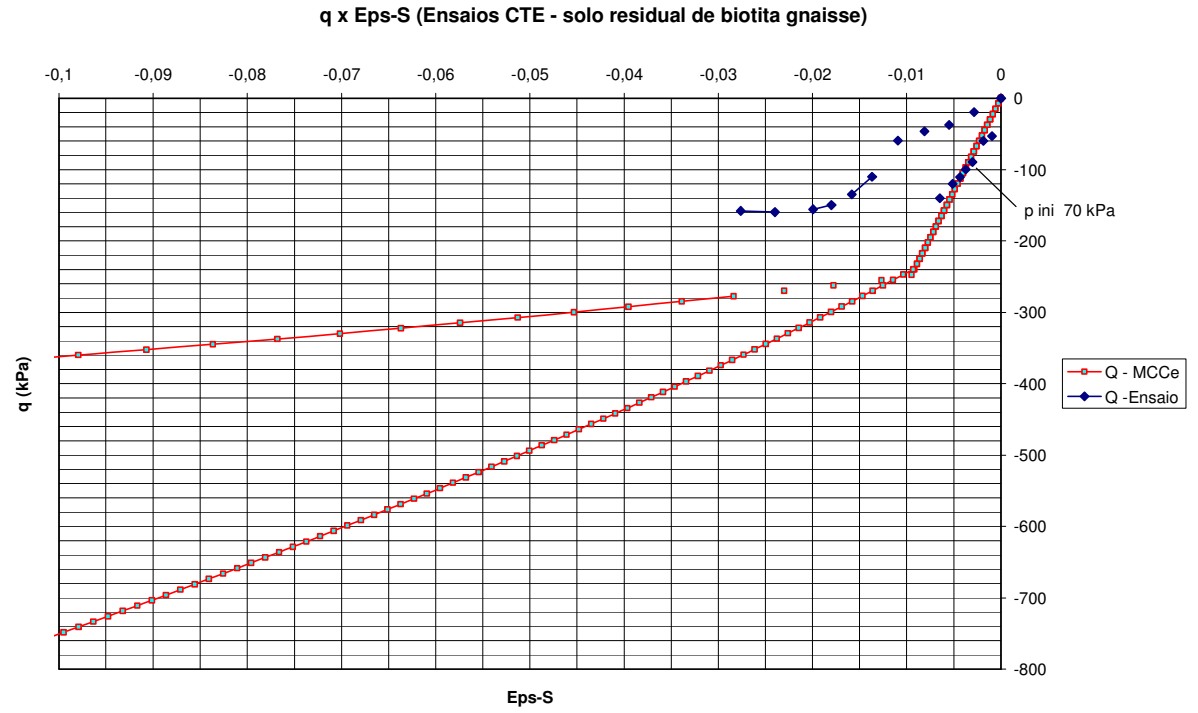
(a)



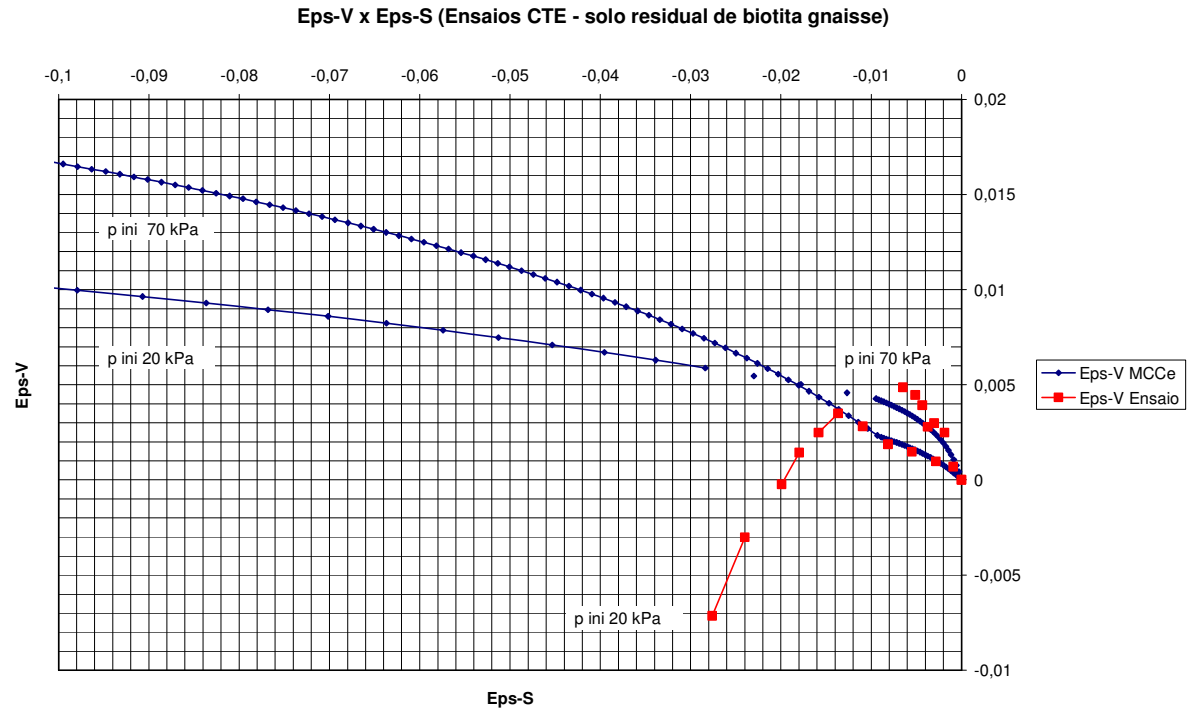
(b)



**Figura 4.86. Ensaaios CTE, (a) curvas  $q \times Eps-S$  de ensaio e de modelagem e (b) Curvas  $Eps-V \times Eps-S$  de ensaio e de modelagem.**



(a)



A modelagem das curvas dos ensaios CTC apresenta uma aproximação grosseira para as resistências de pico, do trecho estruturado, e boa concordância para resistências residuais, o que já era esperado pela escolha da superfície de ruptura indicada na Figura 4.81. A correlação entre Eps-V x Eps-S mostra atendimento à tendência de variação observada nos ensaios.

Para os ensaios RTE há alguma concordância para os estados de resistência residual. Como esperado, o trecho estruturado apresenta picos de resistência na modelagem, não observados nos ensaios. Desta forma, também já era de se esperar pouca, ou nenhuma, relação entre as curvas Eps-V x Eps-S, além do trecho elástico inicial.

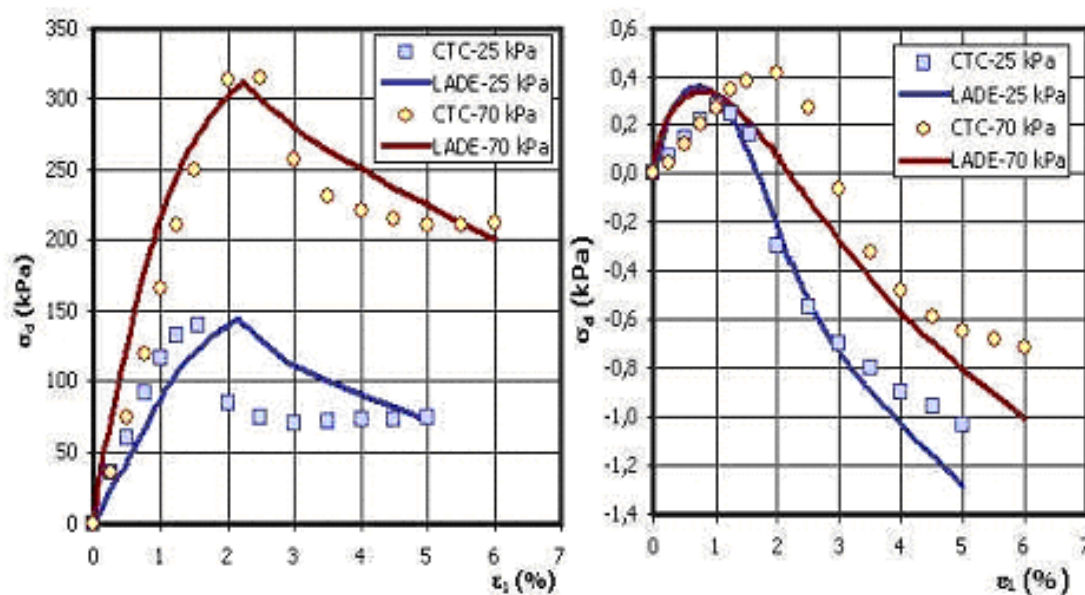
E, finalmente, para as curvas CTE, a Figura 4.86 mostra tendência similar de variação para as curvas de ensaio e de modelagem. Do exame da Figura 4.81, que apresenta as trajetórias de tensões dos diversos ensaios, observa-se que as trajetórias são quase paralelas à superfície de ruptura, implicando em possibilidade de grande endurecimento, resultado este que pode ser observado na modelagem, mostrada na Figura 4.84(a). Como as curvas de ensaios mostram dados apenas para baixos níveis de deformação, e não permitiram, particularmente para a curva CTE-70 kPa, a leitura com precisão das deformações, a comparação com os dados de modelagem, apresentada na Figura 4.86, tem apenas objetivo de ilustração.

Para comparação, com os resultados apresentados na Figura 4.83, apresenta-se a seguir resultado de ajuste de Modelo de Lade-Kim, feito por Ibañez (2003) para os ensaios CTC-25 e CTC-70 kPa. As curvas de Ibañez (2003) estão plotadas contra a deformação vertical  $\varepsilon_l$  e não contra a deformação de distorção  $\varepsilon_s$ . A relação entre as duas deformações é representada pela equação (4.2), reescrita com notação adaptada.

$$\varepsilon_s = \varepsilon_l - \frac{\varepsilon_v}{3} \quad (4.2 - \text{rep.})$$

onde  $\varepsilon_v$  é a deformação volumétrica específica.

**Figura 4.87. Ensaaios CTC e simulação por modelo de Lade-Kim (a) curvas  $\sigma_d \times \varepsilon_1$  e (b) Curvas  $\varepsilon_v \times \varepsilon_1$  (Ibañez, 2003).**

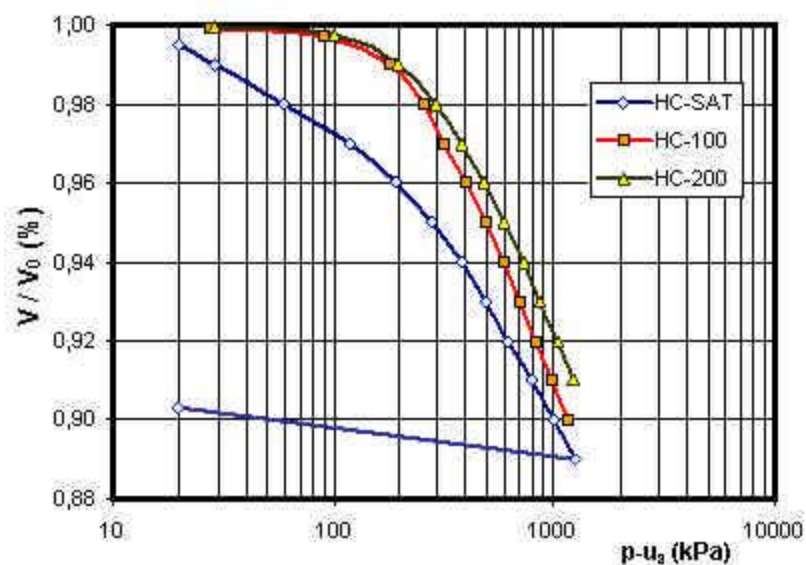


#### 4.3.2. Modelagem de Solo Residual de Arenito Não-Saturado

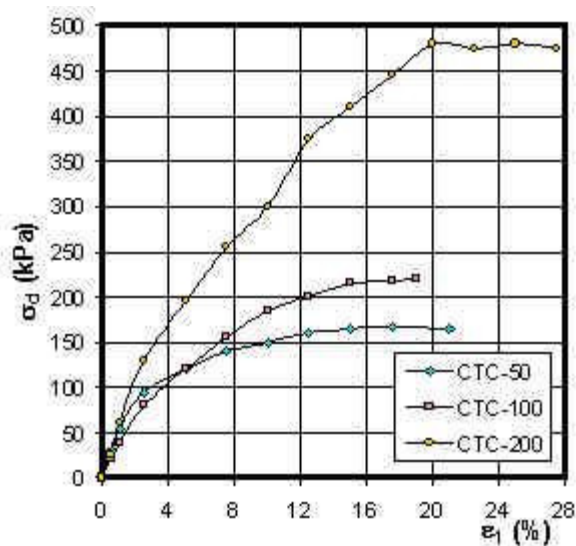
O segundo solo residual apresentado por Ibañez (2003) trata-se de: “solo residual de arenito, do grupo Bauru, não saturado, proveniente do município de São Carlos – SP. Da campanha de ensaios realizada por Machado (1998) são apresentados os seguintes resultados:

- Ensaios de compressão isotrópica (HC), na condição saturada, considerando valores da sucção de 100 e 200 kPa - Figura 4.88.
- Ensaios triaxiais de compressão axial (CTC), na condição saturada, sob tensões confinantes de 50, 100 e 200 kPa – Figura 4.89.
- Ensaios triaxiais de compressão axial de estágios múltiplos com controle de sucção (EMS), considerando estágios de tensão de confinamento de 50, 100 e 200 kPa e valores de sucção de 40, 80, 120 e 160 kPa – Figuras 4.90 a 4.93.”

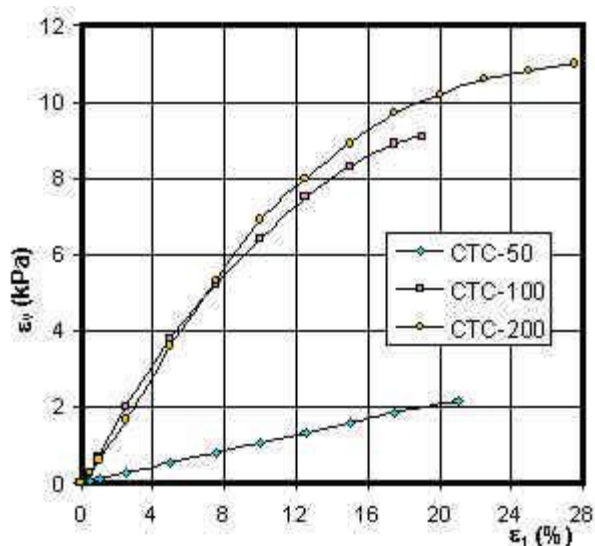
**Figura 4.88: Curvas  $V/V_0 - \log(p')$  de ensaios HC, para as condições de saturação e não saturação. ( $V$  = volume específico). (Machado, 1998)**



**Figura 4.89: Ensaio CTC na condição saturada para tensões de confinamento de 50, 100 e 200 kPa: a) Curvas  $\sigma_d - \epsilon_1$ ; b) Curvas  $\epsilon_v - \epsilon_1$ . (Machado, 1998).**

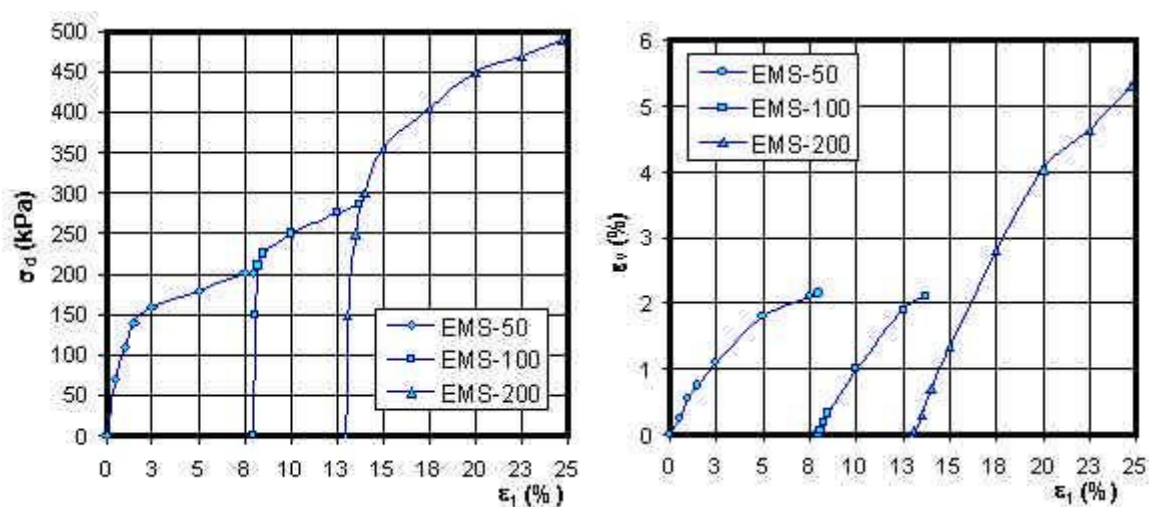


(a)



(b)

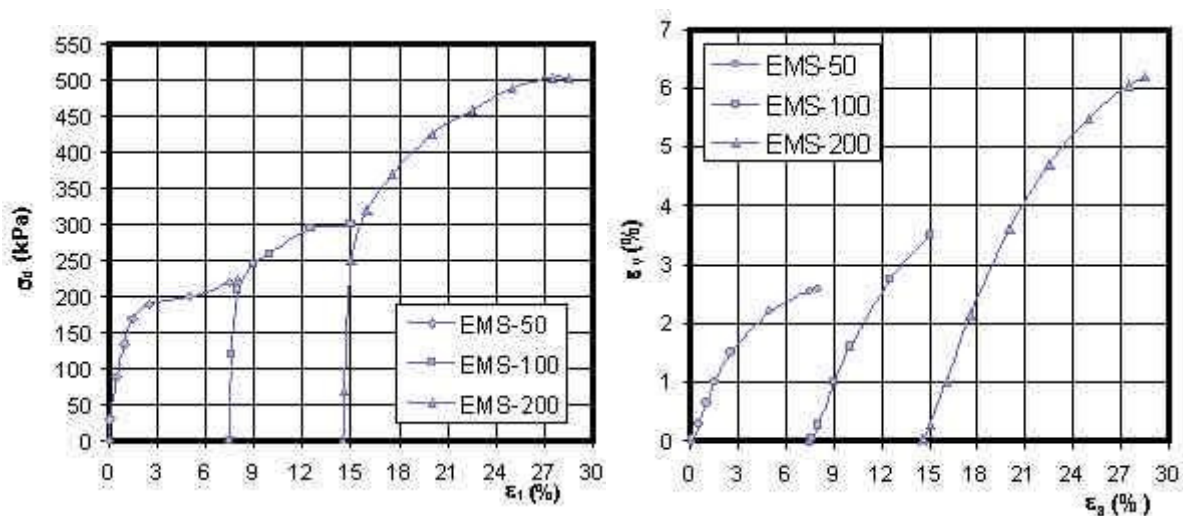
**Figura 4.90: Ensaios CTC-EMS para  $s = 40$  kPa e tensões de confinamento de 50, 100 e 200 kPa: a) Curvas  $\sigma_d - \varepsilon_1$ ; b) Curvas  $\varepsilon_v - \varepsilon_1$ .(Machado, 1998).**



(a)

(b).

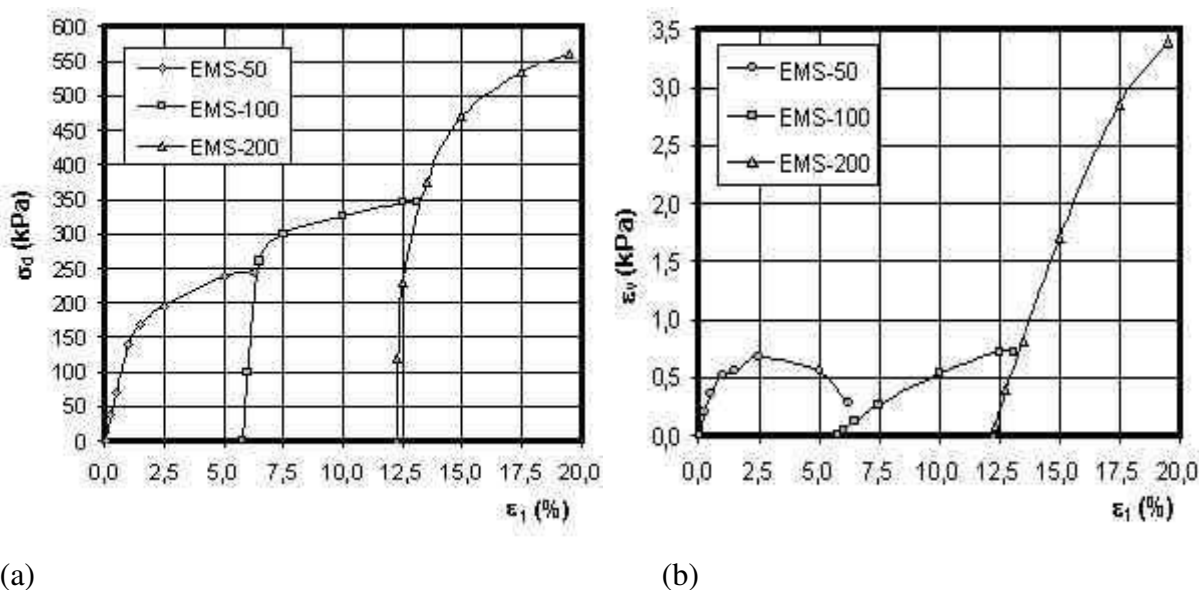
**Figura 4.91: Ensaios CTC-EMS para  $s = 80$  kPa e tensões de confinamento de 50, 100 e 200 kPa: a) Curvas  $\sigma_d - \varepsilon_1$ ; b) Curvas  $\varepsilon_v - \varepsilon_1$ .(Machado, 1998).**



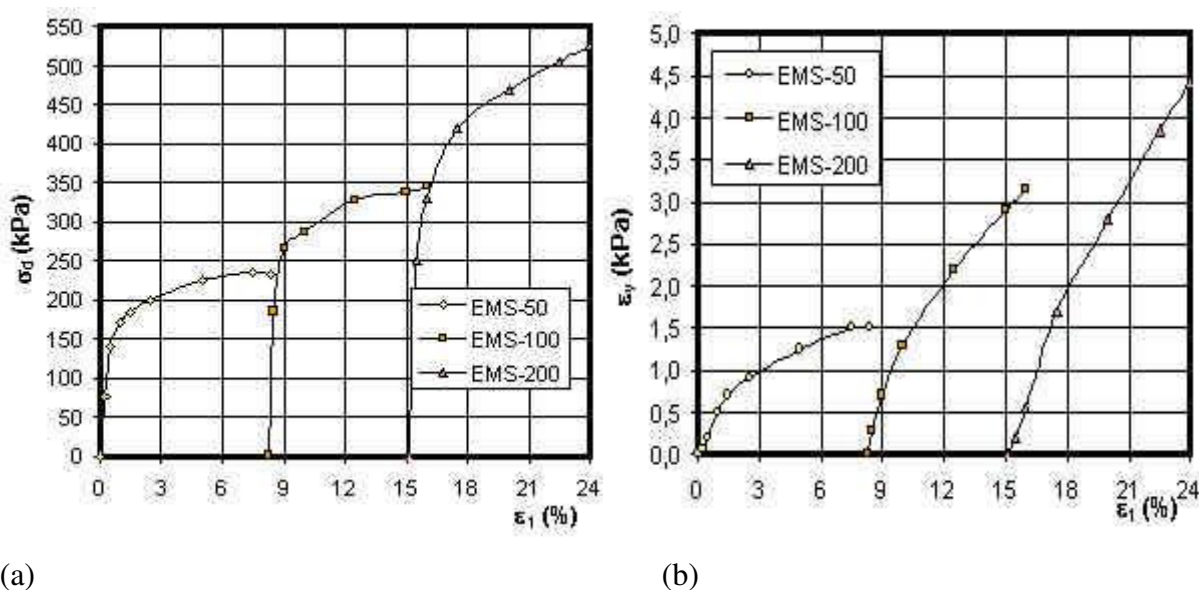
(a)

(b)

**Figura 4.92: Ensaios CTC-EMS para  $s = 120$  kPa e tensões de confinamento de 50, 100 e 200 kPa: a) Curvas  $\sigma_d - \epsilon_1$ ; b) Curvas  $\epsilon_v - \epsilon_1$ .(Machado, 1998).**



**Figura 4.93: Ensaios CTC-EMS para  $s = 120$  kPa e tensões de confinamento de 50, 100 e 200 kPa: a) Curvas  $\sigma_d - \epsilon_1$ ; b) Curvas  $\epsilon_v - \epsilon_1$ .(Machado, 1998).**



### Caso de solo saturado

Os parâmetros  $k^*$  e  $\lambda^*$ , coeficientes de compressão e de recompressão das curvas de compressão hidrostática  $\epsilon_v \times \ln p$ , foram determinados com base na Figura 4.88. A Figura 4.88 mostra três curvas de ensaios, uma para compressão isotrópica de solo saturado e outras

duas para solo parcialmente saturado sujeito a tensões de sucção de 100 e 200 kPa. As curvas para solo parcialmente saturado são próximas, com declividades similares para os trechos de recompressão e de compressão virgem. A curva de solo saturado apresenta trecho inicial de recompressão com declividade muito diferente, e maior do que a do trecho de descarregamento. Foram feitas simulações com os dois parâmetros, com  $k^*$  correspondente ao trecho inicial da curva e com o valor do trecho de descarregamento. Os valores e gráficos apresentados correspondem ao valor de  $k^*$  do trecho inicial da curva.

Para o solo saturado foram determinados os valores de  $k^*$  do trecho inicial e de descarregamento:

$$k_{inicial}^* = \frac{\Delta \varepsilon_v}{\ln p_2 - \ln p_1} = \frac{0,015}{\ln 60 - \ln 20} = 0,01365 \quad k_{inicial}^* = 0,01365$$

$$k_{desc.}^* = \frac{\Delta \varepsilon_v}{\ln p_2 - \ln p_1} = \frac{0,9028 - 0,891}{\ln 1000 - \ln 20} = 0,003016 \quad k_{desc.}^* = 0,00302$$

E para o trecho de compressão virgem o valor de  $\lambda^*$  determinado foi:

$$\lambda^* = \frac{\Delta \varepsilon_v}{\ln p_2 - \ln p_1} = \frac{0,9966 - 0,90}{\ln 1000 - \ln 100} = 0,04195 \quad \lambda^* = 0,04195$$

A tensão de pré-adensamento, determinada simplesmente como a correspondente ao ponto de intersecção das tangentes ao trecho de recompressão e de compressão virgem, mostrou pouco diferença para o solo saturado e para os dois casos de teste de solo não-saturado, sob sucção de 100 e 200 kPa. A Tabela 4.2 apresenta os valores retirados das curvas apresentadas na Figura 4.88.

**Tabela 4.2. Valores de pressão de adensamento isotrópica.**

Ensaio	$p_{y0}$ (kPa)
HC – saturado	250
HC – 100	210
HC – 200	223

O módulo cisalhante  $G$  foi obtido pela observação do trecho inicial das curvas  $\sigma_d \times \varepsilon_l$ , dos ensaios: CTC-50, CTC-100 E CTC-200, apresentados na Figura 4.89. Para tanto as ditas

curvas foram replotadas em termos de  $\sigma_d \times \varepsilon_s$ . Tais curvas estão plotadas juntamente com as curvas de simulação obtidas com o uso do modelo, na Figura 4.95, à frente.

Módulo cisalhante  $G$ :

$$G = 2250 \text{ kPa}$$

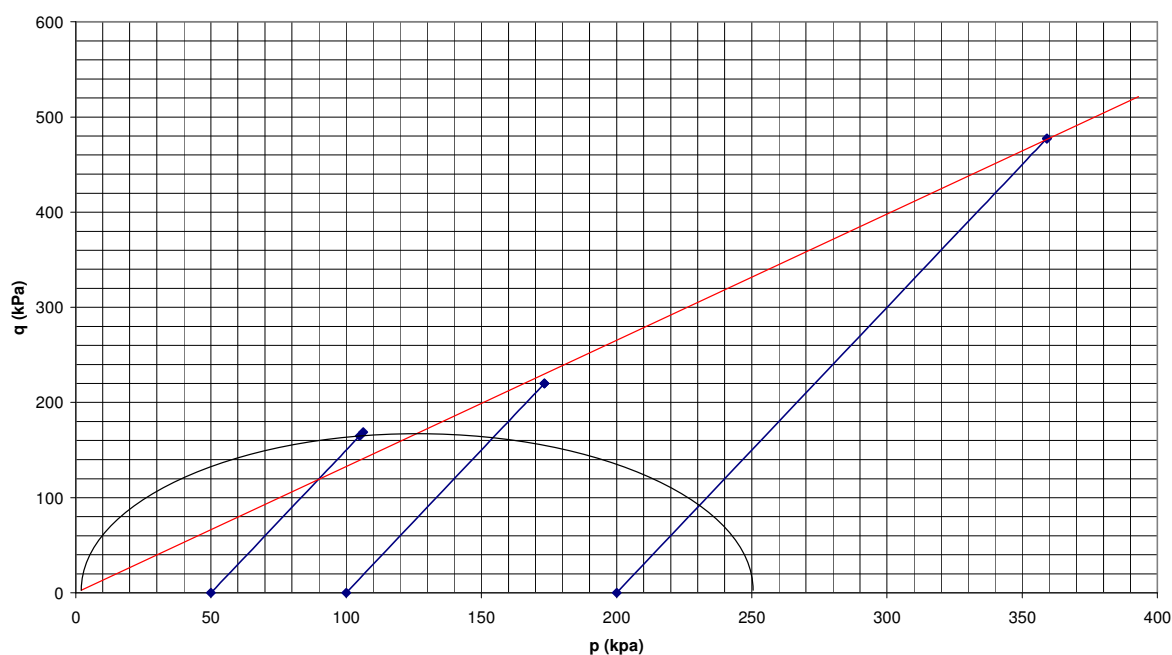
O parâmetro  $M$ , que indica a declividade da superfície de ruptura definida pelos estados de tensão residual, no trecho estruturado, ou de pico, no trecho de endurecimento, dos diversos ensaios, foi definido com base nos ensaios CTC, como pode ser visto na Figura 4.93. A Tabela 4.3 resume as coordenadas  $(p, q)$  dos estados de tensão de resistência de pico e residual, obtidos a partir das curvas de ensaios CTC da Figura 4.89, que serviram para o traçado do gráfico da Figura 4.94.

**Tabela 4.3. Valores de componentes de tensão  $(p, q)$  dos ensaios CTC (kPa).**

Ensaio	$p_{ini}$	$q_{ini}$	$p_{pico}$	$q_{pico}$	$p_{res}$	$q_{res}$
CTC-50	50	0	106,33	109	105	165
CTC-100	100	0	-	-	173,33	220
CTC-200	200	0	-	-	359,1	477,3

**Figura 4.94. Trajetórias de tensão dos ensaios CTC, para arenito residual saturado.**

**Trajetórias de tensão  $p \times q$  (Solo residual de arenito saturado)**



Da Figura 4.94 foi retirado o valor:

$$M = 1,333$$



A observação da Figura 4.94 permite notar o ajuste da elipse inicial de escoamento, e que em função deste se pode esperar boa reprodução da resistência residual para as simulações com tensão inicial confinante de 100 e 200 kPa. Para o caso de tensão confinante inicial de 50 kPa pode-se obter reprodução da resistência de pico, mas não da resistência residual, já que o ponto correspondente ao estado final de tensão está acima da superfície de ruptura.

O parâmetro  $\delta_{rem}$ , foi tomado igual a 100%, pois o gráfico de ensaio de adensamento não mostra efeito de dano, e nos ensaios CTC, o comportamento é de material com endurecimento com a deformação. A quantidade de dano  $D_{95}$ , correspondente a 95 % da queda na tensão de pré-adensamento, foi tomada igual a 0,93, embora neste caso não tenha influência, já que não há redução da pressão de pré-adensamento por efeito de dano.

$$\text{Parâmetro } \delta_{rem}: \quad \delta_{rem} = 1,00$$

$$\text{Parâmetro } D_{95}: \quad D_{95} = 0,93$$

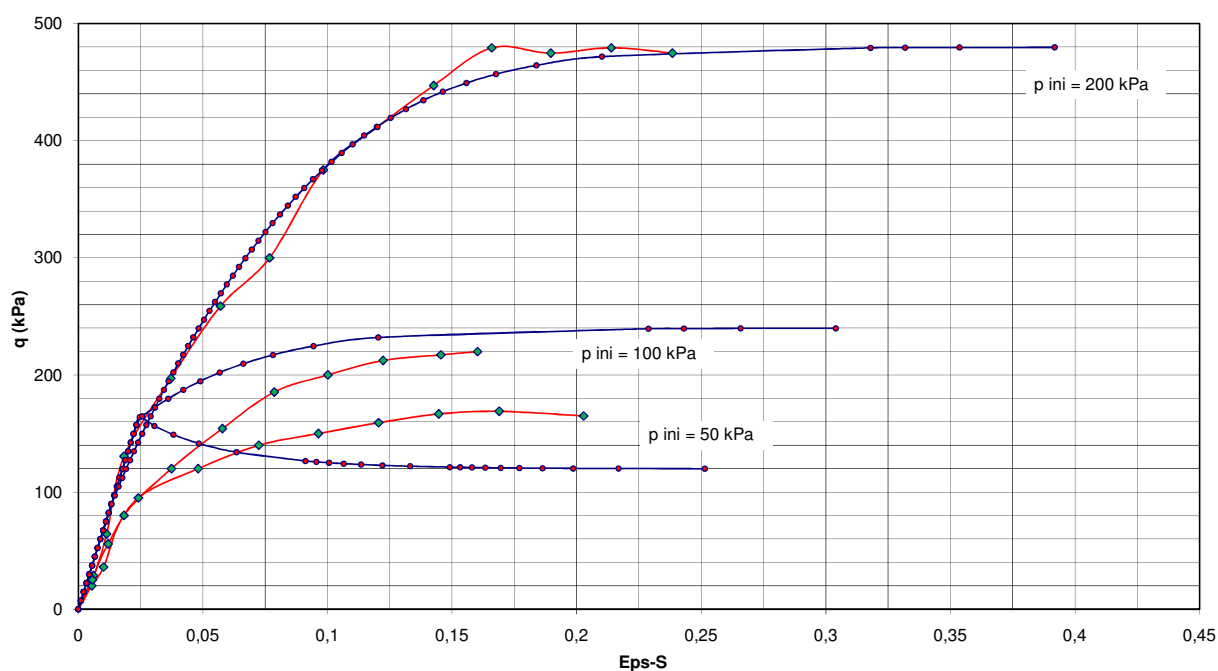
Para a fixação do parâmetro  $r_p$ , foi considerado que o material não apresenta efeito de dano, desta forma foi tomado:

$$\text{Parâmetro } r_p: \quad r_p = 1,0$$

A Figura 4.95 apresenta os resultados dos ensaios CTC-50, CTC-100 e CTC-200, em conjunto com as curvas obtidas com o emprego dos parâmetros escolhidos, para o solo residual de arenito saturado.

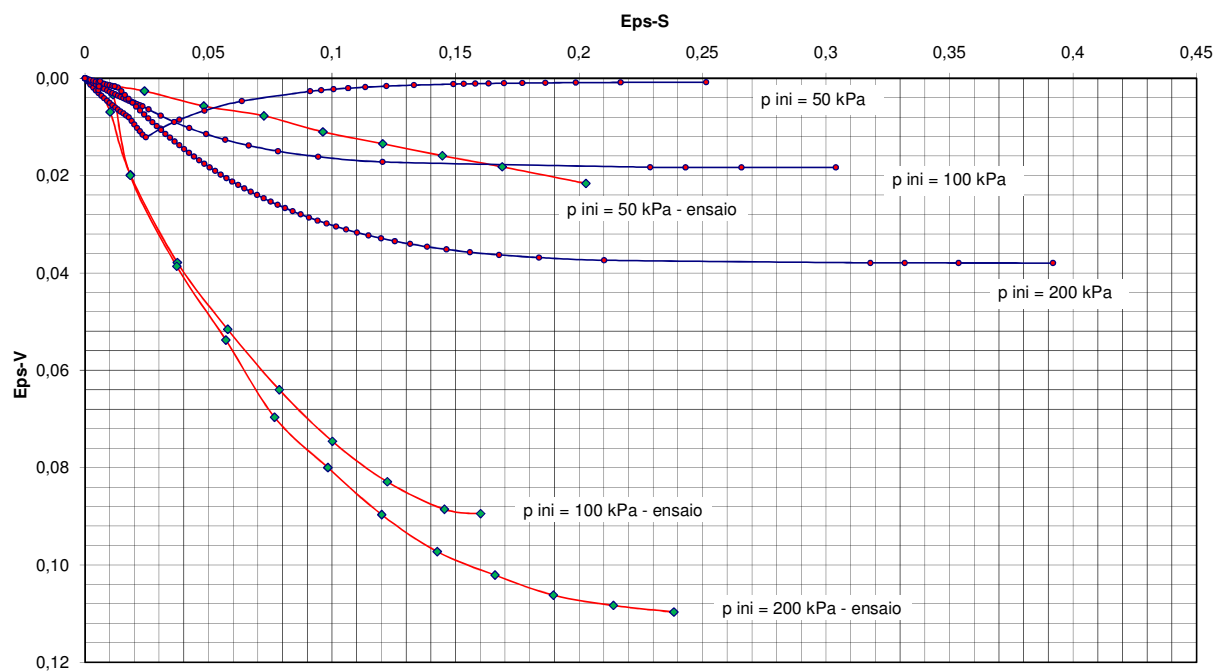
**Figura 4.95. Ensaios CTC, (a) curvas  $q$  x Eps-S, (b) e (c) Curvas Eps-V x Eps-S.**

$q$  x Eps-S (solo residual de arenito saturado)

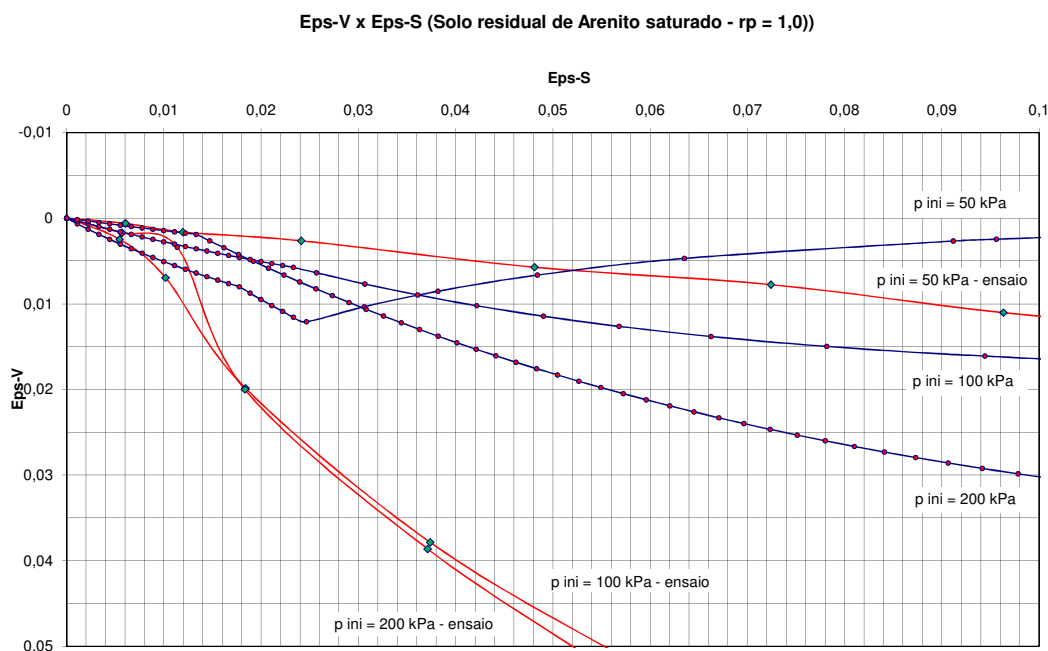


(a)

Eps-V x Eps-S (Solo residual de Arenito saturado -  $rp = 1,0$ )



(b)

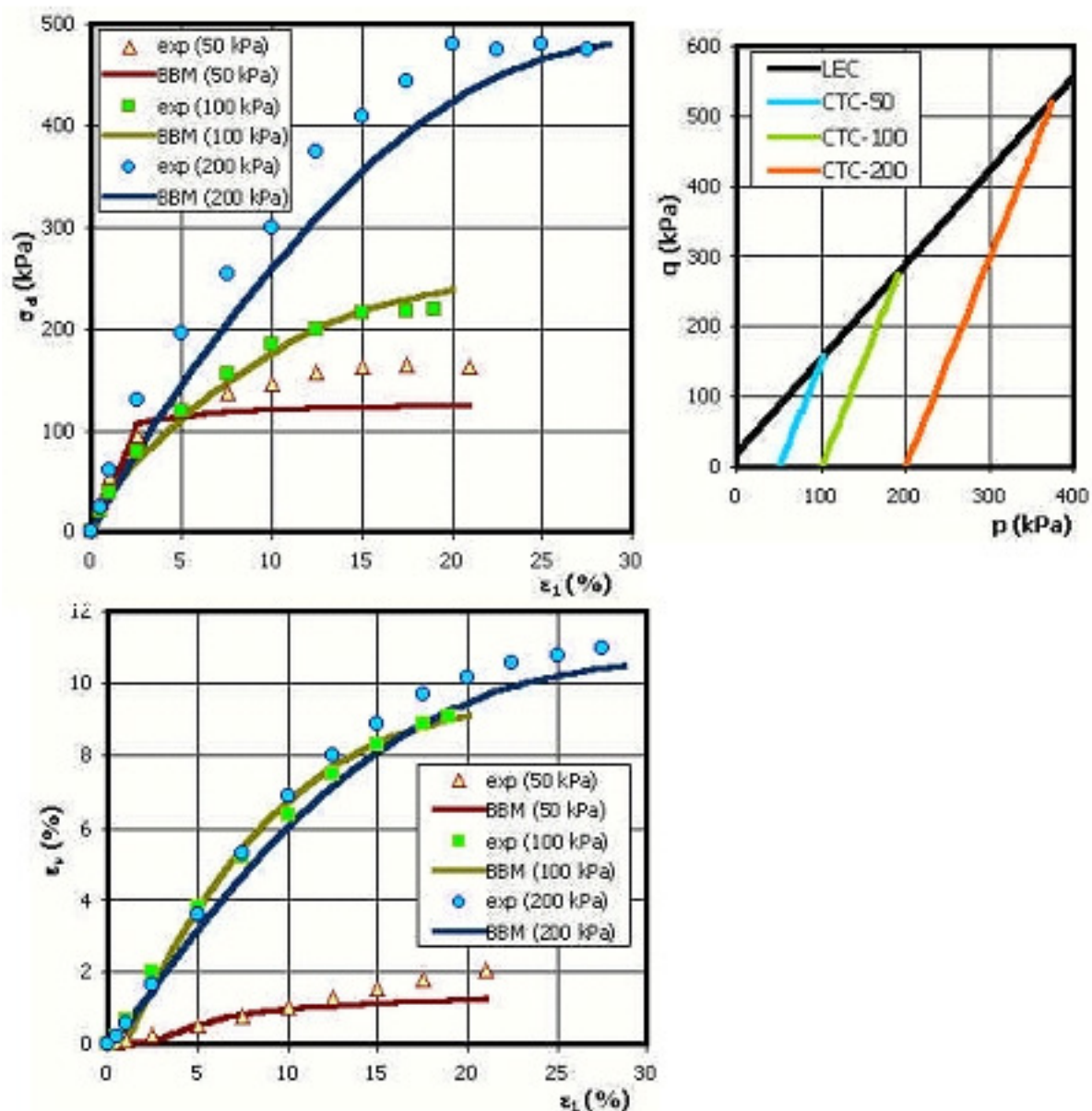


c)

Os gráficos da Figura 4.95 mostram boa reprodução do comportamento  $q \times \epsilon_s$ , para tensão de confinamento inicial  $\sigma_c = 200$  kPa, razoável para  $\sigma_c = 100$  kPa e pobre para  $\sigma_c = 50$  kPa. A relação  $\epsilon_v \times \epsilon_s$  mostrou tendência geral concordante para as curvas correspondentes a  $\sigma_c = 100$  e  $200$  kPa. Diferença importante é notada para  $\sigma_c = 50$  kPa, onde a simulação prevê pico de resistência não observado no ensaio real e reversão da curva  $\epsilon_v \times \epsilon_s$ .

Comparação pode ser feita com ajuste do Modelo Barcelona, feito por Ibañez (Ibañez, 2003) aos dados para material saturado, cujo resultado está reproduzido na Figura 4.96.

Figura 4.96. Ensaios CTC, (a) curvas  $\sigma_d \times \varepsilon_1$ , (b) trajetórias de tensão e (c) Curvas  $\varepsilon_v \times \varepsilon_1$  (Ibañez, 2003).



### Caso de solo parcialmente saturado

Os resultados de ensaios com solo parcialmente saturado apresentados nas Figuras 4.90 a 4.93, para testes feitos sob sucção de 40, 80, 120 e 160 kPa, mostram curvas com relação  $\sigma_d \times \varepsilon_1$  e relações  $\varepsilon_v \times \varepsilon_1$  semelhantes. O único gráfico que apresenta comportamento distinto, e aparentemente anômalo, é o de relação  $\varepsilon_v \times \varepsilon_1$  para sucção de 120 kPa.

A Tabela 4.4 resume os estados finais de resistência para a série de ensaios de estágios múltiplos.

**Tabela 4.4. Valores de tensão de desvio último para os ensaios EMS.**

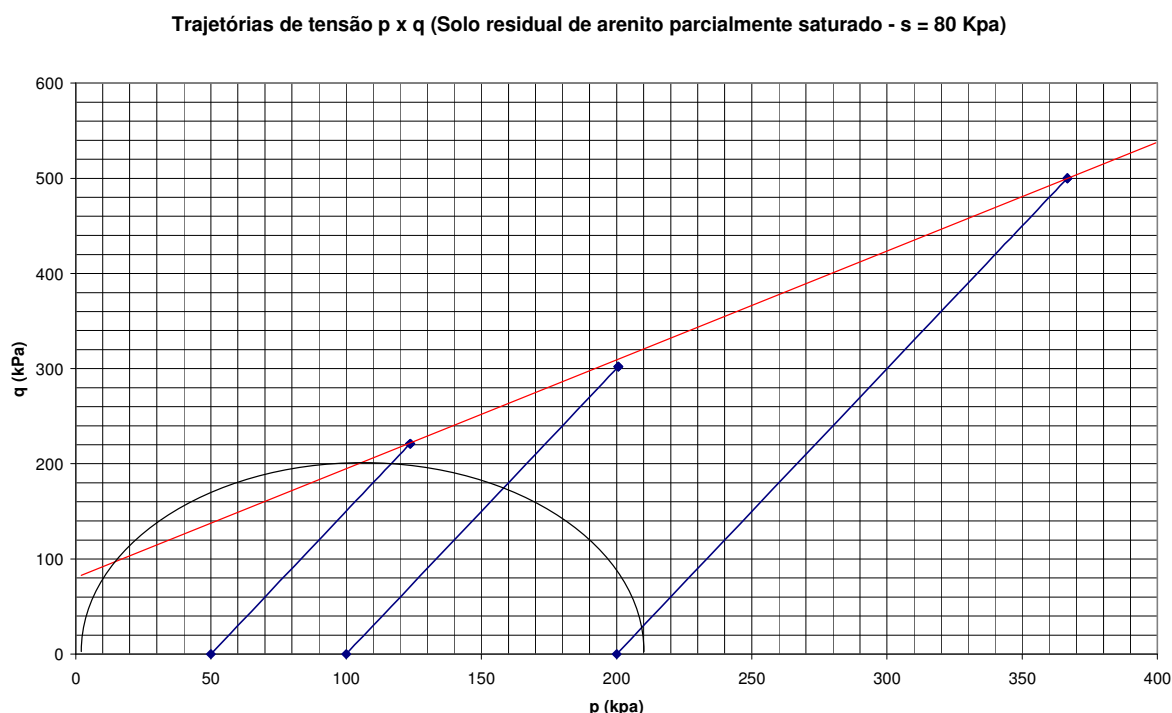
Ensaio	$\sigma_c = 50$ kPa	$\sigma_c = 100$ kPa	$\sigma_c = 200$ kPa
CTC $s = 0$ kPa (sat.)	165	220	485
CTC-EMS $s = 40$ kPa	205	285	490
CTC-EMS $s = 80$ kPa	221,2	302,2	505
CTC-EMS $s = 120$ kPa	245	350	560
CTC-EMS $s = 160$ kPa	235	345	525

Adaptação do modelo MCC estruturado com dano acoplado foi feita para simulação de ensaios parcialmente saturados, sob sucção diferente de zero. Utilizando-se os dados correspondentes às curvas para sucção  $s = 80$  kPa, observou-se do gráfico de trajetórias de tensão  $q \times p$ , bom ajuste com superfície de ruptura não passante pela origem, como é possível concluir da Figura 4.96, com intercepto  $q_0 = 80$  kPa. Para o traçado do gráfico da Figura 4.97 foram empregados os valores da Tabela 4.5.

**Tabela 4.5. Valores de componentes de tensão ( $p$ ,  $q$ ) dos ensaios CTC-EMS, para sucção de 80 kPa (kPa).**

Ensaio	$p_{ini}$	$q_{ini}$	$p_{pico}$	$q_{pico}$	$p_{res}$	$q_{res}$
CTC-EMS-50	50	0	-	-	123,7	221,2
CTC-EMS-100	100	0	-	-	200,7	302,2
CTC-EMS-200	200	0	-	-	366,7	500

**Figura 4.97. Trajetórias de tensão dos ensaios CTC-EMS, para arenito residual não-saturado, sob sucção  $s = 80$  kPa.**



Os parâmetros  $k^*$  e  $\lambda^*$ , para solo parcialmente saturado foram obtidos da curva de ensaio de consolidação isotrópica, sob sucção de 100 Kpa, mostrada na Figura 4.88.

$$\kappa^* = \frac{\Delta \varepsilon_v}{\ln p_2 - \ln p_1} = \frac{1 - 0,988}{\ln 10000 - \ln 30} = 0,001928 \quad \kappa^* = 0,001928$$

E para o trecho de compressão virgem o valor de  $\lambda^*$  determinado foi:

$$\lambda^* = \frac{\Delta \varepsilon_v}{\ln p_2 - \ln p_1} = \frac{0,98 - 0,90}{\ln 1177 - \ln 300} = 0,058525 \quad \lambda^* = 0,058525$$

A tensão de pré-adensamento adotada foi a indicada na Tabela 4.2, para sucção de 100 kPa, valor próximo da sucção  $s = 80$  kPa empregada no ensaio de estágios múltiplos modelado.

$$\text{Tensão de pré-adensamento isotrópica:} \quad p_{y0} = 210 \text{ kPa}$$

O módulo cisalhante  $G$  foi obtido pela observação do trecho inicial das curvas  $\sigma_d \times \varepsilon_l$ , dos ensaios: CTC-EMS-50, CTC- EMS-100 e CTC- EMS-200, apresentados na Figura 4.91. Para tanto as ditas curvas foram replotadas em termos de  $\sigma_d \times \varepsilon_s$ . Tais curvas estão plotadas juntamente com as curvas de simulação obtidas com o uso do modelo, na Figura 4.99, à frente. A Tabela 4.6 apresenta os valores retirados dos gráficos  $q \times \varepsilon_s$ , ou  $\sigma_d \times \varepsilon_s$ .

**Tabela 4.6. Valores de  $q \times \varepsilon_s$  e do módulo cisalhante  $G$  dos ensaios CTC-EMS, para sucção de 80 kPa.**

Ensaio	$\Delta \varepsilon_{s \text{ ini}}$	$\Delta q_{\text{ini}}$	G (kPa)
CTC-EMS-50	0,019	480	8421
CTC-EMS-100	0,003	560	62222
CTC-EMS-200	0,008	560	23333

Foi adotado valor médio entre os valores indicados na Tabela 4.6

Módulo cisalhante  $G$ :

$$G = 31325 \text{ kPa}$$

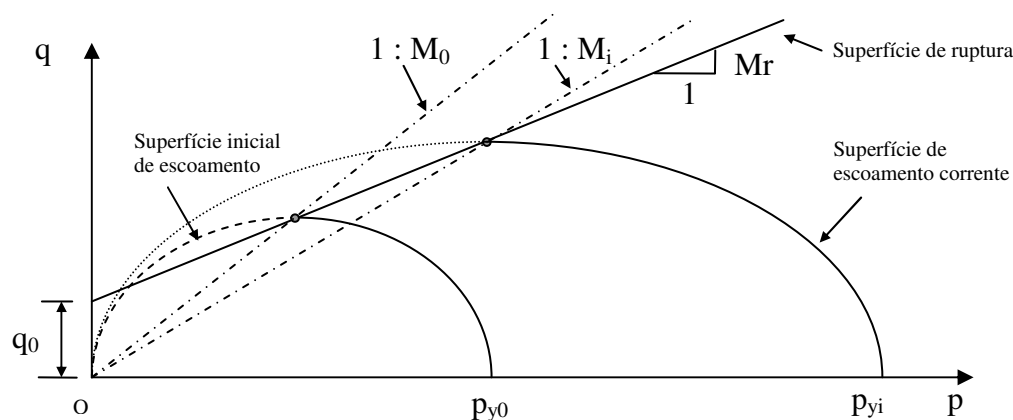
O parâmetro  $M$ , que indica a declividade da superfície de ruptura, definida pelos estados limites de tensão, foi determinado com base no gráfico da Figura 4.97.

Parâmetro  $M$ :

$$M = 1,15$$

Adaptação do programa de cálculo foi feita, para a superfície elíptica de endurecimento, que necessita agora de valor variável para a relação entre diâmetros, para este caso em que a superfície de ruptura deixa de passar pela origem. A adaptação visou assegurar a condição de estado crítico para o ponto de intersecção da superfície de escoamento com a superfície de ruptura. A Figura 4.98 ilustra o procedimento adotado.

**Figura 4.98. Adaptação de modelo para assegurar condição de estado crítico.**



A reta passante pela origem e pelo ponto de máximo da elipse atende à condição,  $q_{máx} = M_{e-i} \cdot p_{yi} / 2$ , e a equação da superfície de ruptura para o mesmo ponto atende, por sua vez, à condição  $q_{máx} = M_r \cdot p_{yi} / 2 + q_0$ . Da igualdade das duas ordenadas obtém-se a relação entre a declividade da superfície de ruptura e da reta passante pela origem e pelo ponto de máximo da superfície de escoamento corrente.

$$M_{e-i} = M_r + 2 \cdot \frac{q_0}{p_{yi}} \quad (4.3)$$

A modificação no programa de cálculo do modelo MCC estruturado com dano acoplado constou da introdução da condição (4.3) e do valor do intercepto  $q_0$ , da equação da superfície de ruptura.

Os parâmetros  $\delta_{rem}$ ,  $D_{95}$  e  $r_p$  foram mantidos iguais aos utilizados para o solo saturado, já que as curvas de ensaios  $q \times \varepsilon_s$ , mostram comportamento de endurecimento com a deformação. Desta forma foram mantidos:

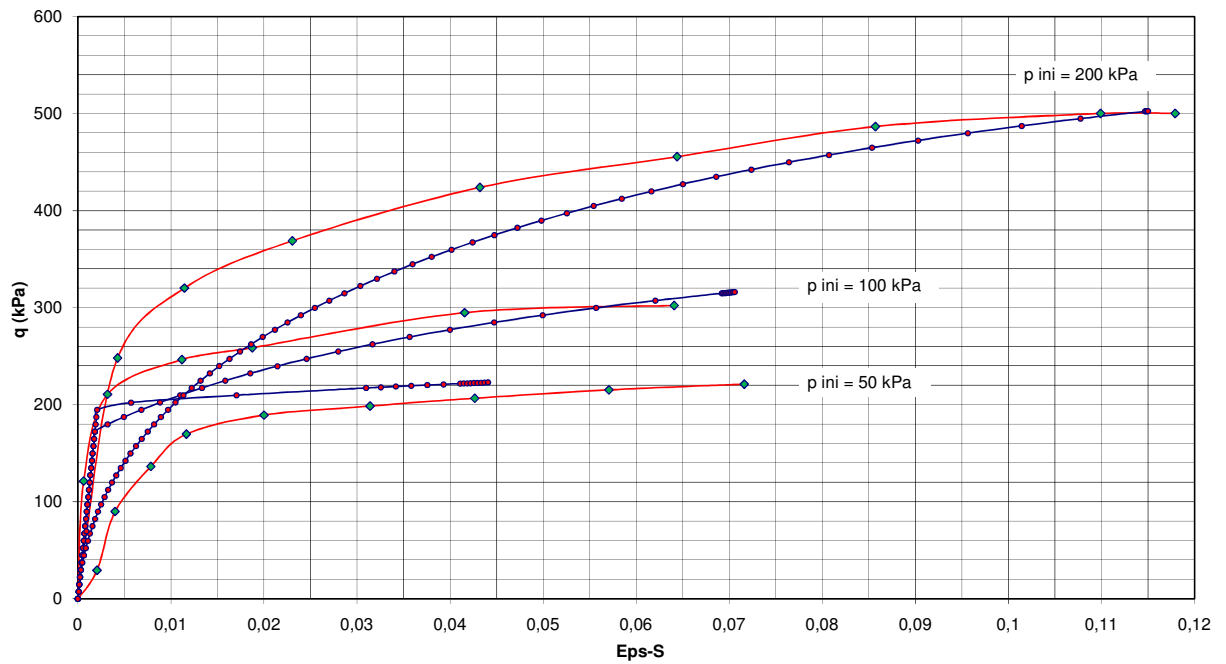
Parâmetro $\delta_{rem}$ :	$\delta_{rem} = 1,00$
Parâmetro $D_{95}$ :	$D_{95} = 0,93$
Parâmetro $r_p$ :	$r_p = 1,0$

A Figura 4.99 apresenta os resultados dos ensaios CTC-50, CTC-100 e CTC-200, em conjunto com as curvas obtidas com o emprego dos parâmetros escolhidos, para o solo residual de arenito parcialmente saturado, ensaiado sob sucção de 80 kPa.



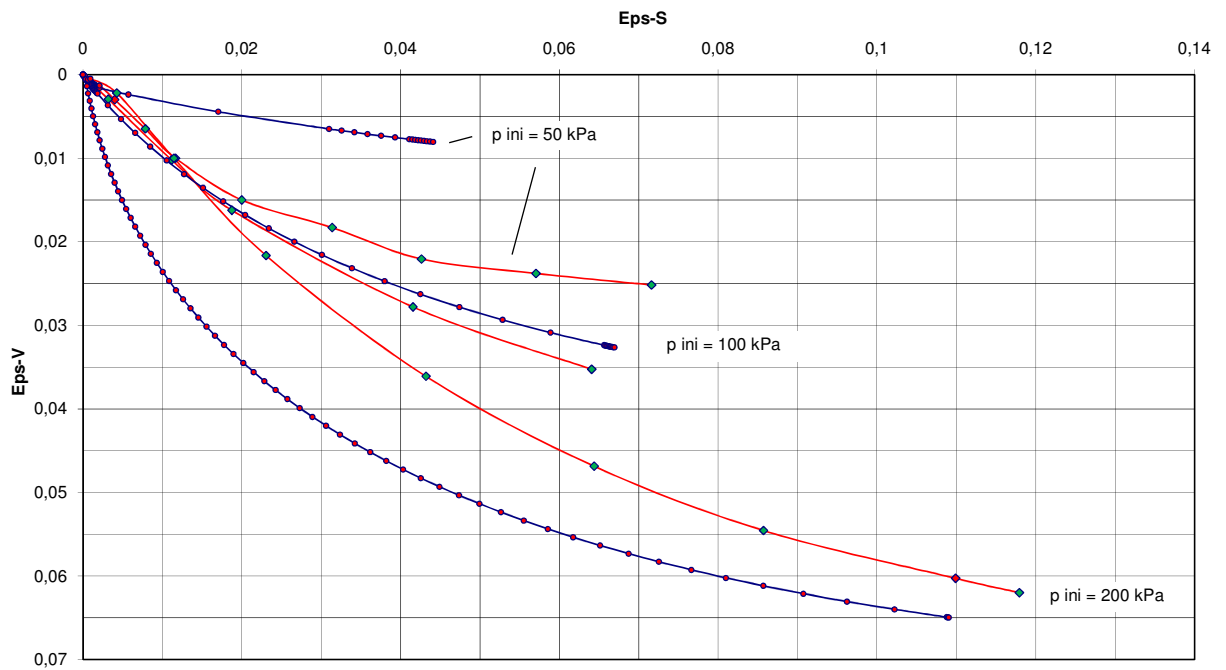
**Figura 4.99. Ensaio CTC, (a) curvas  $q$  x Eps-S, (b) e (c) Curvas Eps-V x Eps-S.**

**$q$  x Eps-S (Solo residual de arenito não-saturado - sucção = 80 Kpa)**

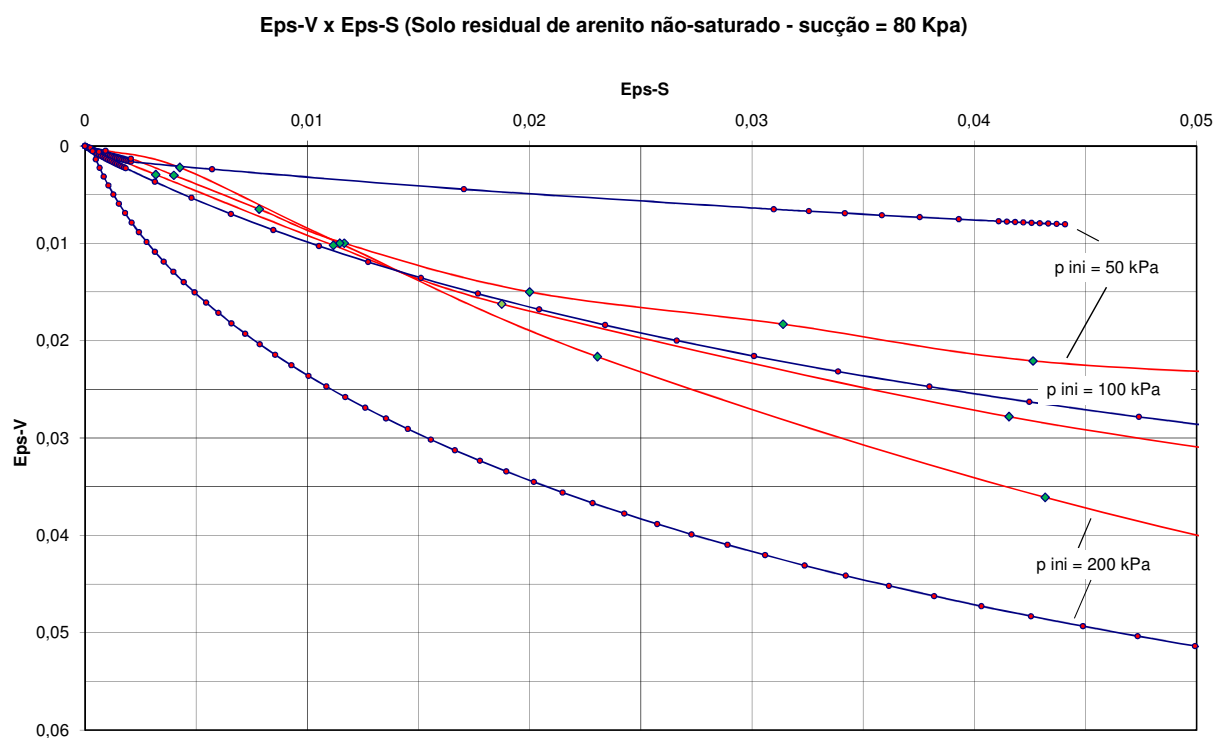


(a)

**Eps-V x Eps-S (Solo residual de arenito não-saturado - sucção = 80 Kpa)**



b)



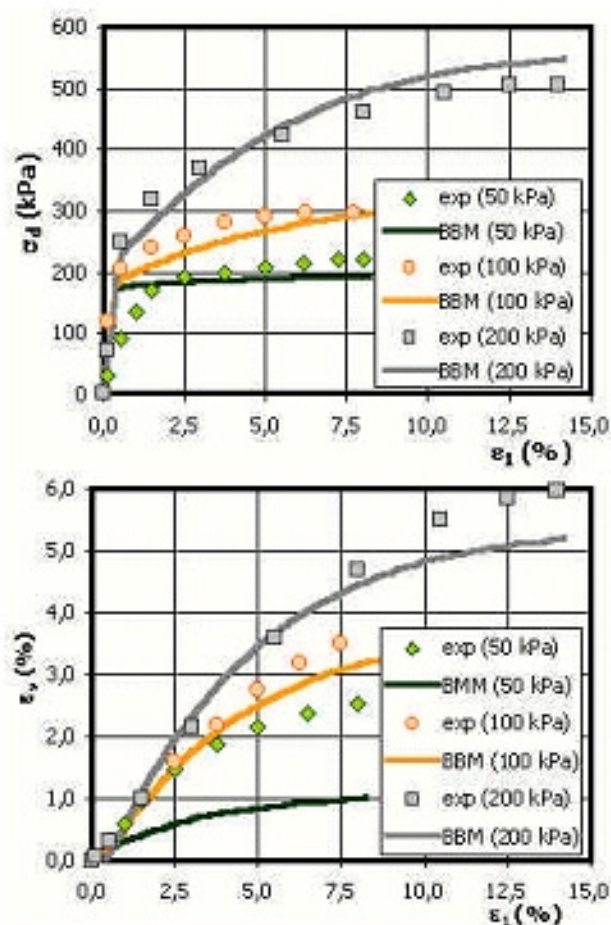
c)

Os gráficos da Figura 4.99 mostram razoável reprodução do comportamento  $q \times \varepsilon_s$ , para as três tensões de confinamento modeladas. Com o uso de superfície de ruptura não passante pela origem os estados de resistência final são bem reproduzidos. A relação  $\varepsilon_v \times \varepsilon_s$  mostrou tendência geral concordante, e apresentou boa concordância para tensão confinante  $\sigma_c = 100$  kPa.

Comparação pode ser feita com ajuste do Modelo Barcelona, feito por Ibañez (Ibañez, 2003) aos dados para material parcialmente saturado, cujo resultado está reproduzido na Figura 4.100.

Em relação ao ajuste executado por Ibañez (2003), em que os gráficos estão plotados contra  $\varepsilon_l$  e não  $\varepsilon_s$ , o comportamento é similar. O modelo MCC estruturado com dano acoplado reproduz melhor os estados finais de resistência, entretanto tal comportamento está ligado ao fato de que o ajuste neste caso foi feito somente para os resultados correspondentes à sucção de 80 kPa, ao passo que a modelagem feita com o Modelo Barcelona utilizou termos médios de parâmetros de coesão e ângulo de atrito, para toda a faixa de sucção testada.

**Figura 4.100. Ensaaios CTC, (a) curvas  $\sigma_d \times \epsilon_1$ , (b) e (c) Curvas  $\epsilon_v \times \epsilon_1$ , para material parcialmente saturado e sucção  $s = 80$  kPa (Ibañez, 2003).**



### 4.3.3. Modelagem de Silte Eólico Compactado Não-Saturado

O terceiro solo analisado trata-se de silte de origem eólica, não-saturado, compactado em laboratório (Cui e Delage, 1996, apud Ibañez, 2003). O solo provém da região leste de Paris e, segundo Ibañez, embora se trate de um solo artificial, foi escolhido por apresentar comportamento anisotrópico, próprio de vários solos residuais do Brasil. Ademais pode-se admitir que a operação de compactação induz a formação de uma estrutura de arranjo dos grãos do material, de forma artificial.

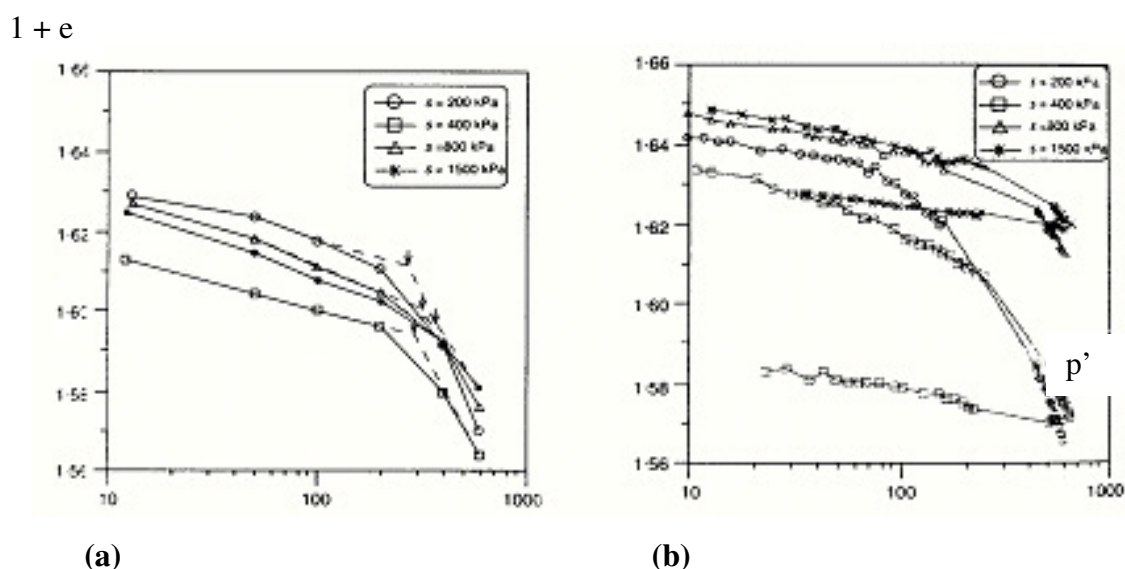
Cui e Delage, antes citados, apresentam os seguintes resultados:

a) Ensaios de compressão isotrópica (HC) para valores de sucção de 200, 400, 800 e 1500 kPa - Figura 4.101.

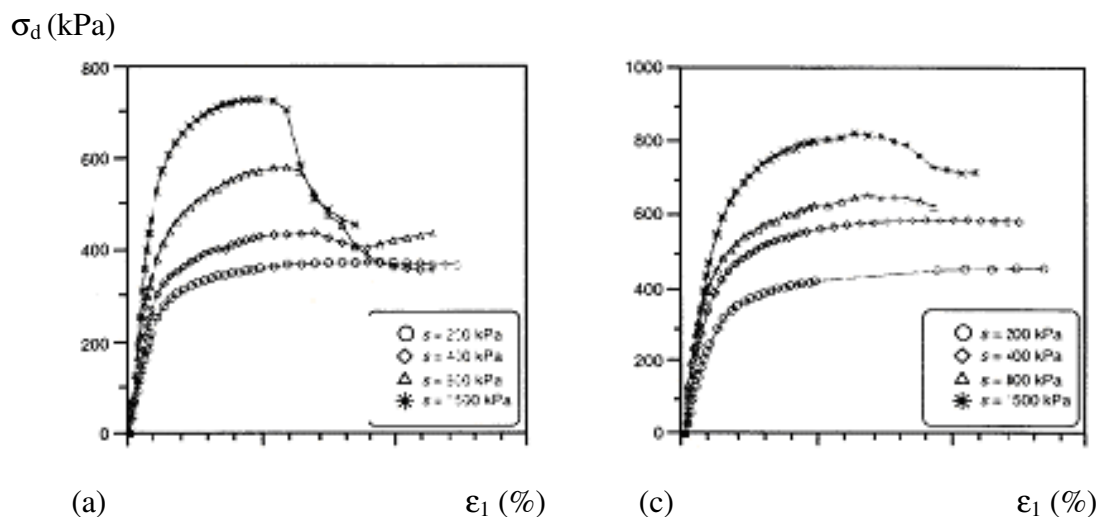
b) Ensaios triaxiais de compressão axial (CTC) para valores de sucção de 200, 400, 800 e 1500 kPa, sob tensões de confinamento de 50, 100, 200 e 400 kPa - Figuras 4.102 e 4.103.

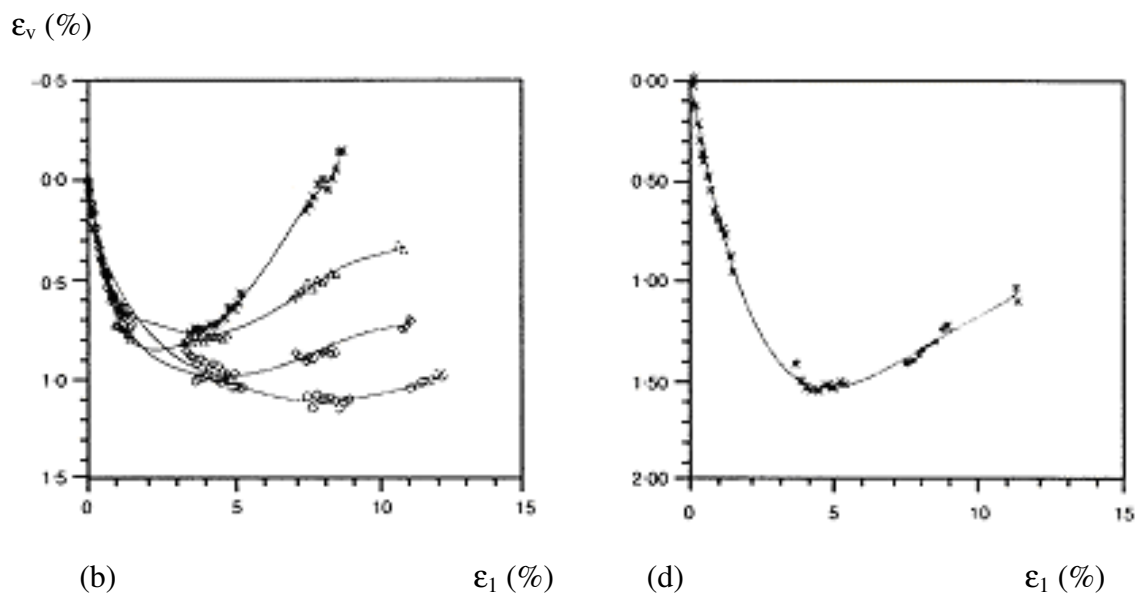
c) Ensaios triaxiais de carregamento proporcional (PL) para a condição  $q / p = 0,5$  e valores de sucção de 200 e 1500 kPa - Figura 4.104.

**Figura 4.101. Ensaios de compressão isotrópica - curvas  $(1+e) \times \log p'$  de carregamento**  
(a) incremental e (b) contínuo (Cui e Delage, 1996, apud Ibañez, 2003).



**Figura 4.102. Ensaios CTC para  $\sigma_3 = 50$  kPa e sucções de 200, 400, 800 e 1500 kPa:**  
(a)  $\sigma_d \times \epsilon_1$  e (b)  $\epsilon_v \times \epsilon_1$  e para  $\sigma_3 = 100$  kPa e mesmas sucções: (c)  $\sigma_d \times \epsilon_1$  e (d)  $\epsilon_v \times \epsilon_1$   
(Cui e Delage, 1996, apud Ibañez, 2003).

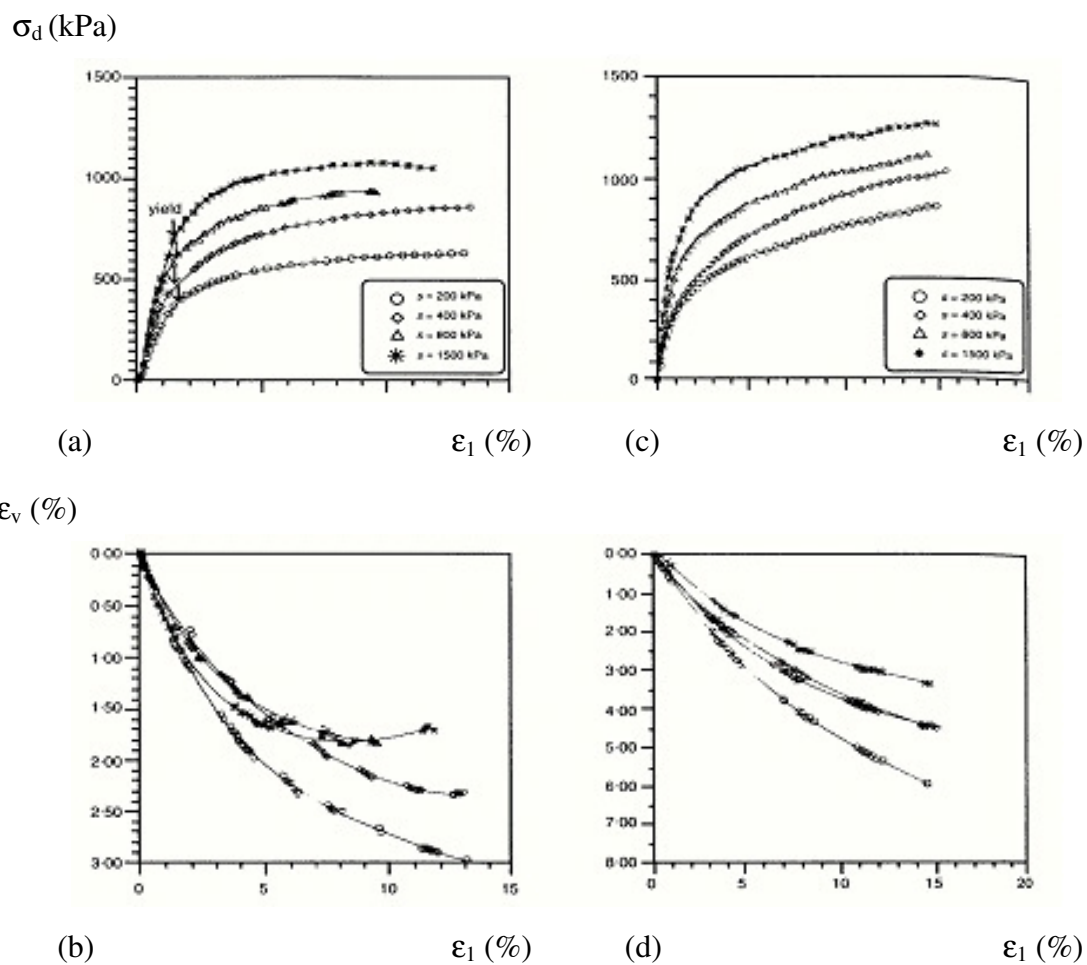




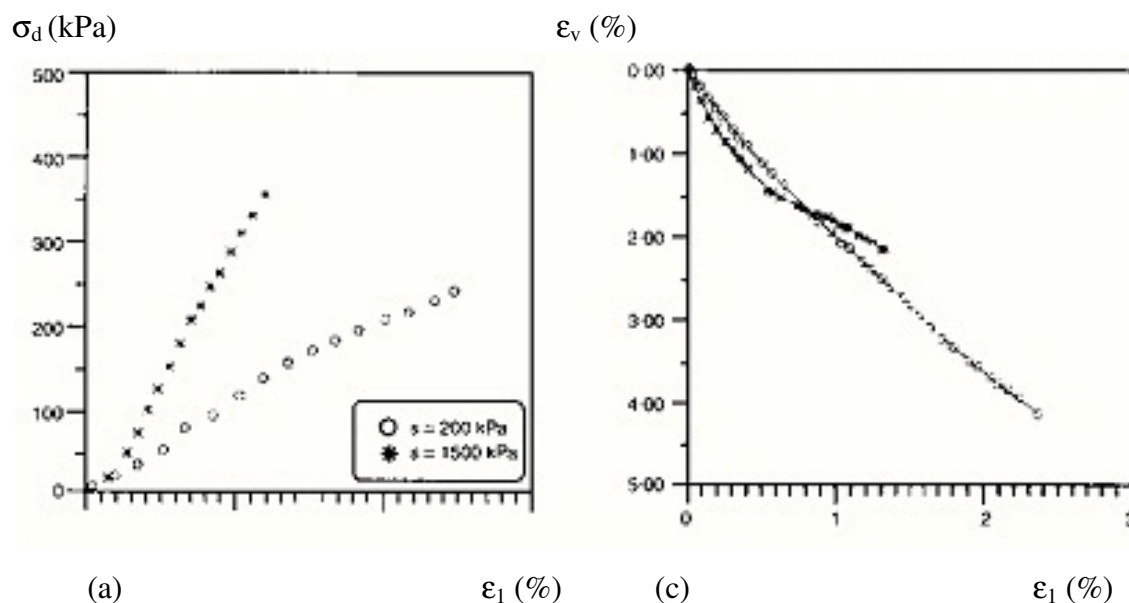
**Figura 4.103. Ensaaios CTC para  $\sigma_3 = 200$  kPa e sucções de 200, 400, 800 e 1500 kPa:**

**(a)  $\sigma_d \times \epsilon_l$  e (b)  $\epsilon_v \times \epsilon_l$ , e para  $\sigma_3 = 400$  kPa e mesmas sucções: (c)  $\sigma_d \times \epsilon_l$  e (d)  $\epsilon_v \times \epsilon_l$**

**(Cui e Delage, 1996, apud Ibañez, 2003).**



**Figura 4.104. Ensaios triaxiais de carregamento proporcional (PL), considerando  $q/p = 0,5$  e sucções de 200 e 1500 kPa: (a)  $\sigma_d \times \epsilon_1$  e (b)  $\epsilon_v \times \epsilon_1$  (Cui e Delage, 1996, apud Ibañez, 2003).**



A seguir é descrita a modelagem para reprodução dos ensaios com  $\sigma_c = 200$  kPa e tensões de sucção de 400 e 800 kPa. Os resultados podem ser comparados com modelagens apresentadas no trabalho de Ibañez (2003), feitas com uso de Modelo Barcelona e Modelo HiSS-DSC.

As curvas de compressão isotrópica, de carregamento incremental, apresentadas na Figura 4.101, estão repetidas na Figura 4.105.

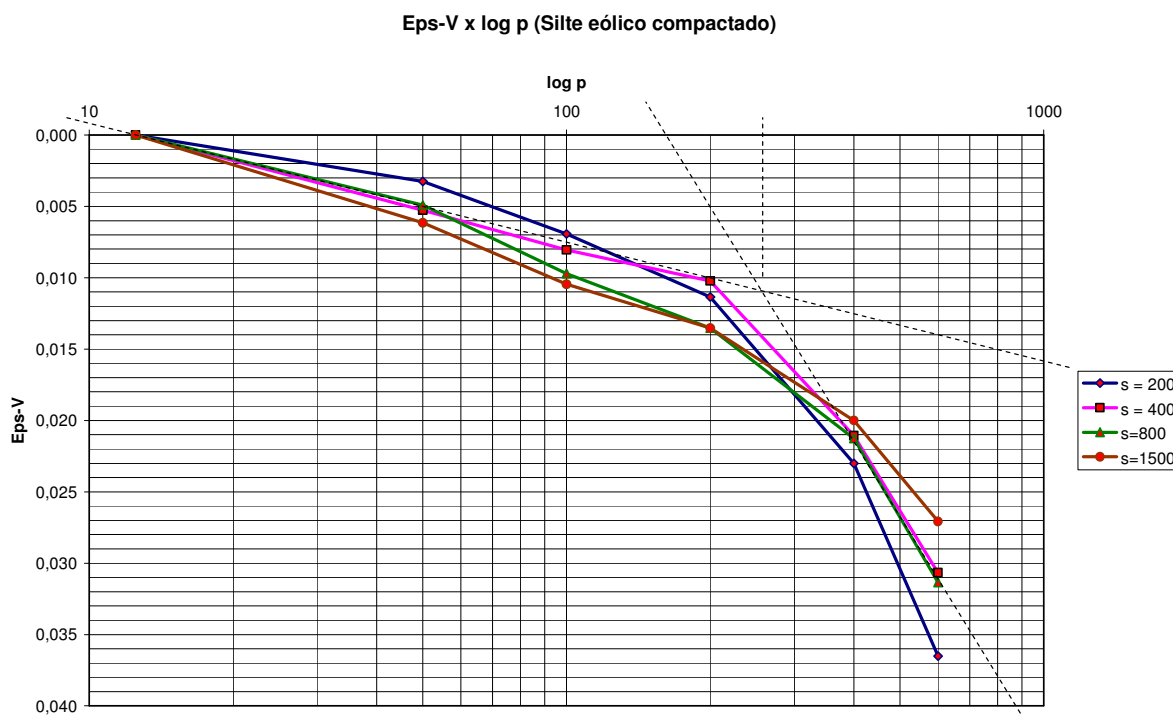
Na Figura 4.105 estão mostradas as linhas de referência para a determinação dos parâmetros  $\kappa^*$  e  $\lambda^*$ , e também da pressão de pré-adensamento  $p_{y0}$ , para as curvas de ensaio com sucção  $s = 400$  e 800 kPa. Da observação da mencionada figura pode-se concluir que o aumento da sucção produz aumento de rigidez do solo para compressão virgem. Com os dados da Figura 4.105 foram determinados:

$$\kappa^* = \frac{\Delta \epsilon_v}{\ln p_2 - \ln p_1} = \frac{0,01575 - 0}{\ln 1000 - \ln 12,5} = 0,003594 \quad \kappa^* = 0,003594$$

$$\lambda^* = \frac{\Delta \epsilon_v}{\ln p_2 - \ln p_1} = \frac{0,040 - 0,005}{\ln 872,5 - \ln 200} = 0,023760 \quad \lambda^* = 0,02376$$

$$\text{Tensão de pré-adensamento isotrópica:} \quad p_{y0} = 256 \text{ kPa}$$

**Figura 4.105. Ensaios de compressão isotrópica - curvas  $\varepsilon_v$  x  $\log p'$  de carregamento incremental (adaptado de Ibañez, 2003, apud Cui e Belage, 1996).**

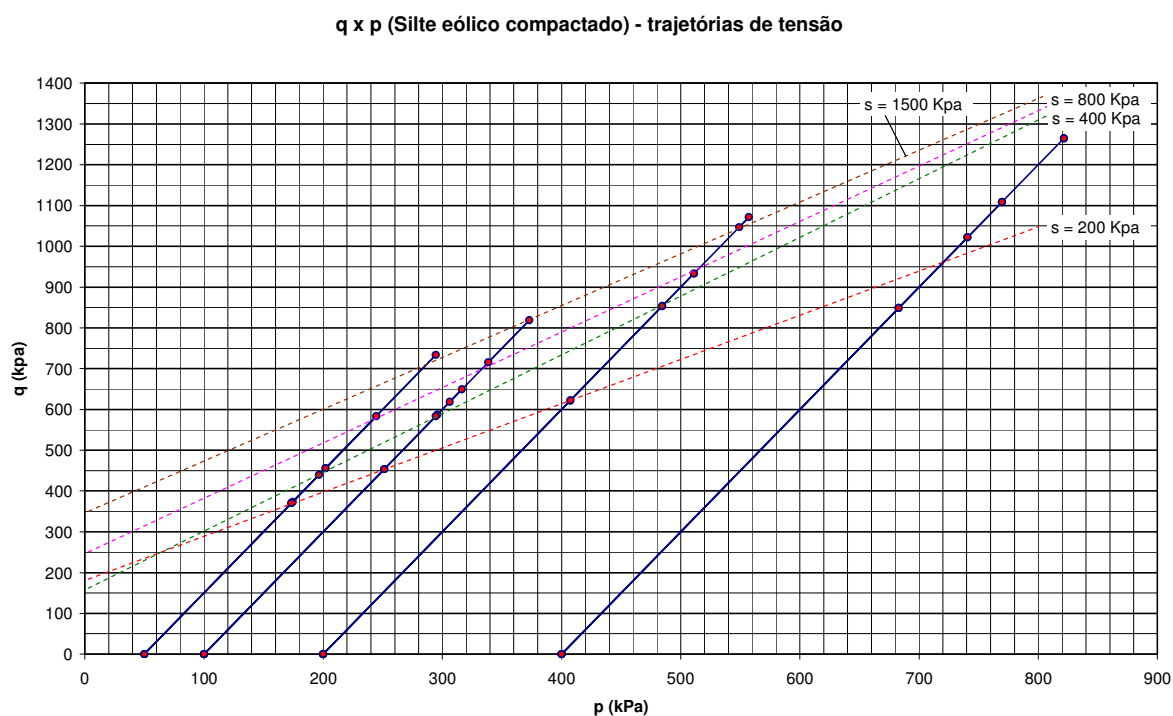


Como as curvas para sucção de 400 e de 800 kPa resultaram muito próximas, os parâmetros foram  $\kappa^*$ ,  $\lambda^*$  e  $p_{y0}$  foram utilizados na simulação dos ensaios CTC para as duas sucções, embora segundo Alonso et al (1990) haja evidência de que o índice de recompressão  $\lambda^*$  e a pressão de pré-adensamento  $p_{y0}$  sejam influenciadas pela tensão de sucção.

Com base nos gráficos de ensaios CTC das Figuras 4.102 a 4.104 foram plotadas as trajetórias de tensão da Figura 4.106, para determinação dos parâmetros da superfície de ruptura  $q_0$  e  $Mr$ .

Na definição das superfícies de ruptura foram considerados os estados de resistência de pico para os ensaios com tensão confinante de 50, 100 e 200 kPa. Os pontos para tensão confinante de 400 kPa não deram bom ajuste com envoltória linear e foram desconsiderados no processo. Da Figura 4.106 foram retirados os valores indicados na Tabela 4.7.

**Figura 4.106. Trajetórias de tensão dos ensaios CTC e superfícies de ruptura, para silte eólico compactado (adaptado de Ibañez, 2003, apud Cui e Belage, 1996).**



Segundo Alonso et al (1990) a declividade das envoltórias de ruptura, para solo parcialmente saturado, pode ser admitida como constante. Para o silte compactado há uma tendência de comportamento neste sentido para os testes sob tensões de sucção mais elevadas. Para a modelagem, entretanto, preferiu-se utilizar valores distintos para cada sucção, como indicado na Tabela 4.7.

**Tabela 4.7. Valores dos parâmetros das superfícies de ruptura  $q_0$  e  $Mr$ , dos ensaios CTC com silte eólico compactado (Ibañez, 2003, apud Cui e Belage, 1996).**

Ensaio CTC	$q_0$ (kPa)	$Mr$
Sucção = 200 kPa	182	1,0849
Sucção = 400 kPa	160	1,4286
Sucção = 800 kPa	240	1,3570
Sucção = 1500 kPa	348	1,2974



O módulo cisalhante  $G$  foi obtido pela observação do trecho inicial das curvas  $\sigma_d \times \varepsilon_l$ , dos ensaios CTC com tensão confinante  $\sigma_c = 200$  kPa e tensões de sucção de 400 e 800 kPa, apresentados na Figura 4.103. As citadas curvas foram replotadas em termos de  $\sigma_d \times \varepsilon_s$ . Tais curvas estão plotadas juntamente com as curvas de simulação obtidas com o uso do modelo, na Figura 4.107, à frente. A Tabela 4.8 mostra os valores retirados dos gráficos.

**Tabela 4.8. Valores de  $q \times \varepsilon_s$  e do módulo cisalhante  $G$  dos ensaios CTC com tensão confinante  $\sigma_c = 200$  kPa e tensões de sucção de 400 e 800 kPa.**

Ensaio	$\Delta \varepsilon_{s\ ini}$	$\Delta q_{ini}$	G (kPa)
Sucção $s = 400$ kPa	0,018	940	17407
Sucção $s = 800$ kPa	0,012	980	27222

Na simulação, neste caso, foram utilizados os valores obtidos para cada tensão de sucção.

Módulo cisalhante  $G$  ( $s = 400$  kPa):  $G = 17407$  kPa

Módulo cisalhante  $G$  ( $s = 800$  kPa):  $G = 27222$  kPa

O parâmetro  $\delta_{rem}$  foi tomado igual a 100%, pois o gráfico de ensaio de adensamento não mostra efeito de dano, e nos ensaios CTC o comportamento observado é de material com endurecimento com a deformação. A quantidade de dano  $D_{95}$ , correspondente a 95 % da queda na tensão de pré-adensamento, foi tomada igual a 0,93, embora neste caso não tenha influência, já que não há redução da pressão de pré-adensamento por efeito de dano.

Parâmetro  $\delta_{rem}$ :  $\delta_{rem} = 1,00$

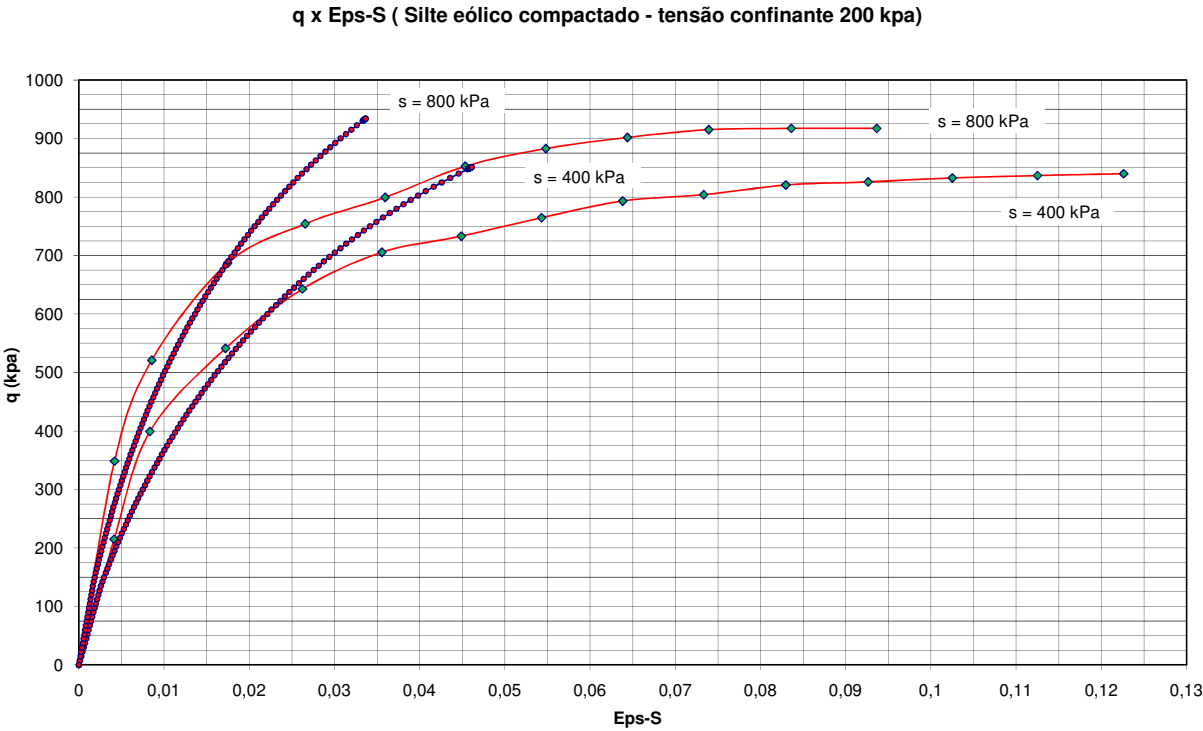
Parâmetro  $D_{95}$ :  $D_{95} = 0,93$

Para a fixação do parâmetro  $r_p$ , foi considerado que o material não apresenta efeito de dano, desta forma foi tomado:

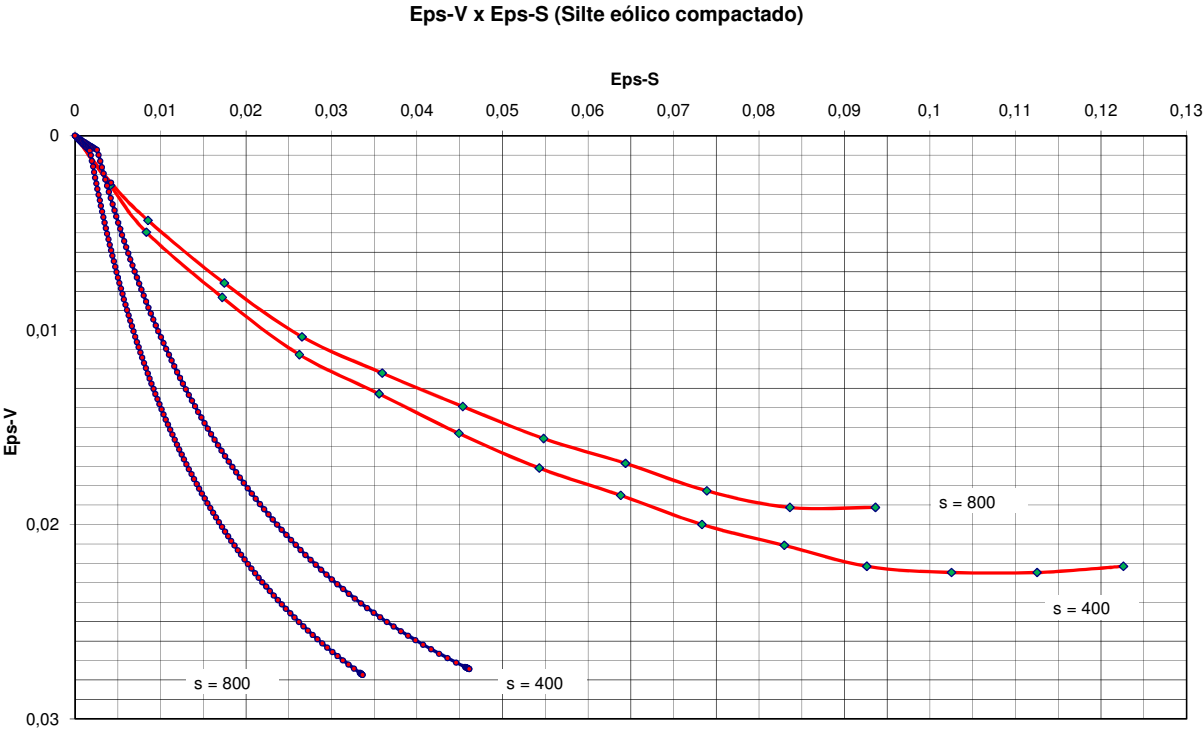
Parâmetro  $r_p$ :  $r_p = 1,0$

A Figura 4.107 apresenta os resultados dos ensaios CTC, em conjunto com as curvas obtidas com o emprego dos parâmetros escolhidos, para o silte eólico compactado.

Figura 4.107. Ensaaios CTC, (a) curvas  $q$  x Eps-S, e (b) curvas Eps-V x Eps-S.



(a)

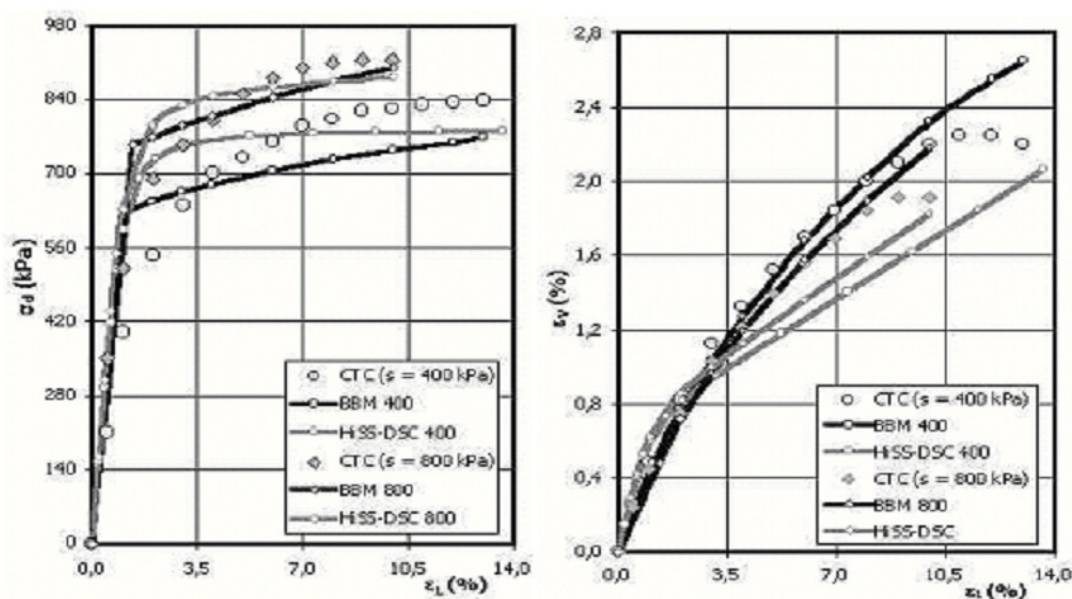


(b)

Os resultados apresentados na Figura 4.107 mostram razoável aproximação do trecho inicial das curvas tensão-deformação  $q \times \varepsilon_s$ , e de valor de resistência final. Para a relação  $\varepsilon_v \times \varepsilon_s$  a Figura 4.107(b) mostra tendência geral do comportamento qualitativo, mas representação pobre de valor quantitativo.

Para comparação do ajuste apresenta-se resultado de modelagem feita por meio de aplicação de Modelo Barcelona e de modelo Hiss-DSC, de Ibañez (2003). A representação de variação de deformação volumétrica específica  $\times$  deformação axial ( $\varepsilon_v \times \varepsilon_l$ ) está com eixo invertido na representação de Ibañez, na Figura 4.108(b).

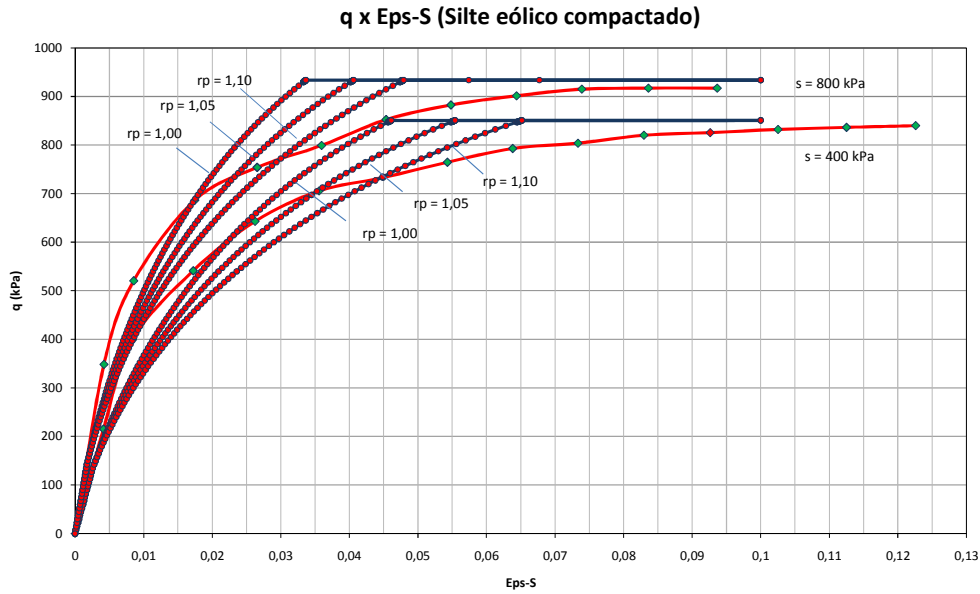
**Figura 4.108. Simulação de ensaios CTC com  $\sigma_c = 200$  kPa e sucções  $s = 400$  e  $800$  kPa, pelos modelos BBM (Cui e Delage, 1996) e HiSS-DSC (Ibañez, 2003): (a) curvas  $\sigma_d \times \varepsilon_l$ , (b) curvas  $\varepsilon_v \times \varepsilon_l$  (Ibañez, 2003).**



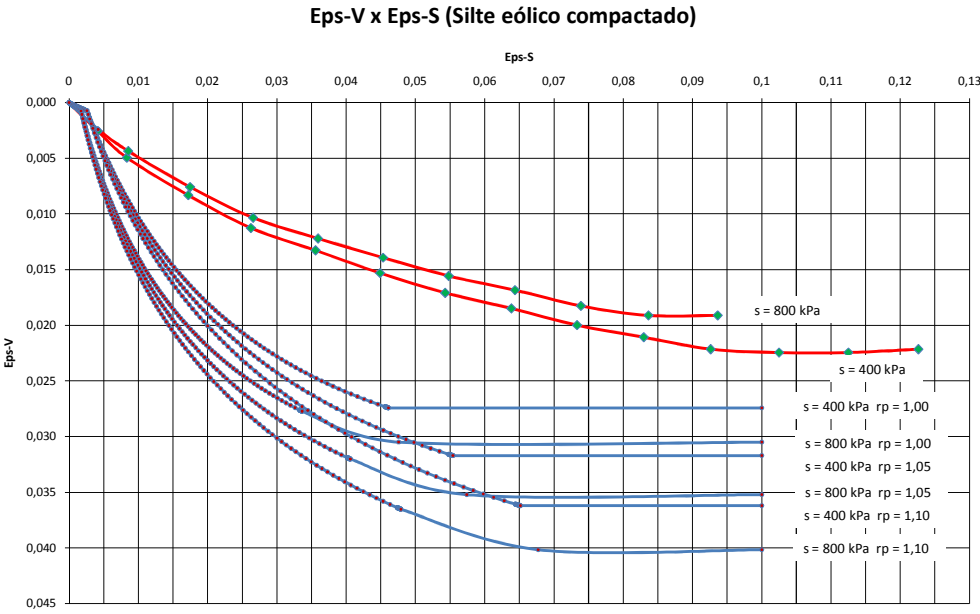
Tentativa de melhoria de ajuste foi feita por meio de variação do parâmetro  $r_p$ . Foram testados adicionalmente valores de  $r_p = 1,05$  e  $1,1$ . Nestas novas simulações foi introduzido efeito de dano apenas sobre as deformações e não sobre a resistência, pela manutenção da tensão isotrópica de escoamento residual  $p_{y \text{ res}} = p_{y0} \cdot \delta_{\text{rem}} = p_{y0}$ . A manutenção do parâmetro  $\delta_{\text{rem}} = 1,0$ , preserva o estado final de resistência, e a aplicação de valores crescentes de  $r_p$  modela efeito crescente de perda de rigidez do material. Os resultados podem ser observados na Figura 4.109.

Nas figuras a seguir as deformações estão expressas em porcentagens.

**Figura 4.109. Ensaaios CTC, (a) curvas  $q$  x Eps-S, e (b) curvas Eps-V x Eps-S, para  $r_p = 1,0; 1,05$  e  $1,1$ .**



(a)

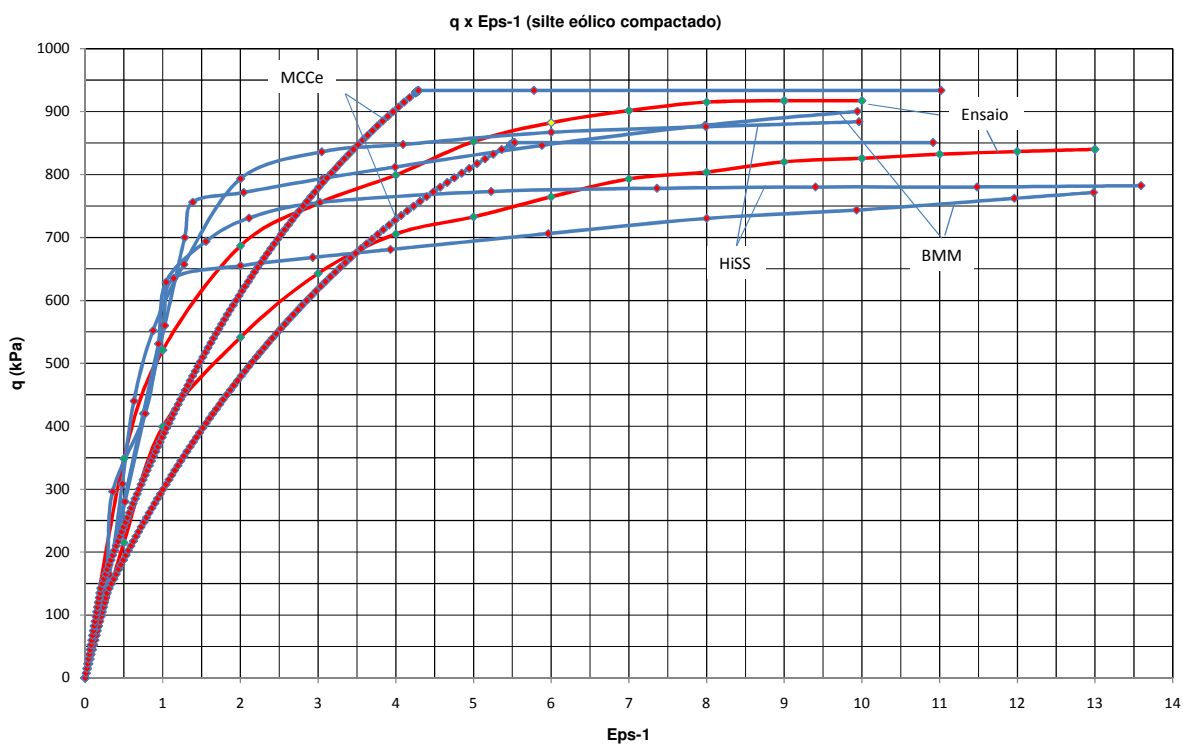


(b)

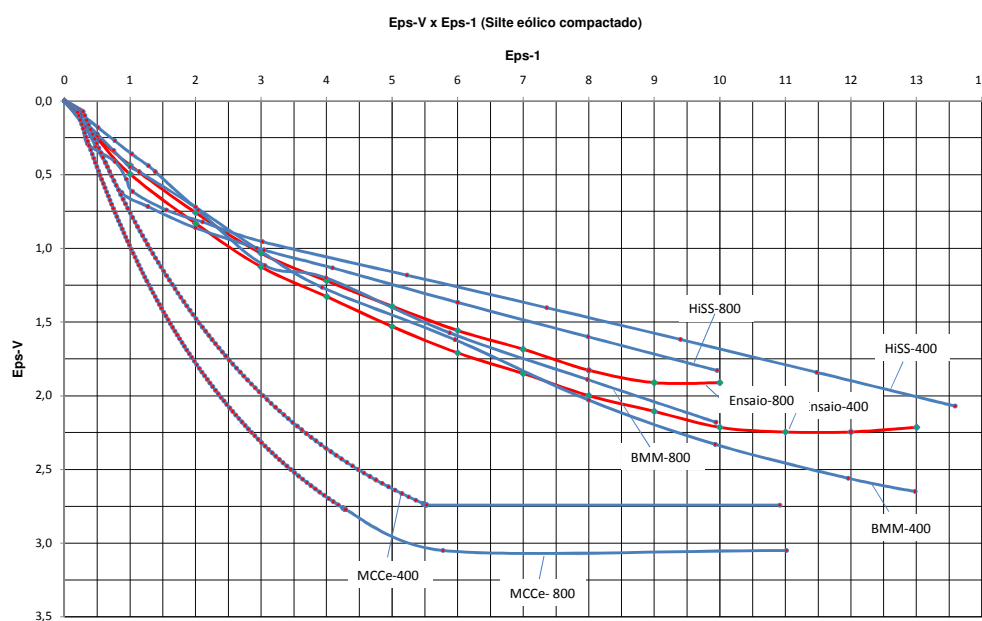
Nas Figuras 4.109 (a) e (b) os trechos horizontais foram introduzidos para indicar o comportamento após ter sido atingido ponto crítico. A introdução do dano pode melhorar a representação  $q \times \varepsilon_s$ , mas piora, neste caso, o comportamento da relação  $\varepsilon_v \times \varepsilon_s$ .

A Figura 4.110 mostra reprodução dos gráficos da Figura 4.108 com a adição das curvas obtidas com a aplicação do modelo para  $r_p = 1,0$ .

**Figura 4.110. Simulação de ensaios CTC com  $\sigma_c = 200$  kPa e sucções  $s = 400$  e  $800$  kPa, pelos modelos BBM (Cui e Delage, 1996), HiSS-DSC (Ibañez, 2003) e MCC estruturado com dano acoplado: (a) curvas  $\sigma_d \times \varepsilon_1$  (ou  $q \times \varepsilon_1$ ) e (b) curvas  $\varepsilon_v \times \varepsilon_1$  (adaptado de Ibañez, 2003).**



(a)



(b)

Os gráficos de relação tensão-deformação  $q \times \varepsilon_l$  mostram comportamento razoável para a simulação com o modelo testado, ao passo que para a relação  $\varepsilon_v \times \varepsilon_l$  o resultado mostrou variação volumétrica excessiva para deformações moderadas, com redução da diferença para os valores de ensaio, com o progresso da deformação.

Nas Figuras 4.110(a) e (b) as deformações  $\varepsilon_l$  estão expressas em porcentagem.

## 5. ANÁLISE

No capítulo 4 foram apresentados resultados obtidos de simulações teóricas e de ajuste do modelo proposto a resultados de ensaios encontrados na literatura. No item 4.1 – simulação de ensaios – foram simulados ensaios com trajetórias de tensão: de compressão triaxial convencional (compressão passiva), com tensão normal média constante, com redução de tensão normal média, de compressão confinada e de compressão não-drenada. Para os ensaios sob condições drenadas o modelo parece ter capacidade de descrição de comportamento geral para materiais não estruturados. Entretanto, observou-se na formulação pequena limitação referente a solicitações sobre condições não-drenadas.

O modelo descreve de forma adequada processo de carregamento não-drenado, no descarregamento, entretanto, a trajetória de tensão deve manter  $p'$  constante, e deve ocorrer de forma elástica, sem histerese. Desta forma, ciclos de carregamento e descarregamento não-drenados, não apresentam laços e dissipação de energia e não apresentam acumulação de deformações plásticas de distorção.

No item 4.2 – Adaptação do modelo hiperplástico com dano acoplado a solos estruturados – foi admitida superfície de escoamento estruturada simétrica em relação ao eixo das abscissas.

O modelo apresentou possibilidade de descrição de resistências de pico, decorrentes de efeito de estrutura ou de cimentação e de reprodução de efeitos de expansão volumétrica com a deformação e com o progresso da destruição da estrutura. As curvas de comportamento tensão-deformação-resistência para ensaios de compressão triaxial concordam qualitativamente com observação de Souza Pinto (2000):

*“O efeito de cimentação se manifesta na resistência dos solos. Três tipos de comportamento podem ser observados, em ensaios de compressão triaxial:*

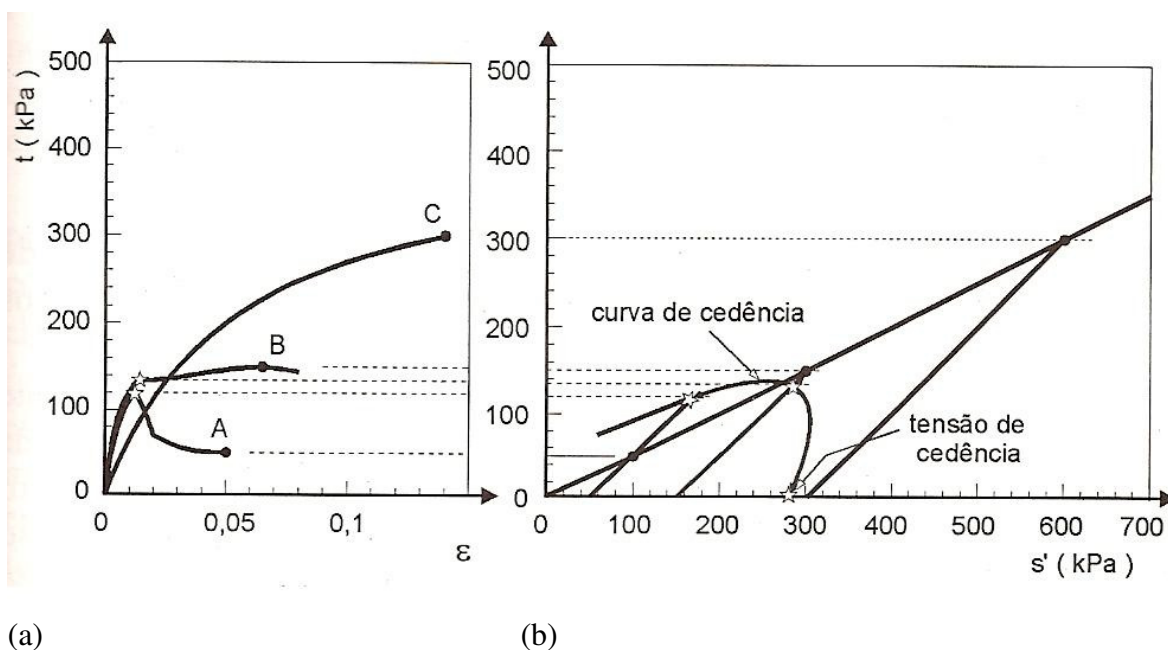
- (A) quando a tensão confinante é bastante baixa, perante a tensão de cedência, a tensão desviadora máxima é atingida com pequena deformação (quando a cimentação é destruída), após o que a tensão desviadora se estabiliza num nível mais baixo (quando a resistência passa a ser devida ao atrito entre as partículas); a curva A, na Figura 5.1(a) representa esta situação;*
- (B) para uma tensão confinante mais alta, mas ainda abaixo da tensão de cedência, a curva tensão-deformação apresenta uma mudança de comportamento quando a*

cimentação é destruída, havendo, entretanto, uma resistência final com desviadora maior, devida ao atrito entre os grãos que passa a ser mobilizado. Este caso é representado pela curva B na Figura 5.1(a).

(C) para tensões confinantes acima da tensão de cedência, o comportamento do material é típico de solos não cimentados, pois o próprio confinamento destruiu a cimentação. É o caso representado pela curva C na Figura 5.1(a).

A Figura 5.1 apresenta estas três situações: a Figura 5.1(a) indicando as curvas tensão deformação, com as características acima descritas e a Figura 5.1(b) as trajetórias de tensão que definem um campo, delimitado por uma **curva de cedência**, dentro do qual a cimentação é responsável pelo comportamento e fora do qual a cimentação não mais atua e o comportamento do solo é totalmente devido ao atrito entre as partículas.”

**Figura 5.1. Comportamento típico de solos cimentados em ensaios CTC drenados (Souza Pinto, 2000).**



Na Figura 5.1(a) o eixo das abscissas  $\varepsilon$  corresponde à deformação vertical dos corpos de prova e na Figura 5.1(b) corresponde à média das tensões  $s' = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$  e o das ordenadas, em 5.1(a) e 5.1(b), corresponde à metade da tensão desviadora, isto é,  $t = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ . A correlação com as grandezas  $p$  e  $q$ , utilizadas correntemente com modelos Cam-Clay, é expressa por  $p = s' - t/3$  e  $q = 2.t$ .



No item 4.3 – Exemplos de modelagem de solos residuais – foi feita aplicação do modelo a casos de ensaios com solos residuais e com solo compactado.

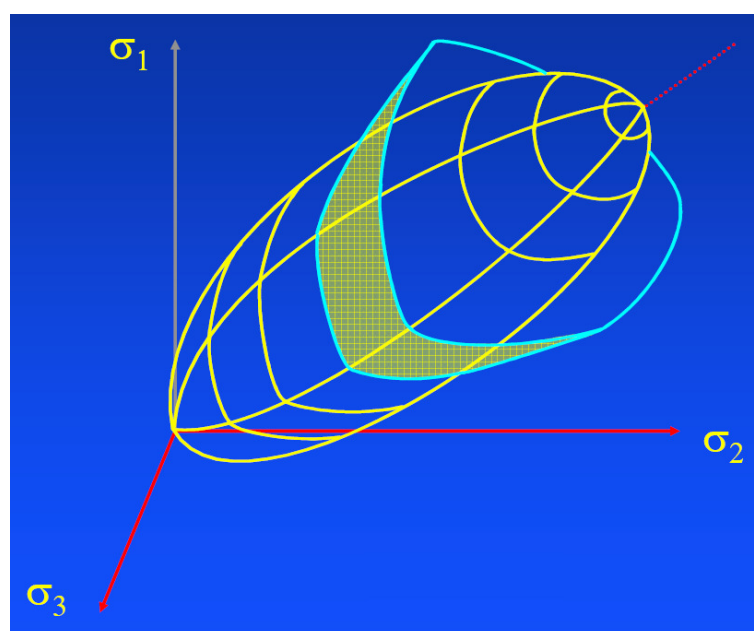
O primeiro caso modelado foi o de solo residual de biotita gnaiss, buscando a reprodução de ensaios executados sob condições de saturação. A série de ensaios incluiu ensaios: de compressão triaxial convencional (CTC), de extensão axial (RTE), de compressão lateral (CTE), de compressão hidrostática isotrópica (HC) e de compressão confinada.

As simulações mostraram concordância qualitativa com a observação real.

Na modelagem duas condições permitiriam melhorar o ajuste das curvas, a primeira de emprego de valor diferente da pressão de pré-adensamento, e a segunda de emprego de declividade menor para a superfície de ruptura na parte inferior do diagrama  $p \times q$ . A segunda condição leva em conta a assimetria das superfícies de ruptura e de escoamento no plano octaédrico. Os resultados experimentais mostram de forma evidente esta assimetria.

Este efeito está ligado à influência do terceiro invariante de tensões, que produz, no plano octaédrico, o afastamento da seção transversal da superfície elipsoidal de escoamento e de ruptura, de seção transversal circular, como mostra esquematicamente a Figura 5.2, para uma seção transversal triangular arredondada.

**Figura 5.2. Assimetria das superfícies de escoamento e de ruptura**  
(adaptado de Newson, 2008).



Para o segundo solo modelado, solo residual de arenito não-saturado, a série de ensaios apresentados incluiu ensaios de: compressão isotrópica (HC), sob condição saturada, e sob valores da sucção de 100 e 200 kPa; de compressão axial (CTC), sob condição saturada, e ensaios triaxiais de compressão axial de estágios múltiplos com controle de sucção (EMS), sob diferentes estágios de tensão de confinamento e valores de sucção.

A modelagem feita compreendeu a reprodução de ensaios de compressão triaxial convencional sob condição saturada, e, portanto, sob sucção nula, e sob condição parcialmente saturada com sucção de 80 kPa.

A modelagem teve por objetivo observar o resultado sob condição de sucção constante, onde a sucção deixa de ser variável do processo. Adaptação do modelo, entretanto, foi necessária para a consideração de superfície de ruptura não passante pela origem do diagrama  $p \times q$ .

E, finalmente, o terceiro solo modelado, silte de origem eólica, não-saturado, compactado em laboratório, incluiu série de ensaios de: compressão isotrópica (HC) para valores de sucção de 200, 400, 800 e 1500 kPa, compressão axial (CTC) para valores de sucção de 200, 400, 800 e 1500 kPa, sob tensões de confinamento de 50, 100, 200 e 400 kPa e ensaios triaxiais de carregamento proporcional (PL) para a condição  $q / p = 0,5$  e valores de sucção de 200 e 1500 kPa.

Foi feita modelagem para ensaios de compressão axial (CTC) para sucção de 400 e 800 kPa. Neste caso foi verificada possibilidade de inclusão de dano somente sobre os parâmetros elásticos  $\kappa^*$  e  $G$ .

Para este terceiro caso as superfícies de ruptura empregadas também não passam pela origem, apresentando um intercepto relacionado à coesão do material.

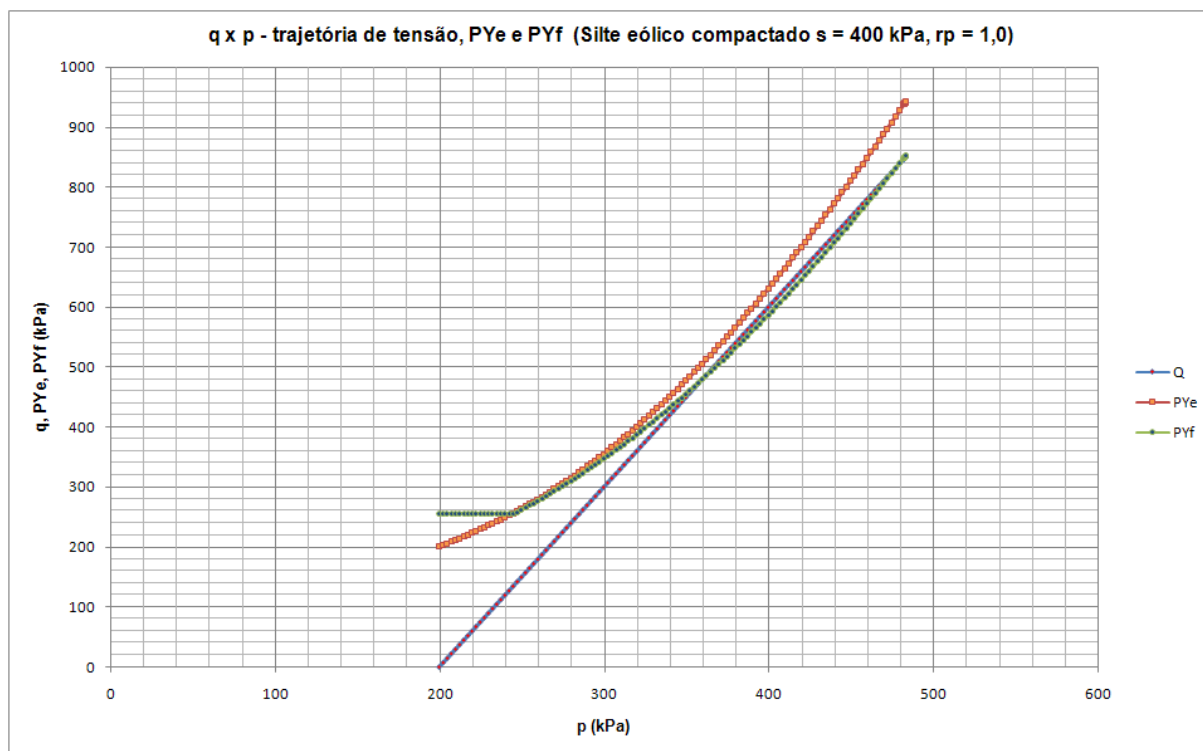
Os resultados obtidos com a adaptação do programa de cálculo, a superfícies de ruptura não passantes pela origem, mostram afastamento dos valores de controle utilizados para cada incremento de tensão. Isto é, o valor da pressão de escoamento calculado pela superfície elíptica para os novos valores de estado de tensão ( $p, q$ ) sofre afastamento do valor calculado por meio da função de escoamento (2.214), adiante repetida.

$$p_y = p_{y0}(\alpha_p^v, \alpha_d^v, \alpha_d^s) = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v) \cdot \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v)} \cdot \Gamma(\alpha_d^s) \quad (2.214 - \text{rep.})$$

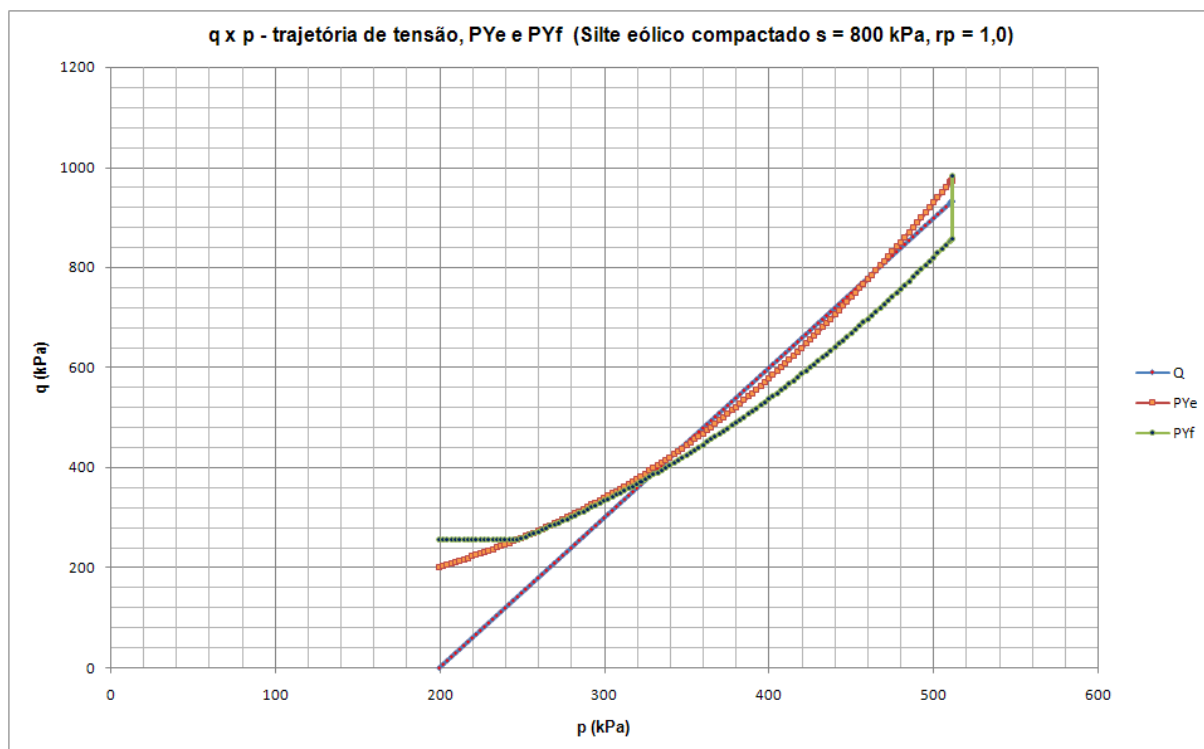
Esta diferença se reduz e mostra convergência quando o solo tende a estado crítico, em alguns casos e em outros não. Nos casos modelados, sob condição saturada ou não, mas com superfícies de ruptura passantes pela origem, a diferença foi sempre pequena.

A Figura 5.3(a) ilustra o acima descrito para o caso de silte eólico não-saturado, compactado, em caso onde se observou afastamento entre os valores da tensão de escoamento isotrópica, pela superfície de escoamento elíptica e por meio da função de escoamento.

**Figura 5.3. Variação da tensão de escoamento pela geometria da superfície elíptica e pela função de escoamento e trajetória de tensão CTC: (a) para sucção de 400 kPa e  $r_p = 1,0$  e (b) para sucção de 800 kPa e  $r_p = 1,0$ .**



(a)



(b)

A Figura 5.3(b) ilustra caso onde se observou convergência entre os valores da tensão de escoamento isotrópica, pela superfície de escoamento elíptica e por meio da função de escoamento, com a aproximação do ponto de estado crítico.

## 6. CONCLUSÕES

Modelo constitutivo de hiperplasticidade, capaz de descrever a evolução de dano e de deformações plásticas, pode ser desenvolvido a partir de dois potenciais de energia: um potencial de energia livre, de Gibbs ou de Helmholtz, e um potencial de dissipação. Nestes potenciais de energia dano e deformações plásticas são identificadas como variáveis internas. A interpretação física decorre do papel desempenhado nas funções potenciais. Tal possibilidade foi estabelecida por Einav et al (2007) para argilas sensíveis, normalmente consolidadas. No presente trabalho a formulação foi estendida para a representação do comportamento de solos residuais estruturados.

O modelo utiliza uma única função de dissipação combinando efeitos de dano e de deformações plásticas. Em decorrência quando ocorre dano ocorrem também deformações plásticas e vice-versa.

A obtenção das expressões de incrementos das variáveis internas é obtida por derivação direta dos potenciais de energia.

Deformações plásticas obedecem à regra da normalidade, em relação à superfície de escoamento.

O desenvolvimento do modelo hiperplástico com dano acoplado, proposto por Einav et al (2007), foi utilizado para a modelagem de ensaios de consolidação isotrópica, na reprodução de resultados de Holtz et al (1986) e também para modelagem de ensaios de compressão passiva, normalmente adensada, sob condição de cisalhamento não-drenado.

No presente trabalho foram desenvolvidos dois algoritmos para simulação de comportamento tensão-deformação-resistência de ensaios tradicionais de solos. Os algoritmos permitem reproduzir trajetórias de tensão controlada e de deformação controlada. Os algoritmos foram verificados, com variação de parâmetros, na simulação de ensaios: de compressão passiva (CTC), de compressão com tensão normal média  $p$  constante, de compressão com redução de tensão normal média  $p$ , de consolidação isotrópica e oedométrica, e, finalmente, de compressão não-drenada. Os resultados obtidos mostram coerência com o comportamento real dos solos.

O modelo tem comportamento elástico não-linear na região delimitada pela superfície de escoamento, o que vale dizer que na região elástica, onde efeitos de cisalhamento e de

tensão isotrópica são desacoplados, não ocorre variação volumétrica induzida por cisalhamento, e vice-versa.

Após ocorrência de escoamento há acoplamento entre o efeito de tensões cisalhantes e de compressão isotrópica, havendo incidência de variação volumétrica devido a tensões de cisalhamento e vice-versa. Tal acoplamento se processa por meio do fator multiplicador  $\lambda$ .

A expressão da função de escoamento (2.214) é genérica, podendo ser ajustada a dados de ensaios. No presente trabalho foi mantida a formulação de Einav et al (2007) já que a expressão reúne os principais aspectos do comportamento real dos solos, entre os quais o efeito de aumento de resistência com a compactação e o de destruição da estrutura do solo com o aumento do dano.

A função de escoamento (2.214) permite modelar comportamento de endurecimento e de amolecimento, utilizando como parâmetros de endurecimento (amolecimento) as variáveis internas de deformação volumétrica plástica e de dano. Neste modelo o comportamento do material é ditado pela história de tensões e também pela história de dano.

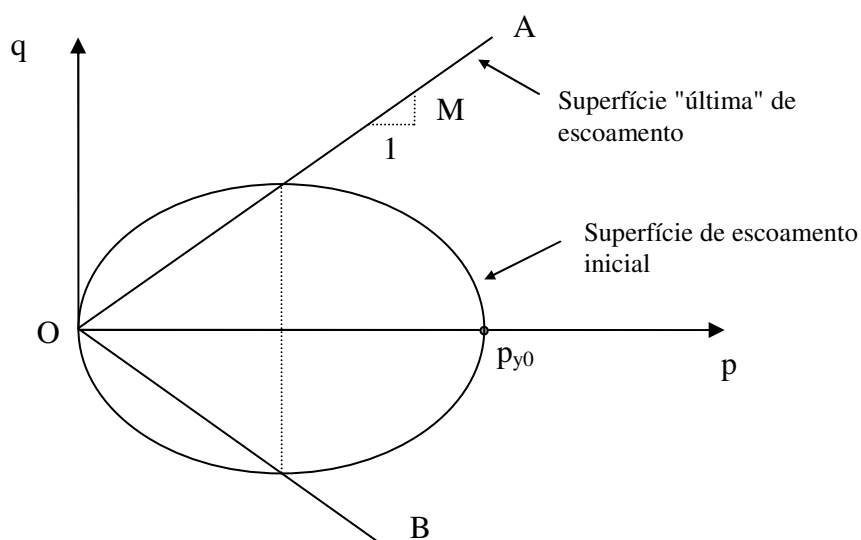
Para a modelagem de comportamento de material estruturado a função de escoamento, expressa por (2.214) foi estendida para o controle da superfície de escoamento em contração, na região estruturada. Efeito de incremento de variável de dano volumétrica foi desconsiderado quando resultava negativo. O uso da própria função de escoamento para simulação de efeito de contração permite representação de convergência para ponto de estado crítico sobre a superfície de ruptura.

O modelo apresenta possibilidade de variação contínua entre modelo de hiperplasticidade pura e de hiperelasticidade pura. Os casos citados referem-se às situações extremas, onde é desativado o dano, ou é desativada a geração de deformações plásticas, respectivamente. Entretanto, é possível ainda a obtenção de modelos de hiperplasticidade pura incluindo efeito de dano apenas sobre os módulos de compressibilidade volumétrica e cisalhante, expressos pelos parâmetros elásticos  $\kappa^*$  e  $G$ , mas desativando o efeito de dano sobre a função de pressão de escoamento isotrópica, utilizando-se parâmetro  $\delta_{rem} = 1,0$ , parâmetro que expressa a razão entre a pressão de escoamento isotrópica final, de referência da função de escoamento, e a pressão de escoamento isotrópica inicial.

Para valores constantes de sucção os parâmetros elásticos  $\kappa^*$  e  $G$  foram conservados constantes, independentes do estado de tensão. A dependência do estado de tensão, hipótese comum em outros modelos, é aqui modelada por meio das variáveis internas de dano.

No processo de ajuste da superfície inicial de escoamento é feito um acoplamento com a superfície de ruptura. Em outras palavras, neste modelo de superfície de escoamento elíptica, uma vez estabelecida a tensão de escoamento inicial, o eixo menor é definido pela superfície de ruptura, de tal forma que a intersecção das superfícies ocorra sobre / sob o centro da elipse, como mostra a Figura 6.1.

**Figura 6.1. Relação entre superfície de escoamento e superfície de ruptura.**



No modelo aplicado a solos saturados a superfície de ruptura resume-se a uma reta passante pela origem, reta  $AO$  na Figura 6.1. Desta forma as superfícies de escoamento, representadas por elipses que podem sofrer expansão ou contração conservam relação constante entre os diâmetros maior e menor. No caso dos solos parcialmente saturados, com superfícies de ruptura não passantes pela origem, tal proporção não é constante.

Nas simulações feitas, com superfícies de ruptura não passantes pela origem, as superfícies elípticas de escoamento foram mantidas fixas à origem dos eixos  $p$  e  $q$ , ponto  $O$  da Figura 6.1. No modelo Barcelona é admitido movimento da elipse de escoamento para a esquerda com o crescimento da sucção.

O fato de ser possível explicitar os incrementos de variáveis internas por meio de derivação dos potenciais de energia, no caso de modelos hiperplásticos, permitiu a obtenção de um sistema de equações lineares relacionando, de forma explícita, incrementos totais de deformação e incrementos de tensão. Desta forma foi possível construir algoritmos sem o uso

de processos iterativos, resumindo-se o cálculo dos incrementos de deformação no domínio elástico à solução do sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_v \\ \dot{\epsilon}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{p}{\bar{\kappa}^*} & 0 \\ 0 & 3\bar{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_v \\ \dot{\epsilon}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

No domínio elasto-plástico com dano, o sistema de equações (6.1) passa a apresentar acoplamento, podendo ser expresso de forma genérica como:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_v \\ \dot{\epsilon}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

onde os termos da matriz são função de:  $\bar{\kappa}^*, \bar{G}, \alpha_p^v, \alpha_d^v, \alpha_d^s, p, q$  e  $p_y$ . As expressões correspondentes ao sistema de equações (6.1), (6.2) e aos coeficientes da matriz A se referem às equações (3.117) a (3.121).

A convergência nos sucessivos incrementos de tensão ou de deformação está vinculada ao condicionamento da matriz dos coeficientes das equações (6.1) e (6.2). A matriz (6.1), que rege o domínio elástico é simétrica e positiva definida. Observou-se que, embora a matriz (6.2) não apresente expressões analíticas simétricas para os termos  $K_{pq}$  e  $K_{qp}$ , os valores numéricos são idênticos, a menos de erros de arredondamento. Desta forma a matriz dos coeficientes recai em matriz simétrica com termos diagonais positivos e dominantes. Instabilidade de cálculo só ocorre quando as variáveis internas de dano estão próximas do limite do domínio [0,1] e acima de 0,999. Este comportamento foi observado em algumas simulações, quando o estado de tensão atinge estado crítico, ou está já nas imediações de ponto de estado crítico.

Nas simulações feitas, geralmente foram utilizados incrementos de tensão  $dp = 0,05$  kPa e  $dq = 0,15$  kPa. Foram feitos alguns testes com incrementos de tensão  $dp = 0,02$  kPa e  $dq = 0,06$  kPa. As diferenças observadas foram insignificantes, menores do que 0,01 Kpa, para os estados finais de tensão ( $p, q$ ), em simulações que utilizaram até 10.000 ciclos de incrementos de tensão ou de deformação.

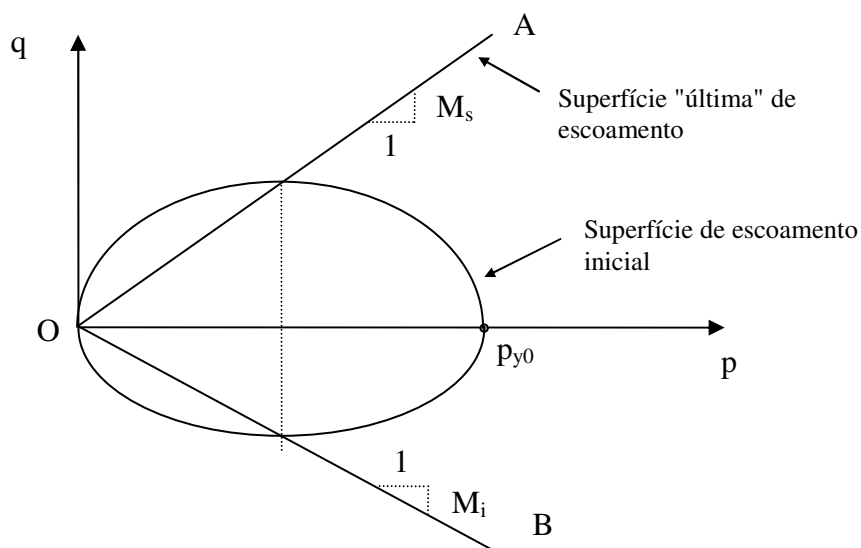


## 6.1 SUGESTÕES

No presente trabalho os estudos se restringiram à verificação do modelo. Etapa de validação, com aplicação do modelo a métodos de elementos finitos e comparação com resultados reais ainda é necessária. Aplicação do modelo aqui apresentado a caso de movimentação de taludes ou de comportamento tensão-deformação-resistência de fundações e contenções deve conduzir a bons resultados.

Para futuros trabalhos sugere-se a utilização de ajuste da superfície elipsoidal de ruptura, utilizando inclinação menor da superfície de ruptura no lado negativo de  $q$ , na forma indicada na Figura 6.2.

**Figura 6.2. Consideração da assimetria da superfície de escoamento e da superfície de ruptura.**



A modificação indicada deve exigir exame da formulação dos potenciais de energia livre e de dano para este caso em que a superfície de escoamento passa a ser composta por duas semi-elipses. É previsível que adaptação das expressões dos incrementos das variáveis internas de dano e de plasticidade seja necessária.

Foi colocado como objetivo deste trabalho buscar a formulação de potenciais de energia livre e de dissipação capazes de incluir efeito de saturação parcial, e, por conseguinte, de sucção diferente de zero. Entretanto, como etapa prévia, preferiu-se verificar possibilidade de ajuste do modelo, com valores de sucção constante. Os testes feitos, com superfícies de

ruptura não-passantes pela origem mostraram razoável concordância com resultados de ensaios, mas a condição de relação variável para os eixos das superfícies elípticas parece indicar também necessidade da reformulação dos potenciais utilizados e de consideração de  $M$  variável nas expressões dos incrementos das variáveis internas e do fator multiplicador  $\lambda$ . Obtenção de potenciais de energia capazes de representar assimetria das superfícies de escoamento e de ruptura, assim como da inclusão de efeito de sucção é objetivo a ser perseguido para o desenvolvimento de modelo melhor adaptado.

## REFERÊNCIAS

- ALONSO, E. E.; GENS, A.; HIGHT, D. W. **Special Problem Soils**. General report, Proc. 9<sup>th</sup> European Conf. Soil Mech. Fdn Engng, Dublin, No. 3, 1987, pp 1087-1146.
- ALONSO, E. E.; GENS, A.; JOSA, A. **A Constitutive Model for Partially Saturated Soils**. Geotechnique, V. 49, n. 3, p. 405-430, 1990.
- BAKER, R.; DESAI, C. S. **Induced anisotropy during plastic straining**. Int. J. Num. Analyt. Meth. In Geomechanics. No. 8, p. 167-185, 1984.
- BARDEN, L.; MCGOWN, A.; COLLINS, K. **The Collapse Mechanism in Partially Saturated Soil**. Engineering Geology, 7(1), pp. 49-60
- BEAR, J. **Dynamics of fluid flow in porous media**. Elsevier, Amsterdam, 1972.
- BURLAND, J. B. **On the Compressibility and Shear Strength of Natural Clays**. Geotechnique, V. 40, n. 3, p. 327-378, 1990.
- BUTTERFIELD, R. **A natural compression law for soils**. Geotechnique, No.29, p. 469-480, 1979.
- CHANDLER, H. W. **A plasticity theory without Drucker's postulate, suitable for granular materials**. J. Mech. Phys. Solids, No. 33, p. 215-226, 1985
- CHEN, W. F.; BALADY, G. Y. **Soil Plasticity – Theory and Implementation**. Elsevier, Developments in Geotechnical Engineering, n. 38, p. 15-18, 1985.
- COLLINS, I. F.; HOULSBY, G. T. **Application of thermomechanical principles to the modeling of geotechnical materials**. Proc. Royal. Soc. Lond, Londres, No 453, p. 1975-2001, 1997.
- COLLINS, I. F.; KELLY, P. A. **A thermomechanical analysis of a family of soil models**. Geotechnique, No. 52, No 7, p. 507-518, 2002.
- COLLINS, I. F.; TAI, A. **What has Thermo-mechanics to offer Geo-mechanics?** International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (11<sup>TH</sup>. IACMAG), Turim, Italy, june, p. 19-25, 2005.
- DESAI, C. S. **Mechanics of Materials and Interfaces: The Disturbed State Concept**, CRC press, Boca Raton, Florida, 2000.
- DESAI, C. S.; SIRIWARDANE, H. J. **Constitutive Laws for Engineering Materials – with emphasis on geologic materials**. Prentice Hall Inc., New Jersey, 1984.
- EINAV, I., HOULSBY, G. T., NGUYEN, G. D., **Coupled Damage and Plasticity Models Derived from Energy and Dissipation Models**, Int. Journal of Solids and Structures, Ed. Elsevier, V. 44, 2487-2508, 2007.
- HOLTZ, R. D.M.; JAMIOLKOWSKI, M. B.; LANCELLOTTA, R. **Lessons from Oedometer Tests on High Quality Samples**. J. Geotech. Eng., ASCE, V. 112, n. 8, 768-776, 1986.
- HOULSBY, G. T. **A derivation of the small-strain incremental theory of plasticity from thermodynamics**. Proc. IUTAM Conf. on Deformation and Failure of Granular Materials, Delft, p. 109-

118, 1982.

HOULSBY, G. T. **A study of plasticity theories and their applicability to soils.** PhD. Thesis, University of Cambridge, 1981.

HOULSBY, G. T. **Some mathematics for the constitutive modeling of soils.** Proc. Geomath Symposium, Horton, Greece, 2002.

HOULSBY, G.T.; PUZRIN, A.M. **A thermomechanical framework for rate-independent dissipative materials with internal functions.** Int. Jnl. Plasticity, No. 17, p. 1147-1165, 2001b.

HOULSBY, G.T.; PUZRIN, A.M. **A Thermomechanical Framework for Constitutive Models for Rate-Independent Dissipative Materials.** Int. Jnl. Plast, V.16, n. 9, p. 1017-1047, 2000.

HOULSBY, G.T.; PUZRIN, A.M. **Fundamentals of kinematic hardening hyperplasticity.** Int. Jnl. Solids Struct, n. 38, p. 3771-3794, 2001a.

HOULSBY, G.T.; PUZRIN, A.M. **Rate-dependent plasticity models derived from potential functions.** Jnl. of Rheology, V 46, No. 1, pp 113-126, 2002.

IBAÑEZ, J. P. **Hiperplasticidade: Uma introdução à teoria hiperplástica e à sua aplicação para a modelagem constitutiva de solos.** Estudo orientado em Geotecnia, PUC-RJ, Rio de Janeiro, dezembro de 2003.

IBAÑEZ, J. P. **Modelagem Constitutiva para Solos com ênfase em solos não saturados.** Dissertação de Mestrado, PUC-RIO, Rio de Janeiro, 2003.

KACHANOV, L. M. **Time of the Rupture Process under Creep Conditions.** IVZ Akad. Nauk, S.S.R., Otd. Tech. Nauk, 8, 26-31, 1958.

LADE, P. V.; KIM, M. K. **Single hardening constitutive model for frictional materials.** II Yield criterion and plastic work contours. Comput. Geotech., No. 6, p.13-29, 1988.

LEMAITRE, J. **Coupled Elasto-Plasticity and Damage Constitutive Equations.** Comput. Mech. Appl. Eng. n. 51, p. 31-49, 1985.

LIU, M. D., CARTER, J. P. **Virgin Compression of Structured Soils.** Geotechnique, V. 49, n. 1, p. 43-57, 1999.

LIU, M. D.; CARTER, J. P. **A Structured Cam Clay Model.** Canadian Geotechnical Journal, n. 39, p. 1313-1332, Canada, 2002.

LUBLINER, J. **On the thermodynamics foundations of non-linear solid mechanics.** Int. Jnl. Non-Linear Mech., No. 7, p. 237-254, 1972.

LUBLINER, J. **Plasticity theory.** New York, Macmillian, 1990.

MACHADO, S. L., **Aplicação de Conceitos de Elastoplasticidade a Solos Não Saturados,** Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1998.

MAIER, G.; HUECKEL, T. **Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for geotechnical media.** Proc. 9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Tokyo, Speciality session 7, constitutive relations for soils, p. 129-142, 1977.

MARANHA DAS NEVES, M., **Resistência dos Solos: Dilatância versus coesão efectiva.** Geotecnia, Revista Luso-Brasileira de Geotecnia, n. 109, Portugal, março, 2007.

MARINHO, F. A. M.; PEREIRA, J. H. F. **Mecânica dos Solos Não Saturados.** Mini curso, XI COBRAMSEG, Brasília, 1998.

MATSUOKA, H.; NAKAI, T. **Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses.** Proc. JSCE, No. 232, p. 59-70, 1974.

MATTOS, H. S. C. **Uma contribuição à formulação termodinâmica da elastoplasticidade e da elastoviscoplasticidade.** Tese de Doutorado. Dpto. Eng. Mec. PUC-Rio, 1988.

MAUGIN, G. A. **The thermomechanics of plasticity and fracture.** Cambridge, Cambridge University Press, 1992.

MITCHEL, J. K., **Fabric, structure and property relationships, Fundamentals of soils behavior,** John Wiley & Sons, New York, N. Y., 1976

MODARESSI, H.; LALOU I. I; AUBRY, D. **Thermodynamical approach tor cam-clay family models with Roscoe-type dilatancy rules.** Int. Jnl. Num. Analyt. Meth. Geomech., No 18, p. 133- 138, 1994.

NEWSON, T. [www.ca/people/tnewson/Lectures/ES522.info.pdf](http://www.ca/people/tnewson/Lectures/ES522.info.pdf), University of Western Ontario, Canada.

OLIVEIRA, A. M.; BRITO, S. N. A. **Geologia de Engenharia.** ABGE, São Paulo, 1998.

OLIVEIRA, C. P. **Estudo do comportamento tensão-deformação-resistência de um solo residual de biotita gnaiss saturado.** Dissertação de mestrado, Dpto. Eng. Civil, PUC-RIO, 2000.

ORTIGÃO, J. A. R. **Mecânica dos Solos dos Estados Críticos.** Terratek, p. 170-171, 3a. Ed. 2007.

PREVOST, J. H. **Modelling the behaviour of geomaterials.** Geotechnical modeling and applications. Ed. S. M. Sayed, Houston, TX, p. 8-75, 1987.

PUZRIN, A.M.; HOULSBY, G.T. **Fundamentals of Kinematic Hardening Plasticity.** Int. Jnl. Solid Structures, n. 38, p. 3771-3794, 2001.

RICE, J. R. **Inelastic constitutive relations for solis: an internal-variabel theory and its application to metal plasticity.** J. Mech. Phys. Solids., No. 9, p. 433-456.

SAWCZUK, A.; STUTZ, P. **On formulation of stress-strain relations for soils at failure.** Z. Angew. Math. Phys. No. 19, p. 770-778, 1968.

SIMO, J. C.; JU, J. W. **Strain and Stress Based Continuum Damage Models – I. Formulation.** Int. J. Solids Struct. V. 23, n. 7, p. 821-840, 1987.

SOUZA PINTO, C. de, **Curso Básico de Mecânica dos Solos,** Ed. Oficina de Textos, S.P., 2000, p.226 e 227.

TAYLOR, D. W., **Fundamentals of Soil Mechanics.** John Wiley & Sons, Inc., New York, 1948, p. 346.

TRUESDALL, C. **Rational thermodynamics**. New York: McGraw-Hill, 1969.

VARGAS, M. **Structurally unstable soils in southern Brazil**. Proc. 8 ICSMFE, Int. Conf. on Mechanics and Foundation Engineering, Moscou, 1973.

WOOD, D. M. **Soil behavior and critical state soil mechanics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

WYLEN, G. J. van; SONNTAG, R. E.; BORGNAKKE, C. **Fundamentos da Termodinâmica**. 6ª. Ed., Ed. Edgard Blücher Ltda. São Paulo, 2003.

ZIEGLER, H. **An introduction to thermomechanics**. 2a. ed., Amsterdam: North-Holland, 1983.

ZIEGLER, H. **Discussion of some objections to thermomechanical orthogonality**. Ingenieur Archiv, No. 9, p. 149-164, 1981.

ZIEGLER, H.; WHERLI c. **The derivation of constitutive relations from the free energy and the dissipation function**. Adv. Appl. Mech., No. 25, p. 183-238, 1987.

## ANEXO 1 - TRANSFORMAÇÃO DE LEGENDRE

### A 1 – TRANSFORMADA DE LEGENDRE

A transformação de Legendre é uma das mais úteis aplicações da matemática. Exemplos bem conhecidos incluem relações entre funções Lagrangeanas e Hamiltonianas, na mecânica analítica, entre energia de deformação e energia complementar na teoria da elasticidade, e entre potenciais termodinâmicos. A transformação também tem sido usada em formulações incrementais para materiais elasto-plásticos para transformar entre potenciais em termos de incrementos de tensões, para potenciais em termos de incrementos de deformações.

#### A.1.1 – Interpretação Geométrica da Transformada de Legendre

Uma função  $Z = X(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , define uma superfície,  $\Gamma$ , no espaço de  $(n+1)$  dimensões  $(Z, x_i)$ . A superfície pode ser vista como a envoltória de hiperplanos tangentes. A transformação de Legendre permite construir a representação funcional que descreve  $Z$  em termos destes hiperplanos. Esta relação é obtida por meio de um conhecido conceito de dualidade em geometria.

Os gradientes da função  $X(x_i)$  são designados por  $y_i$ :

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \quad (\text{A.1})$$

de forma que a normal à superfície  $\Gamma$  no espaço de  $(n+1)$  dimensões é  $(-1, y_i)$ . Se o hiperplano tangente ao ponto  $P(X, x_i)$  sobre  $\Gamma$  corta o eixo  $Z$  em  $Q(-Y, 0_i)$ , o vetor  $QP = P - Q = (X+Y, x_i)$  situa-se no hiperplano tangente, e conseqüentemente é ortogonal ao vetor normal à superfície  $\Gamma$  em  $P$ . O produto escalar destes dois vetores  $(X+Y, x_i) \bullet (-1, y_i)$  conduz a:

$$X(x_i) + Y(y_i) = x_i y_i \quad (\text{A.2})$$

A função  $Z = -Y(x_i)$  define a família de hiperplanos tangentes envolventes e é, portanto, a descrição dual da superfície  $\Gamma$ . A função pode ser encontrada eliminando-se as  $n$  variáveis  $x_i$  das  $(n + 1)$  equações em (A.1) e (A.2). Isto é possível, localmente, desde que (A.1) possa ser invertida e resolvida em termos de  $x_i$ s, isto é, desde que a matriz Hessiana,  $(\partial y_i$

$/ \partial x_j) = (\partial^2 X / \partial x_i \partial x_j)$  seja não-singular. Pontos nos quais o determinante do Hessiano se anula são pontos de singularidade da transformação (Sewell, 1987). Derivando (A.2), em um ponto não-singular, em relação à  $y_i$  produz

$$\frac{\partial X}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} + \frac{\partial Y}{\partial y_i} = y_j \frac{\partial x_j}{\partial y_i} + x_i \quad (\text{A.3})$$

Expressão esta, em que substituindo as expressões (A.1), produz por sua vez;

$$x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i} \quad (\text{A.4})$$

As relações (A.1), (A.2) e (A.4) definem a transformação de Legendre. Esta transformação é auto-dual, já que os papéis de  $X$  e  $Y$  podem ser intercambiados.

A transformação nem sempre pode ser conseguida facilmente de forma analítica. Uma exceção é o caso em que  $X(x_i)$  é uma função quadrática:  $X(x_i) = \frac{1}{2} A_{ij} x_i x_j$ , onde  $A_{ij}$  é uma matriz simétrica não-singular. As variáveis duais são  $y_i = (\partial X / \partial x_i) = A_{ij} x_j$ , de tal forma que  $x_i = A_{ij}^{-1} y_j$  e a transformada dual de Legendre é também uma função de forma quadrática

$$Y(y_i) = x_i y_i - A(X_i) = A_{ij}^{-1} y_i y_j - \frac{1}{2} A_{ij}^{-1} y_i y_j = \frac{1}{2} A_{ij}^{-1} y_i y_j \quad (\text{A.5})$$

Observam Collins e Houlsby (1997, p. 1996) que alguns autores mudam o sinal da função  $Y$ . Na exposição acima a notação utilizada permite visualizar de forma mais clara a simetria da transformação.

### A.1.2. Transformada de Legendre de Funções Homogêneas

De particular importância são os casos onde a função  $Z = X(x_i)$  é homogênea de grau  $n$  em relação às variáveis  $x_i$ s, de tal forma que  $X(\lambda x_i) = \lambda^n X(x_i)$  para qualquer escalar  $\lambda$ . Do teorema de Euler decorre a validade da relação

$$nX(x_i) = x_i \frac{\partial X}{\partial x_i} = x_i y_i \quad (\text{A.6})$$

De forma que da expressão (A.2) e (A.4) decorre o resultado



$$mY(y_i) = y_i \frac{\partial Y}{\partial y_i} = x_i y_i \quad (\text{A.7})$$

onde  $(1/n) + (1/m) = 1$ . De tal forma que a função dual de Legendre  $Y(y_i)$  é homogênea de grau  $m = n / (n-1)$ . No caso citado no item anterior, de funções quadráticas,  $n = 2$ , e assim as funções duais  $X$  e  $Y$  são ambas homogêneas de grau dois. Um exemplo familiar desta situação ocorre na elasticidade linear, onde a função de energia elástica  $W(\varepsilon_{ij})$  e a função de energia complementar  $W_c(\sigma_{ij})$  são funções quadráticas de seus argumentos e satisfazem à relação fundamental:

$$W(\varepsilon_{ij}) + W_c(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (\text{A.8})$$

### A.1.3. Transformadas Parciais de Legendre e Ciclos Fechados de Transformações

No caso de funções que dependem de duas famílias de variáveis  $X(x_i, \alpha_i)$ , onde  $x_i$  e  $\alpha_i$  são vetores  $n$ - e  $m$ -dimensionais, respectivamente. Pode-se efetuar a transformação de Legendre com relação às variáveis  $x_i$  na forma já vista é obter a função dual  $Y(y_i, \alpha_i)$ . As variáveis  $\alpha_i$  tem papel passivo nesta transformação e são tratadas como parâmetros constantes. As três equações básicas nesta transformação são:

$$X(x_i, \alpha_i) + Y(y_i, \alpha_i) = x_i y_i \quad (\text{A.9})$$

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \quad (\text{A.10})$$

$$x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i} \quad (\text{A.11})$$

Se as derivadas de  $X(x_i, \alpha_i)$  com relação às variáveis passivas são denominadas como  $\beta_i$ , então de (A.9) decorre que:

$$\beta_i = \frac{\partial X}{\partial \alpha_i} = - \frac{\partial Y}{\partial \alpha_i} \quad (\text{A.12})$$

Por outro lado, é também possível efetuar transformação de Legendre sobre  $X(x_i, \alpha_i)$  com relação às variáveis  $\alpha_i$  e construir uma segunda função dual  $V(x_i, \beta_i)$  com as propriedades:

$$X(x_i, \alpha_i) + V(x_i, \beta_i) = \alpha_i \beta_i \quad (\text{A.13})$$

$$\beta_i = \frac{\partial X}{\partial \alpha_i} \quad (\text{A.14})$$

$$\alpha_i = \frac{\partial V}{\partial \beta_i} \quad (\text{A.15})$$

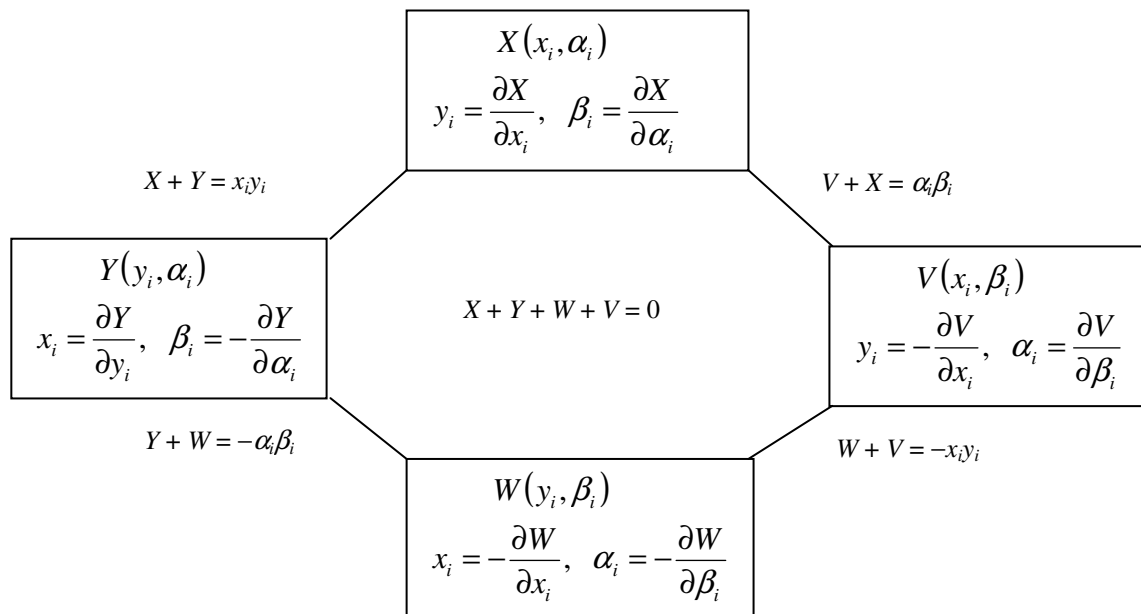
E mais:

$$\beta_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (\text{A.16})$$

onde agora as variáveis  $x_i$ s tem papel passivo.

Este processo pode ser continuado. Uma transformação de Legendre sobre  $Y(y_i, \alpha_i)$  com relação às variáveis  $\alpha_i$  produz uma quarta função  $W(y_i, \beta_i)$ . A mesma função é obtida pela transformação  $V(x_i, \beta_i)$  com relação às variáveis  $x_i$ . Produz-se então um ciclo fechado de transformações, como ilustrado na Figura A.1. O mais conhecido exemplo de ciclo de transformações pertence à Termodinâmica clássica, onde as quatro funções são a energia interna  $U(s, v)$ , a energia livre de Helmholtz  $F(\theta, v)$ , a energia livre de Gibbs  $G(\theta, p)$  e a entalpia livre  $H(s, p)$ , onde  $\theta, s, v$  e  $p$  são a temperatura, a entropia, o volume específico e a pressão, respectivamente. Outros exemplos são dados por Sewell (1987).

**Figura A.1. Ciclo fechado de quatro transformações de Legendre.**



#### A.1.4. A Transformação Singular

Um caso importante, na teoria da plasticidade independente de taxa de deformação, ocorre quando  $X$  é homogênea e de grau um em  $x_i$ , isto é,  $\lambda X(x_i, \alpha_i) = X(\lambda x_i, \alpha_i)$ . Decorre disto que  $X(x_i, \alpha_i) = x_i y_i$ , caso em que a função dual  $Y(y_i, \alpha_i)$  é identicamente nula, o que se comprova pelo simples exame da expressão (A.2).

Existe uma interpretação geométrica simples deste resultado, que é de grande alcance de aplicação. A superfície  $Z = X(x_i, \alpha_i)$ , de  $(n + 1)$  dimensões, é um hipercone com seu vértice coincidente com a origem. Desta forma todos os hiperplanos tangentes encontram o eixo  $Z$  em  $Z = 0$ , de tal modo que  $Y(y_i, \alpha_i) = 0$  para todo  $y_i$ . Mais ainda, o valor de  $y_i = (\partial X / \partial x_i)$  não é afetado pela transformação  $x_i \rightarrow \lambda x_i$  e assim o mapeamento de  $x_i \rightarrow y_i$  é  $\infty \rightarrow 1$ . E mais, desde que a função dual  $Y(y_i, \alpha_i)$  é identicamente nula os seguintes resultados são obtidos:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial Y}{\partial \alpha_i} d\alpha_i = 0 \quad (\text{A.17})$$

Da diferenciação da expressão (A.2), resulta:

$$x_i dy_i + y_i dx_i = dX(x_i, \alpha_i) = \frac{\partial X}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial X}{\partial \alpha_i} d\alpha_i + 0 \quad (\text{A.18})$$

Substituindo-se em (A.18) a expressão (A.1):  $y_i = (\partial X / \partial x_i)$ , obtém-se:

$$x_i dy_i - \frac{\partial X}{\partial \alpha_i} d\alpha_i = 0 \quad (\text{A.19})$$

Comparando-se (A.17) e (A.19), e igualando-se os coeficientes de  $dy_i$  e  $d\alpha_i$ , fica:

$$x_i = \lambda \frac{\partial Y}{\partial y_i} \quad (\text{A.20})$$

e

$$-\frac{\partial X}{\partial \alpha_i} = \lambda \frac{\partial Y}{\partial \alpha_i} \quad (\text{A.21})$$

onde  $\lambda$  é um escalar indeterminado, que reflete a natureza de não-unicidade desta transformação singular.

Observam Collins e Houlsby (1997, p. 1998) que os desenvolvimentos apresentados são clássicos, no sentido de que todas as funções são assumidas como suficientemente suaves para que existam todas as derivadas. Na prática as superfícies encontradas na teoria da plasticidade apresentam, por vezes, partes planas, arestas e cantos. Tais superfícies, e as funções que as definem, podem ser incluídas dentro de uma teoria geral pela utilização dos conceitos de análise convexa. Em particular, a derivada definida de modo comum é substituída pela *sub-diferencial* e a transformação simples de Legendre é generalizada pela *transformação de Legendre-Fenchel*.

## ANEXO 2 – SIMULAÇÃO DE ENSAIOS

### a) Simulação de compressão não-drenada – Modelo hiperelástico com dano e com tensão de escoamento não-constante (Caso de amolecimento)

Utilizando os parâmetros empregados em exemplo de Einav et al (2007):  $k^* = 0,005$ ,  $\lambda^* = 0,09$ ,  $G = 20.000$  kPa,  $p_{y0} = 410$  kPa,  $M = 1,2$ ,  $\delta_{rem} = 0,3$ ,  $D_{95} = 0,93$  e empregando as equações (3.1), (3.2), (3.8), (3.10), (3.32) e (3.34), adiante repetidas, obtêm-se os valores de incremento de deformações,  $p$ ,  $q$  e  $p_y$ . A Tabela A.1 resume o cálculo.

$$\dot{\epsilon}_v = \kappa^* \cdot \left[ \frac{\dot{\alpha}_d^v}{(1 - \alpha_d^v)^2} \log\left(\frac{p}{p_0}\right) + \frac{1}{(1 - \alpha_d^v)} \left(\frac{\dot{p}}{p}\right) \right] = 0 \quad (3.1 - \text{rep.})$$

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{1}{3G} \left[ \frac{1}{(1 - \alpha_d^s)} \cdot \dot{q} + \frac{q \cdot \dot{\alpha}_d^s}{(1 - \alpha_d^s)^2} \right] \quad (3.2 - \text{rep.})$$

$$\dot{\alpha}_d^v = \lambda \cdot 2 \cdot \frac{\left(p - \frac{p_y}{2}\right)}{\left(\frac{\kappa^*}{(1 - \alpha_d^v)^2} \cdot \left[\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right]\right)} \quad (3.8 - \text{rep.})$$

$$\dot{\alpha}_d^s = \lambda \cdot 2 \cdot \frac{6G(1 - \alpha_d^s)^2}{M^2} \quad (3.10 - \text{rep.})$$

$$\lambda = \frac{3\bar{G} \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\epsilon}_s}{\left\{ 2 \cdot \left(p - \frac{p_y}{2}\right)^2 \cdot \frac{p}{\bar{\kappa}^*} \cdot \left[ \frac{\log\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\left(\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right)} + \frac{12\bar{G}}{M^4} \cdot q^2 + \right. \right.} \\ \left. \left. p \cdot p_{y0} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}{\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}} \cdot \frac{(p - p_y / 2)}{\frac{\kappa^*}{(1 - \alpha_d^v)^2} \cdot \left(\log\left(\frac{p}{p_0}\right) - 1\right)} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma'(\alpha_d^s)}{\sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)}} \cdot \frac{6G(1 - \alpha_d^s)^2}{M^2} \right] \right\}} \quad (3.32 - \text{rep.})$$

$$p_y(\alpha_d^v, \alpha_d^s) = p_{y0} \cdot \sqrt{\Gamma(\alpha_d^v) \Gamma(\alpha_d^s)} \quad (3.34 - \text{rep.})$$

A função de escoamento foi montada a partir das indicações de Einav et al (2007) com:

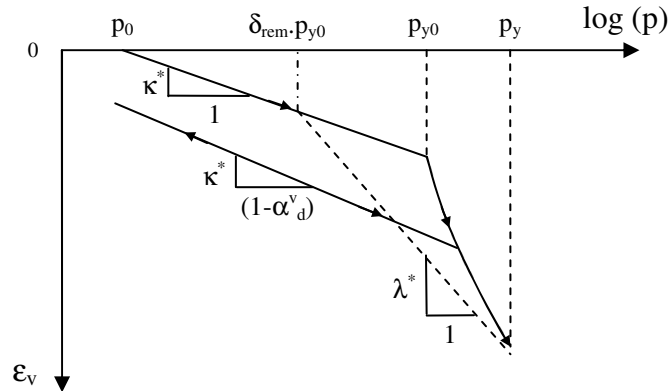
$$\Gamma(\alpha_d^v) = (\delta_{rem} + (1 - \delta_{rem}) \exp(-3\alpha_d^v(1 - D_{95})/D_{95}(1 - \alpha_d^v))) \quad (2.211 - \text{rep.})$$

com formulação simétrica para a função de variável interna de dano de distorção, ou seja:

$$\Gamma(\alpha_d^s) = (\delta_{rem} + (1 - \delta_{rem}) \exp(-3\alpha_d^s(1 - D_{95})/D_{95}(1 - \alpha_d^s))) \quad (2.211(b) - \text{rep.})$$

A Figura A.2 reproduz a forma esquemática da função de escoamento.

**Figura A.2. Comportamento tensão-deformação de compressão de modelo MCC hiperelástico com dano (modificado de Einav et al, 2007).**



Na simulação foram impostos acréscimos de distorção  $d\epsilon_s$ , que são iguais à deformação vertical de compressão imposta a um corpo de prova, e na sequência:

- 1) incremento de deformação de distorção  $d\epsilon_s$ .
- 2) cálculo de  $\lambda$ .
- 3) cálculo dos incrementos das variáveis internas de dano, volumétrica e de distorção.
- 4) atualização dos valores das variáveis internas de dano, volumétrica e de distorção.
- 5) cálculo dos incrementos de tensão  $dp$  e  $dq$ .
- 6) atualização dos valores das componentes de tensão  $p$  e  $q$ .
- 7) cálculo da nova tensão de escoamento  $p_y$  alterada pelo efeito de dano, onde

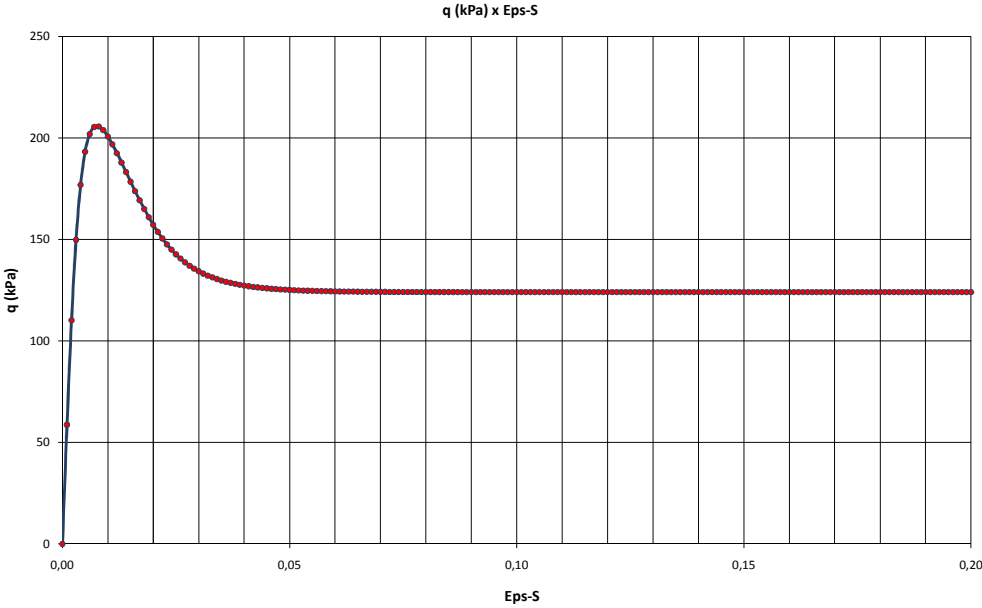
$$p_y = \left( p^2 + \left( \frac{q}{M} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{p} \quad (A.22)$$

é correspondente ao diâmetro maior da nova superfície de escoamento passante pelo ponto de coordenadas  $(p, q)$ .

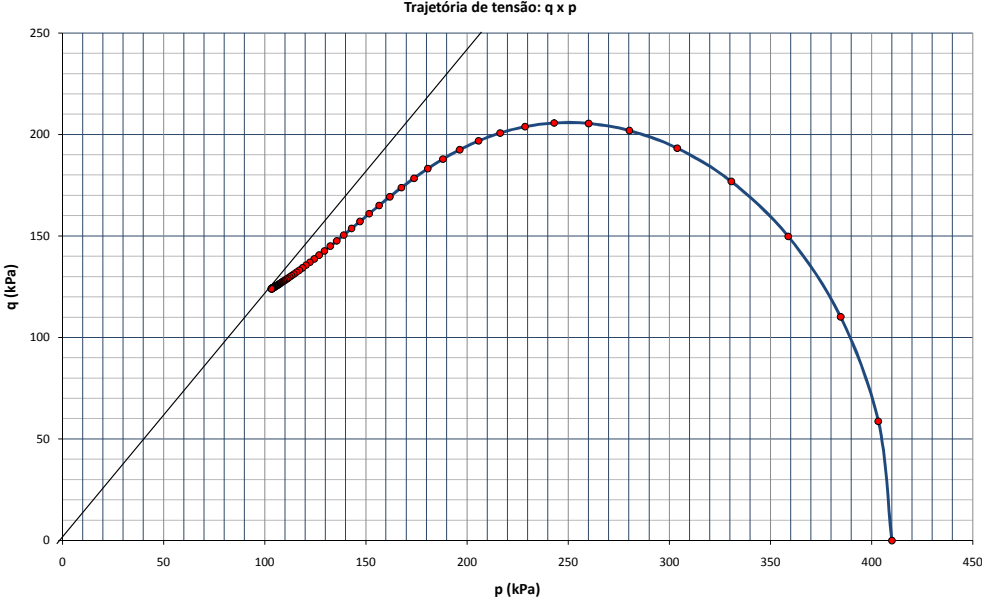
**Tabela A.1. Simulação de carregamento não-drenado.**

Ciclo	$\epsilon_s$	p (kPa)	q (kPa)	$p_y$ (kPa)
1	0,000	410,000	0,000	410,000
51	0,001	403,278	58,710	409,213
101	0,002	384,664	110,186	406,582
151	0,003	358,747	149,833	402,205
201	0,004	330,608	176,860	396,311
251	0,005	303,880	193,256	389,230
301	0,006	280,264	201,927	381,296
351	0,007	260,101	205,447	372,793
401	0,008	243,076	205,678	363,933
451	0,009	228,670	203,850	354,867
501	0,010	216,365	200,745	345,706
551	0,011	205,719	196,855	336,534
601	0,012	196,381	192,500	327,419
651	0,013	188,075	187,889	318,425
701	0,014	180,598	183,170	309,610
751	0,015	173,797	178,448	301,036
801	0,016	167,562	173,808	292,761
851	0,017	161,816	169,314	284,844
901	0,018	156,508	165,021	277,339
951	0,019	151,600	160,969	270,292
1001	0,020	147,069	157,188	263,738
1051	0,021	142,898	153,698	257,699
1101	0,022	139,069	150,506	252,182
1151	0,023	135,567	147,610	247,181
1201	0,024	132,376	145,002	242,676
1251	0,025	129,478	142,665	238,641
1301	0,026	126,852	140,579	235,041
1351	0,027	124,479	138,725	231,841
1401	0,028	122,339	137,080	229,003
1451	0,029	120,410	135,622	226,491
1501	0,030	118,675	134,332	224,268
1551	0,031	117,115	133,190	222,303
1601	0,032	115,714	132,179	220,566
1651	0,033	114,455	131,284	219,030
1701	0,034	113,325	130,492	217,672
1751	0,035	112,310	129,790	216,471
1801	0,036	111,399	129,168	215,407
1851	0,037	110,582	128,616	214,465
1901	0,038	109,848	128,126	213,629
1951	0,039	109,190	127,690	212,888
2001	0,040	108,599	127,303	212,230
2051	0,041	108,068	126,959	211,646
2101	0,042	107,592	126,652	211,126
2151	0,043	107,164	126,379	210,664
2201	0,044	106,781	126,136	210,252
2251	0,045	106,436	125,918	209,885
2301	0,046	106,127	125,725	209,558
2351	0,047	105,849	125,552	209,267
2401	0,048	105,599	125,397	209,007
2451	0,049	105,375	125,259	208,774
2501	0,050	105,174	125,136	208,567

**Figura A.3. Compressão não-drenada – gráfico  $q$  x  $\varepsilon_s$ .**

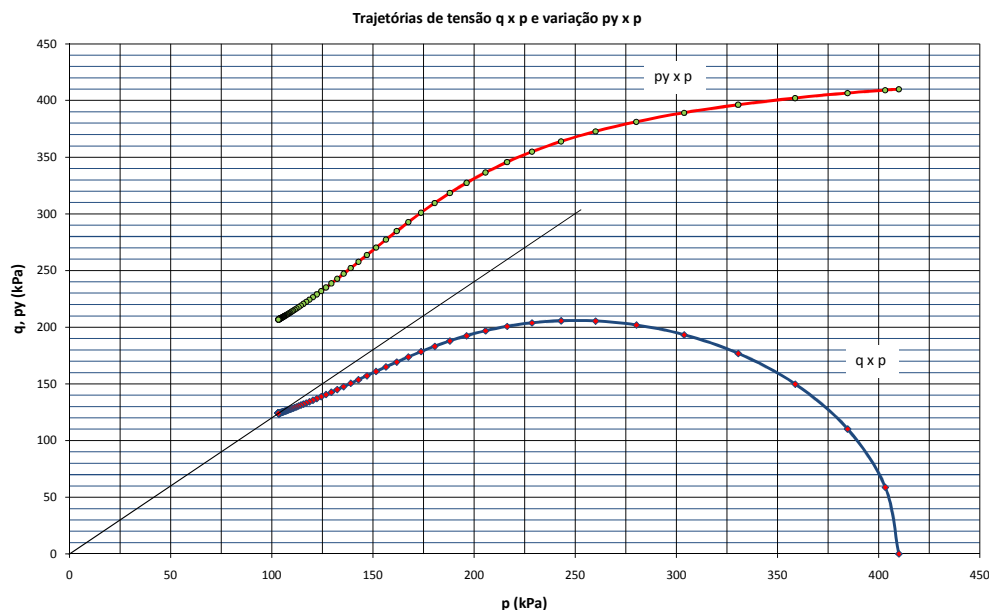


**Figura A.4. Compressão não-drenada – gráfico  $q$  x  $p$ .**





**Figura A.5. Compressão não-drenada – gráfico  $q \times p$  e  $p_y \times p$ .**



A Figura A.3 mostra o comportamento  $q \times \varepsilon_s$ , em que é notável o desenvolvimento de pico de tensão com redução sensível da resistência com a deformação, ou melhor, com o dano, após o pico.

A Figura A.4 mostra a trajetória de tensão  $p \times q$  ao longo do carregamento e a convergência para ponto final de estado de tensão sobre a reta  $q = M \cdot p$ , onde  $M = 1,2$ .

A Figura A.5 mostra, de forma associada, a trajetória de tensão  $p \times q$  ao longo do carregamento e o decaimento da tensão de escoamento  $p_y$  com o aumento do dano.

#### **b) Simulação de compressão não-drenada – Modelo hiperplástico sem dano acoplado e com tensão de escoamento constante**

Utilizando os parâmetros empregados em exemplo de Einav et al (2007):  $k^* = 0,005$ ,  $G = 20.000$  kPa,  $p_{y0} = 410$  kPa e  $M = 1,2$ , e emprego das equações (3.84), (3.85) e (2.204), adiante repetidas, obtém-se os valores de deformações de distorção versus  $q$ , que permitem a construção do gráfico da Figura 3.13. A Tabela A.2 resume o cálculo.

$$\lambda = \frac{-\kappa^* \cdot \left( \frac{\dot{p}}{p} \right)}{2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right)} \quad (3.84 - \text{rep.})$$

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G} + 2 \cdot \lambda \cdot \frac{q}{M^2} \quad (3.85 - \text{rep.})$$

E a equação da superfície de escoamento elíptica dada por (2.204):

$$y = \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 + \left( \frac{q}{M} \right)^2 - \left( \frac{p_y}{2} \right)^2 \leq 0 \quad (2.204 - \text{rep.})$$

**Tabela A.2. Simulação de carregamento não-drenado.**

I	dp	p	q	dq	$\lambda$	$d\epsilon_e^s$	$d\epsilon_p^s$	$d\epsilon^s$	$\epsilon_s$
1	0,0	410	-	-	-	-	-	-	-
2	12,5	397,5	84,59	84,587	0,00000	0,00005	0,00141	0,00146	0,00146
3	12,5	385	117,73	33,141	0,00000	0,00007	0,00055	0,00063	0,00208
4	12,5	372,5	141,83	24,099	0,00000	0,00010	0,00040	0,00050	0,00258
5	12,5	360	161,00	19,170	0,00000	0,00013	0,00032	0,00044	0,00303
5	12,5	347,5	176,85	15,850	0,00000	0,00016	0,00026	0,00042	0,00345
6	12,5	335	90,21	13,363	0,00000	0,00019	0,00022	0,00041	0,00386
7	12,5	322,5	201,58	11,371	0,00000	0,00023	0,00019	0,00042	0,00428
8	12,5	310	211,28	9,701	0,00000	0,00028	0,00016	0,00044	0,00472
9	12,5	297,5	219,53	8,252	0,00000	0,00035	0,00014	0,00048	0,00521
10	12,5	285	226,50	6,961	0,00000	0,00043	0,00012	0,00055	0,00576
11	12,5	272,5	232,28	5,787	0,00000	0,00055	0,00010	0,00064	0,00640
12	12,5	260	236,98	4,699	0,00000	0,00072	0,00008	0,00080	0,00720
13	12,5	247,5	240,66	3,674	0,00000	0,00099	0,00006	0,00105	0,00825
14	12,5	235	243,35	2,696	0,00000	0,00150	0,00004	0,00154	0,00979
15	12,5	222,5	245,10	1,750	0,00001	0,00273	0,00003	0,00276	0,01256
16	12,5	210	245,93	0,825	0,00003	0,01020	0,00001	0,01018	0,02274
17	4,0	206	246,00	0,070	0,00005	0,01660	0,00000	0,01659	0,03932
18	0,8	205,2	246,00	0,003	0,00005	0,01670	0,00000	0,01665	0,05597
19	0,18	205,02	246,00	0,000	0,00011	0,03750	0,00000	0,03750	0,09347
20	0,0192	205,0008	246,00	0,000	0,00029	0,10000	0,00000	0,10000	0,19347

**c) Simulação de compressão confinada (ensaio oedométrico) – Modelo hiperplástico sem dano acoplado – caso de endurecimento**

Utilizando os parâmetros empregados em exemplo de Einav et al (2007):  $k^* = 0,005$ ,  $G = 20.000$  kPa,  $p_{y0} = 410$  kPa e  $M = 1,2$ . Tomando  $p_0 = 205$  kPa, e aplicando as equações adiante repetidas, obtém-se os valores de deformações  $\varepsilon_v$  e  $\varepsilon_s$ , que permitem a construção dos gráficos tensão-deformação, da Figura 3.20. A Tabela A.3 resume o cálculo.

No trecho elástico, a relação  $p \times q$  foi determinada por meio da equação (3.48), repetida a seguir:

$$q = 2\kappa^* G \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right) \quad (3.48 - \text{rep.})$$

Os incrementos de deformação são determinados por meio das equações gerais (3.56) e (3.57) adiante repetidas, considerando nulas as contribuições plásticas.

Atingida a superfície inicial de escoamento, os incrementos de deformação são calculados com auxílio das equações seguintes, incluindo-se as contribuições de deformações plásticas.

$$\lambda = \frac{\kappa^* \cdot \left(\frac{\dot{p}}{p}\right) - \frac{\dot{q}}{2G}}{\frac{3q}{M^2} - 2\left(p - \frac{p_y}{2}\right)} \quad (3.96 - \text{rep.})$$

$$\dot{\varepsilon}_v = \kappa^* \cdot \left(\frac{\dot{p}}{p}\right) + \dot{\alpha}_p^v = \kappa^* \cdot \left(\frac{\dot{p}}{p}\right) + 2 \cdot \lambda \cdot \left(p - \frac{p_y}{2}\right) \quad (3.56 - \text{rep.})$$

$$\text{e: } \dot{\varepsilon}_s = \frac{\dot{q}}{3G} + \dot{\alpha}_p^s = \frac{\dot{q}}{3G} + 2 \cdot \lambda \cdot \frac{q}{M^2} \quad (3.57 - \text{rep.})$$

E a equação da superfície de escoamento elíptica dada por (4.193):

$$y = \left(p - \frac{p_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{M}\right)^2 - \left(\frac{p_y}{2}\right)^2 \leq 0 \quad (2.204 - \text{rep.})$$

Para cada incremento de componentes de tensão  $dp$  e  $dq$ , após ser atingida a superfície inicial de escoamento, é calculada nova pressão de escoamento isotrópica, decorrente do endurecimento. Colocando de forma incremental:

$$p_{i+1} = p_i + dp \quad (\text{A.23})$$

$$q_{i+1} = q_i + dq \quad (\text{A.24})$$

A nova tensão de escoamento, que deve satisfazer à equação (2.204) é obtida de:

$$\left(p_{i+1} - \frac{p_{y(i+1)}}{2}\right)^2 + \left(\frac{q_{i+1}}{M}\right)^2 - \left(\frac{p_{y(i+1)}}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow p_{y(i+1)} = \frac{p_{i+1}^2 + \left(\frac{q_{i+1}}{M}\right)^2}{p_{(i+1)}} \quad (\text{A.25})$$

Os incrementos de deformação em cada ciclo foram testados de forma a verificar a condição de confinamento lateral:

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{3}{2} \dot{\epsilon}_s \Rightarrow \kappa^* \cdot \left(\frac{\dot{p}}{p}\right) + \lambda \cdot 2 \cdot \left(p - \frac{p_y}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{\dot{q}}{3G} + \lambda \cdot 2 \cdot \frac{q}{M^2}\right] \quad (3.95 - \text{rep.})$$

A Tabela A.3 apresenta o resumo de 15 ciclos de iteração.

**Tabela A.3. Simulação de carregamento de compressão confinada.**

I	p (kPa)	q (kPa)	$\epsilon_v$	$\epsilon_s$	p <sub>v</sub> (kPa)	Ciclo
1	205	0	0,000000000	0,000000000	410,00	elástico
2	250	39,69	0,000992255	0,000661503	410,00	elástico
3	300	76,15	0,001903862	0,001269242	410,00	elástico
4	350	106,98	0,002674616	0,001783077	410,00	elástico
5	381,85	124,40	0,003110089	0,002073393	410,00	Ciclo 0
6	386,85	127,41	0,003211222	0,002140922	415,99	Ciclo 1
7	391,85	130,41	0,003316069	0,002210820	421,99	Ciclo 2
8	396,85	133,41	0,003424871	0,002283354	427,99	Ciclo 3
9	401,85	136,41	0,003537884	0,002358697	434,01	Ciclo 4
10	406,85	139,41	0,003655385	0,002437031	440,02	Ciclo 5
11	411,85	142,41	0,003777672	0,002518555	446,05	Ciclo 6
12	416,85	145,41	0,003905066	0,002603484	452,07	Ciclo 7
13	421,85	148,41	0,004037915	0,002692051	458,11	Ciclo 8
14	426,85	151,41	0,004176600	0,002784507	464,15	Ciclo 9
15	431,85	154,41	0,004321532	0,002881128	470,19	Ciclo 10
16	436,85	157,41	0,004473164	0,002982217	476,24	Ciclo 11
17	441,85	160,41	0,004631994	0,003088103	482,29	Ciclo 12
18	446,85	163,41	0,004798567	0,003199151	488,35	Ciclo 13
19	451,85	166,41	0,004973488	0,003315766	494,41	Ciclo 14
20	456,85	169,41	0,005157430	0,003438393	500,48	Ciclo 15

**d) Simulação de compressão confinada (ensaio oedométrico) – Modelo hiperplástico sem dano acoplado – caso de amolecimento**

Para simulação de comportamento de material com amolecimento, foram empregados os mesmos parâmetros e as mesmas equações do exemplo do item (b). A diferença reside no fato de que a tensão hidrostática de escoamento vai reduzindo com a progressão da deformação, após ter início o processo de escoamento. Os resultados obtidos estão resumidos na Tabela A.4, e estão representados por meio de gráficos da Figura 3.21.

**Tabela A.4. Simulação de carregamento de compressão confinada.**

<b>p (kPa)</b>	<b>q (kPa)</b>	<b><math>\epsilon_v</math></b>	<b><math>\epsilon_s</math></b>	<b>p<sub>y</sub> (kPa)</b>	<b>Ciclo</b>
205	0	0,000000000	0,000000000	410,00	elástico
250	39,69	0,000992255	0,000661503	410,00	elástico
300	76,15	0,001903862	0,001269242	410,00	elástico
350	106,98	0,002674616	0,001783077	410,00	elástico
381,85	124,40	0,003110089	0,002073393	410,00	Ciclo 0
376,85	121,91	0,003055736	0,002037265	404,24	Ciclo 1
371,85	119,41	0,003003449	0,002002406	398,48	Ciclo 2
366,85	116,91	0,002953152	0,001968875	392,72	Ciclo 3
361,85	114,41	0,002904773	0,001936623	386,97	Ciclo 4
356,85	111,91	0,002858239	0,0019056	381,22	Ciclo 5
351,85	109,41	0,002813477	0,001875758	375,48	Ciclo 6
346,85	106,91	0,002770417	0,001847052	369,73	Ciclo 7
341,85	104,41	0,002728988	0,001819432	364,00	Ciclo 8
336,85	101,91	0,002689119	0,001792853	358,26	Ciclo 9
331,85	99,41	0,002650742	0,001767268	352,53	Ciclo 10
326,85	96,91	0,002613786	0,001742631	346,80	Ciclo 11
321,85	94,41	0,002578181	0,001718895	341,08	Ciclo 12
316,85	91,91	0,002543859	0,001696013	335,36	Ciclo 13
311,85	89,41	0,00251075	0,00167394	329,65	Ciclo 14
306,85	86,91	0,002478783	0,001652629	323,94	Ciclo 15

**e) Simulação de compressão confinada – Modelo hiperplástico sem dano acoplado – caso de endurecimento**

Para simulação de comportamento de compressão confinada de material pré-adensado, com endurecimento e sem dano acoplado, foram empregadas as equações relacionadas no item 3.4.4.

Para simular a fase de recompressão elástica os incrementos de tensão correspondentes aos incrementos de deformação impostos, são obtidos pela inversão das expressões (3.24) e (3.25).

$$\dot{p} = \frac{p \cdot \dot{\epsilon}_v}{\bar{\kappa}^*} \quad (3.24 - \text{rep.})$$

$$\dot{q} = 3\bar{G} \cdot \dot{\epsilon}_s \quad (3.25 - \text{rep.})$$

**Tabela A.5. Simulação de carregamento de compressão confinada.**

I	Eps-V	Eps-S	AlfaV-p	AlfaS-p	P	Q	PY	PYa
1	,000000	,000000	,000000	,000000	250,000000	,000000	250,000000	410,000000
50	,000735	,000490	,000000	,000000	289,524771	29,400000	291,597996	410,000000
100	,001485	,000990	,000000	,000000	336,304267	59,400000	343,590080	410,000000
150	,002235	,001490	,000000	,000000	390,642084	89,400000	404,850103	410,000000
200	,002985	,001990	,000702	,000253	394,429422	104,234365	413,558325	413,398522
250	,003735	,002490	,001461	,000564	393,710050	115,576903	417,271560	417,107083
300	,004485	,002990	,002215	,000906	393,394398	125,032762	420,991088	420,823578
350	,005235	,003490	,002963	,001274	393,526834	132,940357	424,714066	424,544751
400	,005985	,003990	,003706	,001664	394,107017	139,587538	428,440403	428,270193
450	,006735	,004490	,004443	,002070	395,108593	145,214629	432,171695	432,001262
500	,007485	,004990	,005176	,002490	396,492083	150,019558	435,910461	435,740298
550	,008235	,005490	,005904	,002921	398,213240	154,163777	439,659609	439,490077
600	,008985	,005990	,006629	,003360	400,228097	157,778125	443,422106	443,253469
650	,009735	,006490	,007350	,003807	402,495761	160,968181	447,200779	447,033231
700	,010485	,006990	,008070	,004260	404,979724	163,818922	450,998213	450,831895
750	,011235	,007490	,008787	,004717	407,648279	166,398647	454,816715	454,651731
800	,011985	,007990	,009502	,005177	410,474416	168,762215	458,658305	458,494729
850	,012735	,008490	,010216	,005641	413,435445	170,953690	462,524736	462,362625
900	,013485	,008990	,010929	,006107	416,512499	173,008483	466,417523	466,256914
950	,014235	,009490	,011641	,006574	419,690014	174,955067	470,337970	470,178891
1000	,014985	,009990	,012353	,007043	422,955227	176,816355	474,287202	474,129674
1050	,015735	,010490	,013063	,007513	426,297721	178,610811	478,266197	478,110230
1100	,016485	,010990	,013773	,007984	429,709028	180,353326	482,275804	482,121406
1150	,017235	,011490	,014483	,008456	433,182288	182,055927	486,316771	486,163946
1200	,017985	,011990	,015192	,008928	436,711959	183,728343	490,389763	490,238511
1250	,018735	,012490	,015902	,009400	440,293579	185,378454	494,495374	494,345693
1300	,019485	,012990	,016611	,009873	443,923568	187,012652	498,634143	498,486030
1350	,020235	,013490	,017319	,010346	447,599061	188,636134	502,806565	502,660014
1400	,020985	,013990	,018028	,010819	451,317779	190,253132	507,013098	506,868104
1450	,021735	,014490	,018736	,011292	455,077919	191,867096	511,254170	511,110726
1500	,022485	,014990	,019445	,011765	458,878064	193,480853	515,530188	515,388287
1550	,023235	,015490	,020153	,012238	462,717110	195,096716	519,841539	519,701174
1600	,023985	,015990	,020862	,012711	466,594213	196,716591	524,188597	524,049760
1650	,024735	,016490	,021570	,013184	470,508735	198,342046	528,571725	528,434406
1700	,025485	,016990	,022278	,013657	474,460208	199,974381	532,991274	532,855467
1750	,026235	,017490	,022986	,014130	478,448306	201,614676	537,447594	537,313288
1800	,026985	,017990	,023694	,014602	482,472813	203,263832	541,941025	541,808213
1850	,027735	,018490	,024402	,015075	486,533610	204,922604	546,471906	546,340578
1900	,028485	,018990	,025110	,015547	490,630653	206,591629	551,040574	550,910722
1950	,029235	,019490	,025818	,016019	494,763959	208,271448	555,647363	555,518979
2000	,029985	,019990	,026526	,016491	498,933602	209,962523	560,292609	560,165682

**f) Simulação de compressão não-drenada – Modelo hiperplástico sem dano acoplado – caso de endurecimento**

Para simulação de comportamento de compressão não-drenada de material normalmente adensado, com endurecimento e sem dano acoplado, foram empregadas as equações:

$$\lambda = \frac{\left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\kappa^*} \cdot \dot{\epsilon}_v + 3G \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\epsilon}_s}{\left\{ 2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 \cdot \frac{p}{\kappa^*} + \frac{6G}{M^4} \cdot q^2 + p \cdot p_{y0} \cdot \Pi'(\alpha_p^v) \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \right\}} \quad (3.59 - \text{rep.})$$

Colocando  $A^*$  igual ao denominador do fator de multiplicação  $\lambda$ :

$$A^* = \left\{ 2 \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 \cdot \frac{p}{\kappa^*} + \frac{6G}{M^4} \cdot q^2 + p \cdot p_{y0} \cdot \Pi'(\alpha_p^v) \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \right\} \quad (3.98 - \text{rep.})$$

resulta:

$$\lambda = \frac{1}{A^*} \cdot \left[ \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\kappa^*} \cdot \dot{\epsilon}_v + 3G \cdot \frac{q}{M^2} \cdot \dot{\epsilon}_s \right] \quad (3.99 - \text{rep.})$$

e:

$$\begin{bmatrix} \left\{ \left[ 1 - \frac{2}{A^*} \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right)^2 \cdot \frac{p}{\kappa^*} \right] \cdot \frac{p}{\kappa^*} \right\} & \left\{ \left[ \frac{-6G}{A^*} \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{q}{M^2} \right] \cdot \frac{p}{\kappa^*} \right\} \\ \left\{ \left[ -\frac{2}{A^*} \cdot \left( p - \frac{p_y}{2} \right) \cdot \frac{p}{\kappa^*} \cdot \frac{q}{M^2} \right] \cdot 3G \right\} & \left\{ \left[ 1 - \frac{6G}{A^*} \cdot \frac{q^2}{M^4} \right] \cdot 3G \right\} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_v \\ \dot{\epsilon}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \quad (3.106 - \text{rep.})$$

Impondo incrementos de deformação  $\dot{\epsilon}_v = 0$  e  $\dot{\epsilon}_s = \delta$ , onde  $\delta$  é escolhido de forma a assegurar que a tensão de escoamento  $p_{y(i+1)}$  correspondente ao ponto de coordenadas  $(p_{(i+1)}, q_{(i+1)})$ , acompanhe a tensão de escoamento calculada por meio da função de endurecimento.

$$p_{y(i+1)} = \frac{p_{i+1}^2 + \left( \frac{q_{i+1}}{M} \right)^2}{p_{(i+1)}} \quad (A.25 - \text{rep.})$$

$$p_y(\alpha_p^v) = p_{y0} \cdot \Pi(\alpha_p^v) \quad (3.58 - \text{rep.})$$

Os incrementos  $\dot{\alpha}_p^v$  e  $\dot{\alpha}_p^s$  são obtidos por meio de:

$$\dot{\alpha}_p^v = \lambda.2. \left( \frac{p - p_y/2}{r_p^2} \right) \quad (3.7 - \text{rep.})$$

$$\dot{\alpha}_p^s = \lambda.2. \frac{q}{(r_p M)^2} \quad (3.9 - \text{rep.})$$

A Tabela A.6 resume os valores obtidos com uso de incremento  $\delta = 0,00005$ , a cada 50 ciclos de cálculo. A Figura 3.23 mostra os gráficos correspondentes a estes resultados.

**Tabela A.6. Simulação de carregamento de compressão não-drenada.**

I	Eps-V	Eps-S	AlfaV-p	AlfaS-p	P	Q	P <sub>v</sub>	P <sub>a</sub>
1	,000000	,000000	,000000	,000000	410,000000	,000000	410,000000	410,000000
50	,000000	,002450	,000411	,000144	377,594895	138,333089	412,788482	411,988299
100	,000000	,004950	,001469	,001228	305,478050	223,319456	418,851306	417,145750
150	,000000	,007450	,002328	,003312	257,151439	248,307184	423,656377	421,385454
200	,000000	,009950	,002785	,005710	234,674446	254,404185	426,197126	423,656602
250	,000000	,012450	,003017	,008180	224,021918	256,196453	427,488561	424,815338
300	,000000	,014950	,003137	,010669	218,726449	256,832005	428,154326	425,413402
350	,000000	,017450	,003199	,013165	216,015411	257,092296	428,501694	425,725582
400	,000000	,019950	,003232	,015663	214,604983	257,210339	428,684221	425,889650
450	,000000	,022450	,003249	,018162	213,864876	257,267530	428,780504	425,976203
500	,000000	,024950	,003258	,020662	213,474738	257,296362	428,831399	426,021956
550	,000000	,027450	,003263	,023161	213,268585	257,311231	428,858333	426,046169
600	,000000	,029950	,003266	,025661	213,159511	257,318995	428,872594	426,058990
650	,000000	,032450	,003267	,028161	213,101762	257,323077	428,880147	426,065781
700	,000000	,034950	,003268	,030661	213,071176	257,325231	428,884149	426,069378
750	,000000	,037450	,003268	,033161	213,054973	257,326370	428,886269	426,071284
800	,000000	,039950	,003268	,035661	213,046389	257,326972	428,887392	426,072294
850	,000000	,042450	,003269	,038161	213,041841	257,327291	428,887987	426,072829
900	,000000	,044950	,003269	,040661	213,039432	257,327460	428,888303	426,073112
950	,000000	,047450	,003269	,043161	213,038155	257,327550	428,888470	426,073263
1000	,000000	,049950	,003269	,045661	213,037478	257,327597	428,888558	426,073342
1050	,000000	,052450	,003269	,048161	213,037120	257,327623	428,888605	426,073384
1100	,000000	,054950	,003269	,050661	213,036930	257,327636	428,888630	426,073407
1150	,000000	,057450	,003269	,053161	213,036829	257,327643	428,888643	426,073419
1200	,000000	,059950	,003269	,055661	213,036776	257,327647	428,888650	426,073425
1250	,000000	,062450	,003269	,058161	213,036748	257,327649	428,888654	426,073428
1300	,000000	,064950	,003269	,060661	213,036733	257,327650	428,888656	426,073430
1350	,000000	,067450	,003269	,063161	213,036725	257,327650	428,888657	426,073431
1400	,000000	,069950	,003269	,065661	213,036721	257,327651	428,888657	426,073431
1450	,000000	,072450	,003269	,068161	213,036718	257,327651	428,888658	426,073432
1500	,000000	,074950	,003269	,070661	213,036717	257,327651	428,888658	426,073432
1550	,000000	,077450	,003269	,073161	213,036717	257,327651	428,888658	426,073432
1600	,000000	,079950	,003269	,075661	213,036716	257,327651	428,888658	426,073432
1650	,000000	,082450	,003269	,078161	213,036716	257,327651	428,888658	426,073432
1700	,000000	,084950	,003269	,080661	213,036716	257,327651	428,888658	426,073432
1750	,000000	,087450	,003269	,083161	213,036716	257,327651	428,888658	426,073432
1800	,000000	,089950	,003269	,085661	213,036716	257,327651	428,888658	426,073432
1850	,000000	,092450	,003269	,088161	213,036716	257,327651	428,888658	426,073432
1900	,000000	,094950	,003269	,090661	213,036716	257,327651	428,888658	426,073432
1950	,000000	,097450	,003269	,093161	213,036716	257,327651	428,888658	426,073432
2000	,000000	,099950	,003269	,095661	213,036716	257,327651	428,888658	426,073432

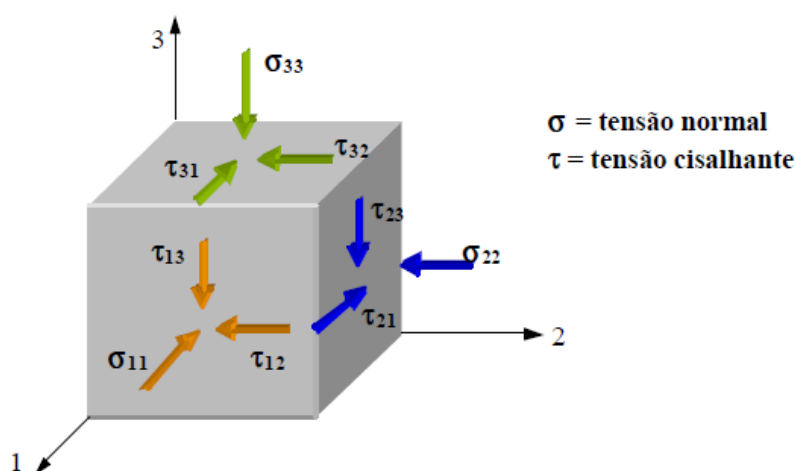


## ANEXO -3 TENSORES, INVARIANTES E TRAJETÓRIAS DE TENSÕES

### Tensor de tensões

O tensor de tensões é um ente matemático que reúne em uma matriz as componentes das tensões atuantes sobre as faces de um paralelepípedo infinitesimal em torno de um ponto de um meio material. A Figura A.6 apresenta as componentes de tensão com sentido de convenção positivo, para as tensões consideradas em Mecânica de Solos.

**Figura A.6. Componentes de tensão positivas (convenção de Mecânica dos Solos)**  
(Ibañez, 2003).



O estado de tensões representado na Figura A.2 pode ser expresso através do tensor de tensões

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Um estado qualquer de tensões sempre pode ser decomposto na soma de um tensor hidrostático e de um tensor desviador. O tensor hidrostático é um tensor diagonal, de termos iguais a  $p = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) / 3$ , isto é:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\sigma_{11} - p) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - p) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - p) \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

A representação matricial de tensor de tensões, expressa pela equação (A.27) também pode ser expressa de forma indicial, com a utilização de delta de Kronecker. Na representação a seguir os termos  $S_{ij}$  representam os termos do tensor desviador.

$$T_{ij} = p \cdot \delta_{ij} + S_{ij} \quad (\text{A.28})$$

### **Invariantes do tensor de tensões**

Invariantes de tensão podem ser definidos de diversas formas. Para os tensores de tensão podem ser definidos invariantes correspondentes a dois conjuntos. O primeiro conjunto se refere aos invariantes relacionados à equação característica do tensor e o segundo conjunto se refere aos invariantes associados ao traço do tensor, e para diversas ordens do traço (Desai, 1984).

A equação característica do tensor de tensões pode ser escrita como:

$$\sigma^3 - I_{1\sigma} \sigma^2 + I_{2\sigma} \sigma - I_{3\sigma} = 0 \quad (\text{A.29})$$

onde  $I_{1\sigma}$ ,  $I_{2\sigma}$  e  $I_{3\sigma}$  são invariantes com a posição do sistema de referência escolhido para a determinação dos componentes do tensor de tensão. Eles são expressos por:

#### ***Primeiro invariante do tensor de tensões:***

$$I_{1\sigma} = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (\text{A.30})$$

#### ***Segundo invariante do tensor de tensões:***

$$I_{2\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{A.31})$$

#### ***Terceiro invariante do tensor de tensões:***

$$I_{3\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{ij} \end{vmatrix} \quad (\text{A.32})$$

O segundo conjunto de invariantes é baseado sobre o traço do tensor  $\sigma_{ij}$ . Uma vantagem desta alternativa é o fato de se poder atribuir significado físico a estes invariantes. Para diferenciar estes novos invariantes utiliza-se uma barra sobrescrita ao nome da variável.

**Primeiro invariante do tensor de tensões baseado no traço:**

$$\bar{I}_{1\sigma} = J_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = tr(\sigma) \quad (A.33)$$

**Segundo invariante do tensor de tensões baseado no traço:**

$$\bar{I}_{2\sigma} = J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \cdot \sigma_{ji} = \frac{1}{2} tr(\sigma)^2 = \frac{1}{2} (I_{1\sigma}^2 - 2I_{2\sigma}) \quad (A.34)$$

**Terceiro invariante do tensor de tensões baseado no traço:**

$$\bar{I}_{3\sigma} = J_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ik} \cdot \sigma_{km} \sigma_{mi} = \frac{1}{3} tr(\sigma)^3 = \frac{1}{3} (I_{1\sigma}^3 - 3I_{1\sigma}I_{2\sigma} + 3I_{3\sigma}) \quad (A.35)$$

### Invariantes do tensor desviador de tensões

**Primeiro invariante do tensor desviador de tensões baseado no traço:**

$$\bar{I}_{1S} = J_{1D} = tr(S) = S_{ii} = \sigma_{ii} - \frac{1}{3} \sigma_{nn} \delta_{ii} = 0 \quad (A.36)$$

**Segundo invariante do tensor desviador de deformações baseado no traço:**

$$\bar{I}_{2S} = J_{2D} = \frac{1}{2} tr(S)^2 = \frac{1}{2} S_{ij} \cdot S_{ji} = J_2 - \frac{J_1^2}{6} \quad (A.37)$$

Este invariante pode ser expresso em função das componentes do tensor de tensão como:

$$J_{2D} = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 \quad (A.38)$$

### Planos e tensões octaédricas

Os planos octaédricos são determinados pela aplicação da condição de que os cossenos dos ângulos diretores, formados com as direções principais  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ , são iguais em valor absoluto. Existem oito planos que satisfazem esta condição, chamados de planos octaédricos (figura A7).

A tensão normal atuante nestes planos, dita *tensão normal octaédrica*, é calculada como

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}I_{1\sigma} = \frac{1}{3}tr(\sigma) \quad (A.39)$$

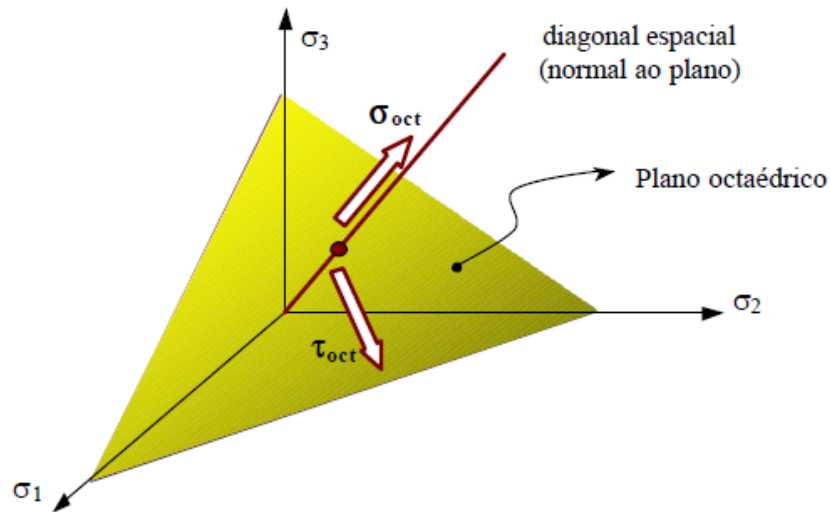
A *tensão octaédrica de cisalhamento*,  $\tau_{oct}$  é igual à projeção do vetor tensão sobre um plano octaédrico, o qual faz ângulos iguais com as três direções principais. A expressão para o cálculo de  $\tau_{oct}$  é dada por:

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{1}{9}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2] + \frac{2}{3}[\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2]} \quad (A.40)$$

Da comparação das expressões (A.38) e (A.40) pode-se concluir que:

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}}J_{2D} \quad (A.41)$$

**Figura A.7. Plano octaédrico e componentes de tensão  $\sigma_{oct}$  e  $\tau_{oct}$  (Ibañez, 2003)**



### Trajetórias de tensão

O espaço Cartesiano definido pelos eixos das tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  é conhecido como *espaço das tensões principais* ou *espaço de Westergaard*, onde são representados

planos relevantes à análise das trajetórias de tensão dos ensaios comumente utilizados em Mecânica de Solos (Figura A8).

Um plano relevante contido no espaço de tensões é o *plano triaxial*, ou de *Rendulic*, definido pela condição  $\sigma_2 = \sigma_3$ , própria dos ensaios triaxiais convencionais, axisimétricos. Nesse plano, são descritas todas as trajetórias de tensão levadas a cabo nestes ensaios. Outro plano relevante é o octaédrico cuja normal é paralela à diagonal principal do espaço de tensões ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ). Particularmente, o plano octaédrico que passa pela origem, denominado de plano  $\pi$  ( $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ ), é bastante utilizado como plano de projeção no estudo das trajetórias de tensão espaciais. A Figura A8 apresenta também as trajetórias de tensão mais empregadas em ensaios geotécnicos, as quais são detalhadas a seguir:

***Trajetoórias contidas no plano triaxial:***

**CH:** Compressão hidrostática ( $\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3$ ).

**CTC:** Compressão triaxial convencional ( $\Delta\sigma_1 > 0, \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3 = 0$ ).

**RTC:** Compressão triaxial reduzida ( $\Delta\sigma_1 = 0, \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3 < 0$ ).

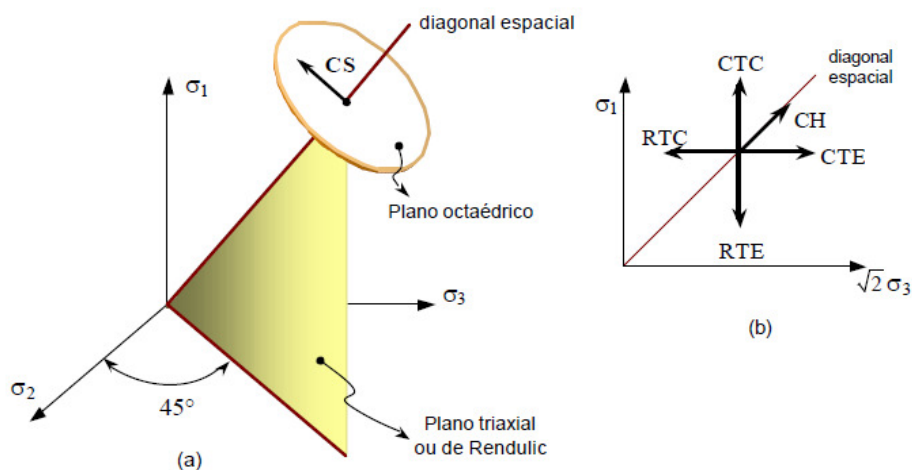
**CTE:** Extensão triaxial convencional ( $\Delta\sigma_1 = 0, \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3 > 0$ ).

**RTE:** Extensão triaxial reduzida ( $\Delta\sigma_1 < 0, \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3 = 0$ ).

***Trajetoórias contidas no plano octaédrico:***

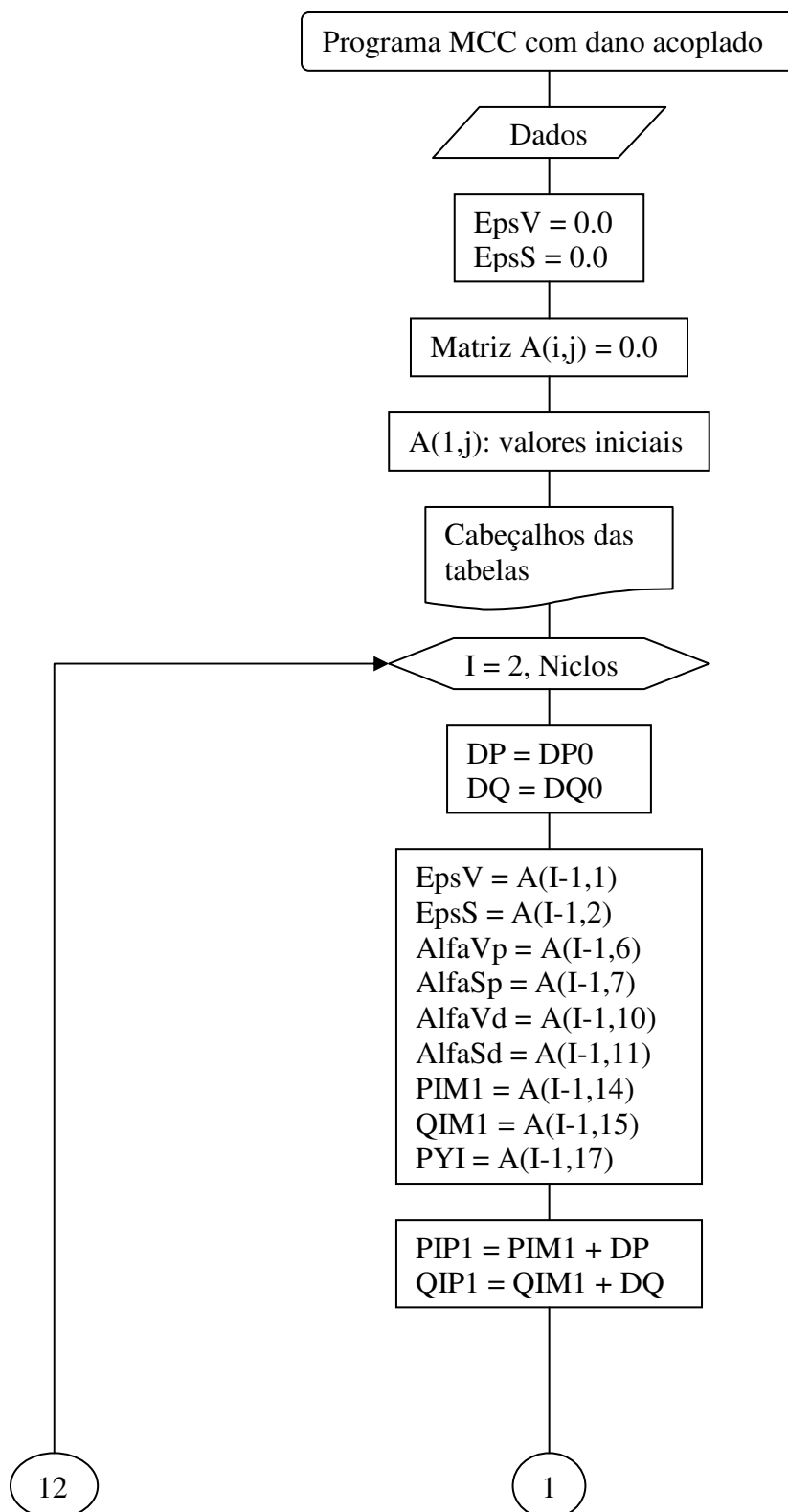
**CS:** cisalhamento simples ( $\Delta\sigma_2 = 0, \Delta\sigma_1 = -\Delta\sigma_3$ ).

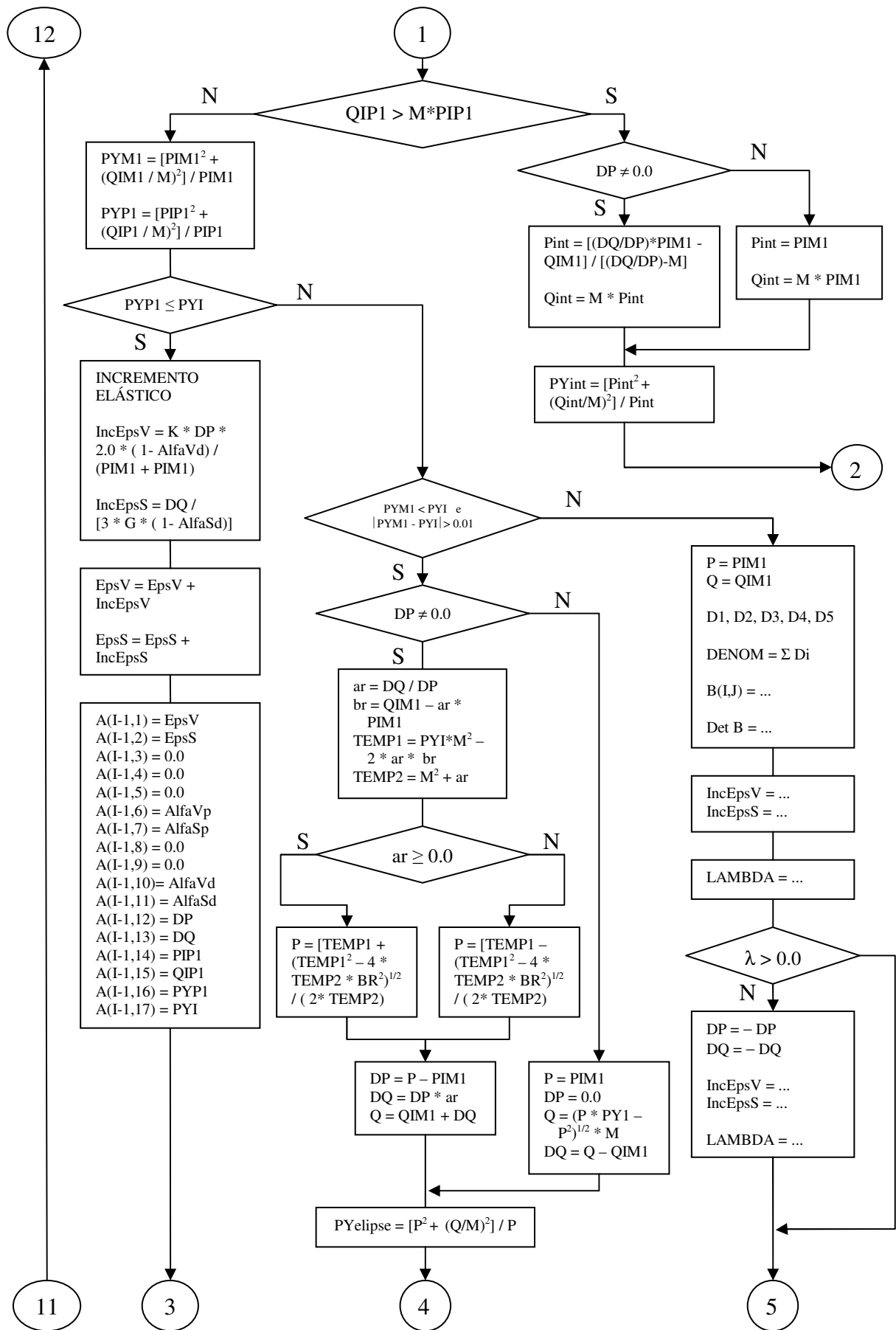
**Figura A.8. Espaço de tensões: a) Espaço de Westergaard, plano triaxial e octaédrico; b) Trajetórias de tensão no plano triaxial (Iba ez, 2003).**

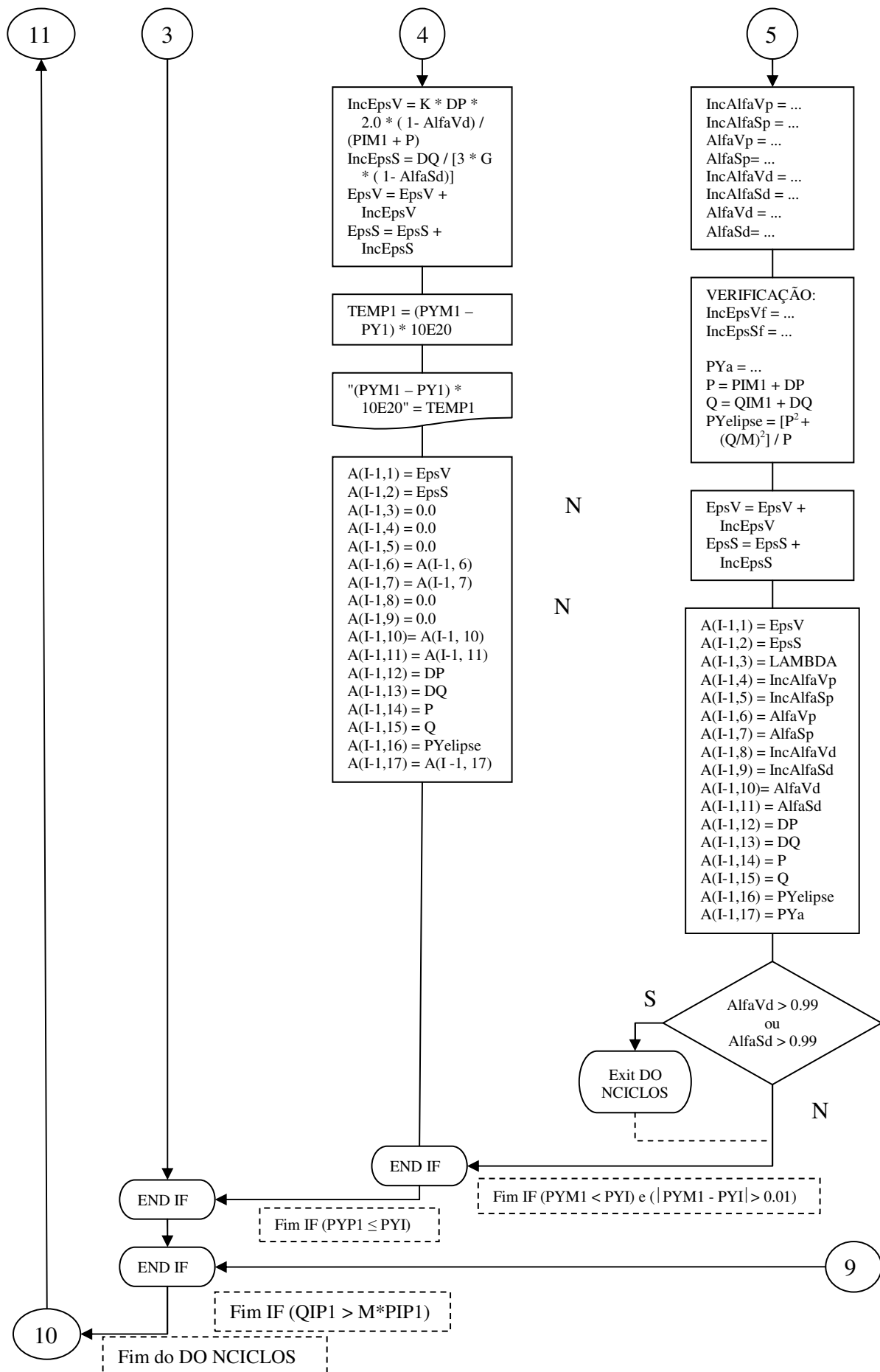


## ANEXO 4 – FLUXOGRAMAS

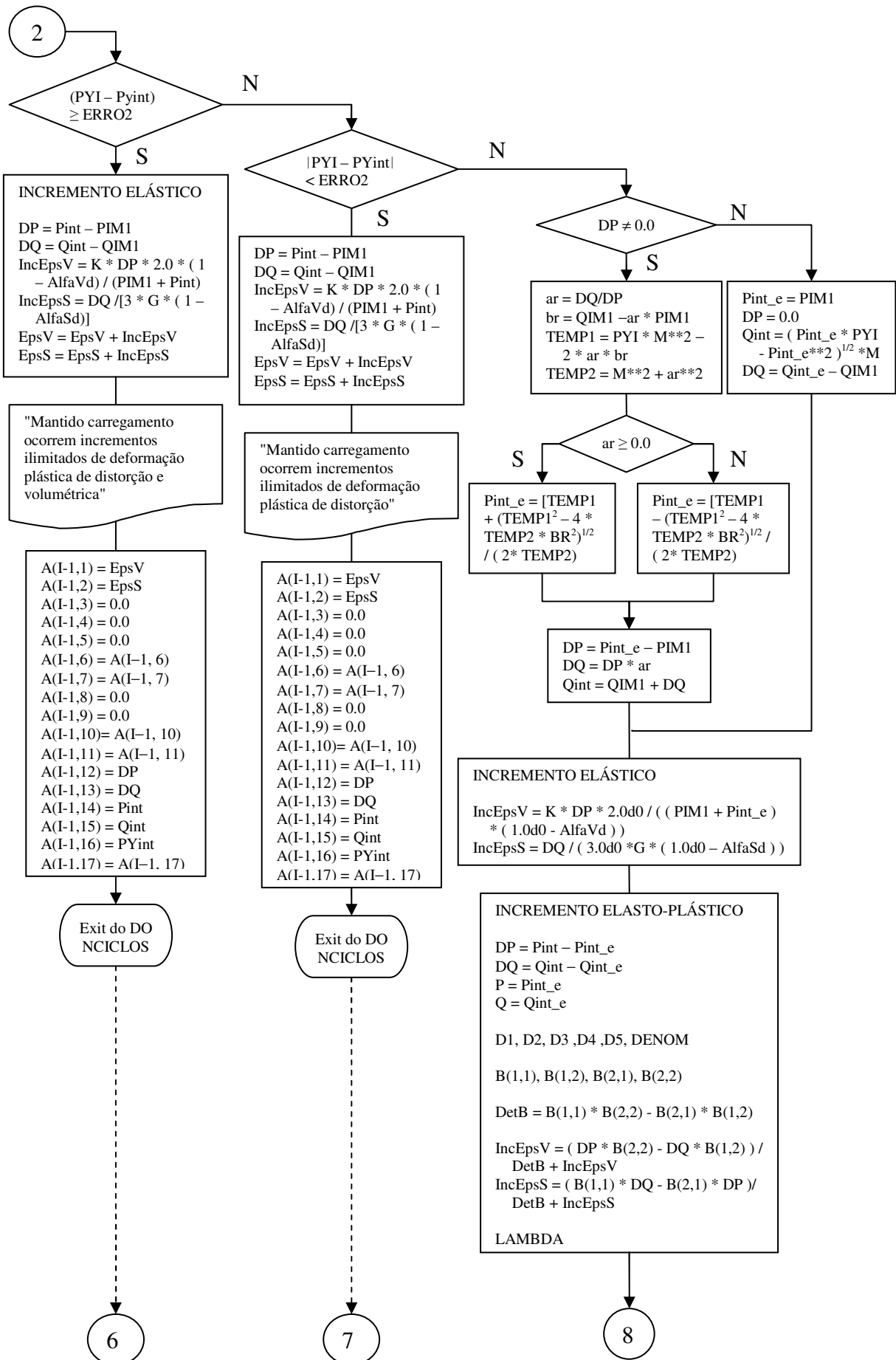
Fluxograma de programa para simulação de carregamentos com tensão controlada.

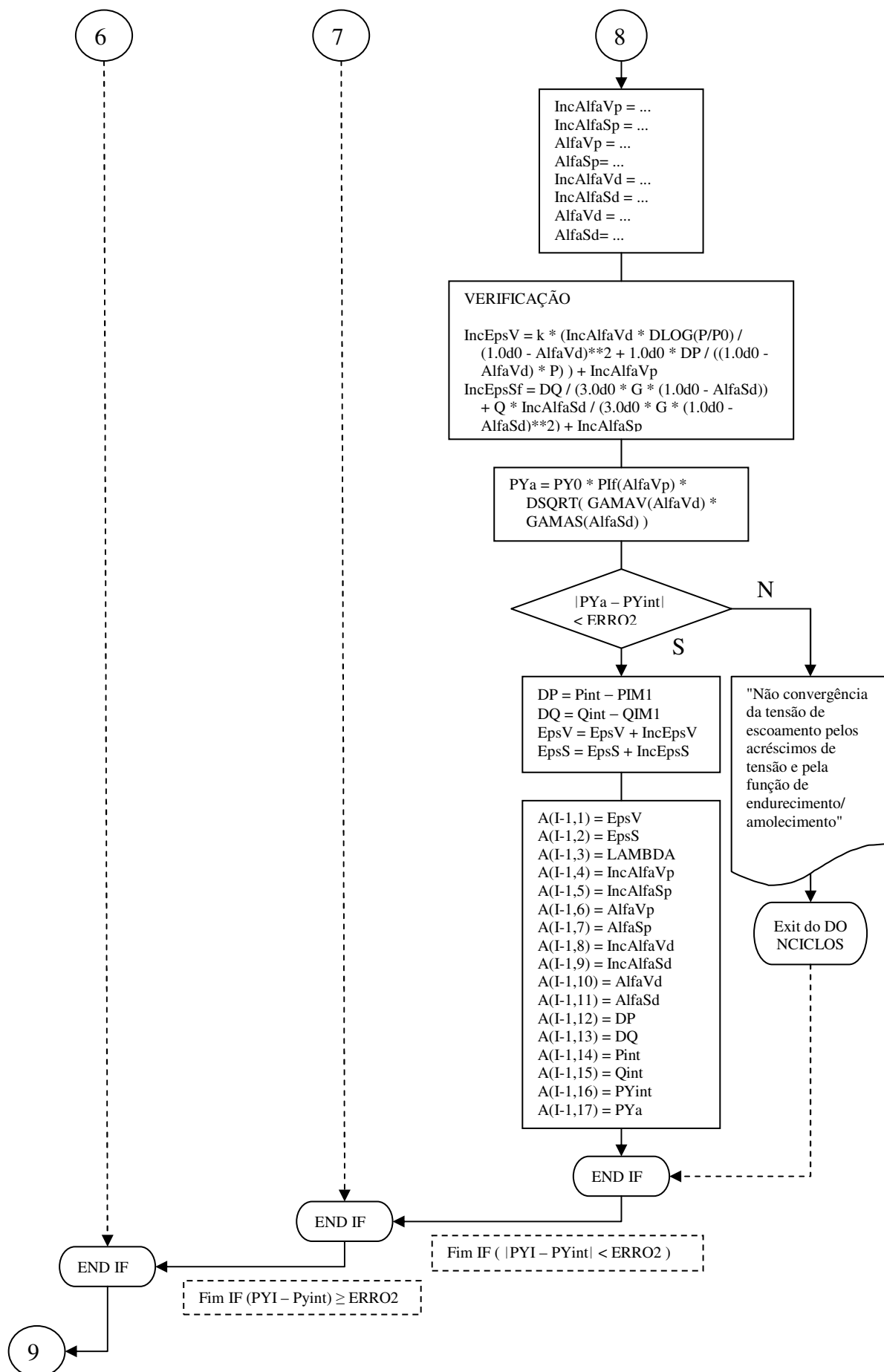












**b) Fluxograma de programa para simulação de carregamentos com deformação controlada.**

